RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

TEÓRICO - PRÁCTICO

CONTENIDO:

- Razonamiento Lógico
- Formas de Razonamiento
- Interpretación de Enunciados
- Combinatoria y Probabilidades
- Perímetros y Áreas

FONDO EDITORIAL RODO
Siempre Competitivo

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

03 de setiembre del 2020

Libro: Razonamiento Matemático

Páginas anexadas: 836
Páginas en bruto: 810
Peso bruto aproximado: 164 megas
Replica: No
Calificación: 9/10
Autor: Fondo Editorial Rodo
ISBN: 2017-00618
Tiempo SCAN: **5 horas 06 minutos**
Edición SCAN: **2 horas 14 minutos**
Tiempo Total SCAN: **7 horas 20 minutos**

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

TEÓRICO - PRÁCTICO

CONTENIDO:

- Razonamiento Lógico
- Formas de Razonamiento
- Interpretación de Enunciados
- Combinatoria y Probabilidades
- Perímetros y Áreas

FONDO EDITORIAL RODO
Siempre Competitivo

PRESENTACIÓN

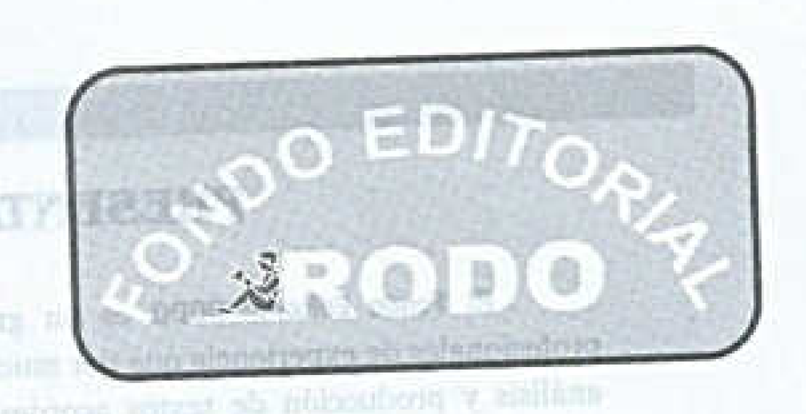
El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2018, en está oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **LIBRO DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO** desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica , ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benitez Nuñez.



LIBRO DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
APTITUD ACADÉMICA

EQUIPO PEDAGÓGICO
Ronald Carhuancho Ascanoa
César Chu Mundaca
Américo Portilla Gaspar

EDITADO por
FONDO EDITORIAL RODO
de Walter Z. Benitez Nuñez
Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña
LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 992 - 796104

6a. Edición - Enero 2018

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N°: 2018 – 00618

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS
José Miguel Gallo Ballena

Se término de imprimir en Enero del 2018 en:
GRAFIC PLUS S. A. C.
Jr. Chincha N° 434 A. H. VI ZONA LIMA - Lima 11

ÍNDICE

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del
Team Calapenshko,
el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

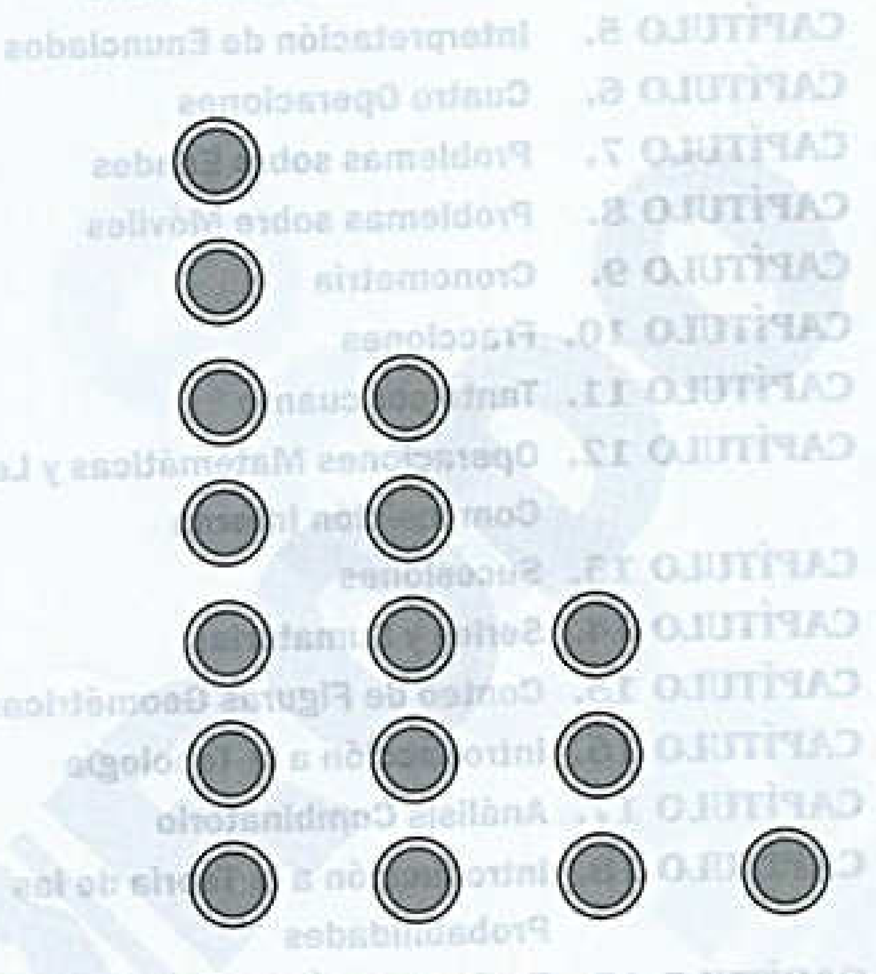
No pagues por este libro de **circulación gratuita**,
búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

EL NIM

Hay juegos como el tres en raya que son divertidos hasta que se encuentra una estrategia para no perder. El NIN cuyo origen es incierto aunque la mayoría manifiesta su origen en China.



Se puede retirar solo fichas de una misma fila y pierde el jugador que se ve obligado a tomar la última ficha.

team CALAPENSHKO

Razonamiento Lógico

CAPACIDADES

- Dar a conocer el concepto de razonamiento lógico.
- Desarrollar la capacidad de razonar de manera lógica.
- Dar a conocer criterios y métodos prácticos para resolver problemas de tipo deductivo.

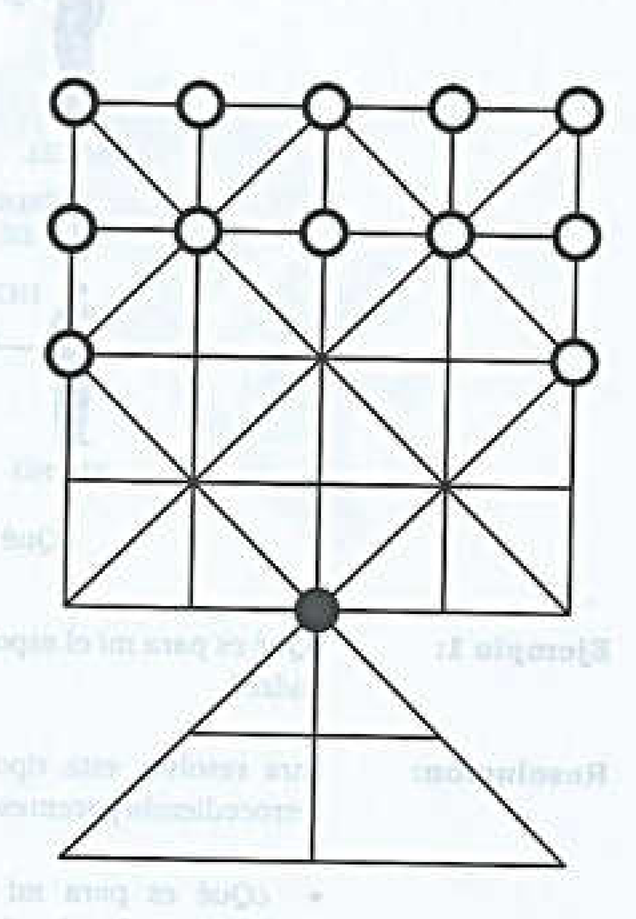
EL ZORRO Y LAS OVEJAS (EL JUEGO PERUANO)

"El zorro y las ovejas" es un juego que practican los niños en las comunidades puneñas de Sillota, Chaupi, Sahuacasi y Mañazo que posibilita el desarrollo de la capacidad de razonamiento y de toma de decisiones. Los niños que juegan deben diseñar estrategias adecuadas para "atrapar al zorro" o para "comerse las ovejas", según sea el rol que les corresponde desempeñar.

El cuadro grande representa "la pradera de las ovejas", el triángulo grande la "gruta del zorro" y las horizontales, verticales y diagonales son los "caminos".

MATERIALES:

* 12 fichas blancas que representan las ovejas y una ficha negra que representa el zorro.



PROCEDIMIENTO:

* Ovejas y zorros se ubican en las intersecciones.
* Pueden desplazarse de una intersección a otra contigua.
* Las ovejas solo pueden avanzar en forma horizontal, vertical y diagonal.
* El zorro puede avanzar y retroceder en forma horizontal, vertical y diagonal.
* El zorro tratará de comerse a las ovejas siguiendo reglas semejantes a las del juego de damas (saltando sobre ellas).
* Las ovejas no pueden comer al zorro, pero si pueden ocupar su gruta y desalojarlo o acorralarlo e inmovilizarlo.
* El zorro gana el juego si se come a todas las ovejas.
* Las ovejas ganan el juego si todas llegan a la gruta o encierran al zorro sin dejar que se pueda mover.
* El zorro gana un punto por cada oveja que se comió.
* Cada oveja que llega a la gruta gana un punto.

INTRODUCCIÓN

En esta capítulo veremos aquellos problemas que no requieren del conocimiento de alguna teoría matemática en especial para su resolución. Tan solo debemos poner en prática nuestra capacidad de analizar y razonar de manera utilizando, en algunos casos, criterios o métodos prácticos.

Los problemas que veremos a continuación se clasifican en:

- Problemas sobre parentescos.
- Problemas sobre mínimo número de personas.
- Problemas sobre tiempos y días de la semana.
- Problemas sobre ordenamientos:
  - Ordenamiento lineal
  - Ordenamiento circular
- Problemas sobre toma de decisiones.
- Juegos de estrategia.
- Problemas con cerillos.
- Problemas con dados.
- Distribuciones numéricas.

PARENTESCOS

En este punto veremos aquellos problemas que se generan por la relación de parentesco que existe entre los integrantes de una familia.

¿Qué es Ángel de David?

Ejemplo 1: ¿Qué es para mí el esposo de la madre de la hija de la esposa del hermano de mi padre?

Resolución: Para resolver este tipo de problemas se sugiere empezar desde el final e ir retrocediendo parentesco tras parentesco.

- ¿Qué es para mí el esposo de la madre de la hija de la esposa del hermano de mi padre?

  (hermano de mi padre = mi tío)

- ¿Qué es para mí el esposo de la madre de la hija de la esposa de mi tío?
  (la esposa de mi tío: mi tía)
- ¿Qué es para mí el esposo de la madre de la hija de mi tía?
  (la hija de mi tía: mi prima)
- ¿Qué es para mí el esposo de la madre de mi sobrina?
  (madre de mi sobrina: mi prima)
- ¿Qué es para mí el esposo de mi tía?

Rpta: Mi tío

MÍNIMO NÚMERO DE PERSONAS

Bajo este título se agrupan aquellos problemas en los cuales se tienen reunidos a los integrantes de una familia y al indicar quienes se encuentran presentes (abuelos, padres, hermanos, hijos, etc.) se tiene en apariencia un gran número de personas. El reto consiste en calcular el menor número de personas con el cual es posible contar a todos los integrantes que mencione el problema.

Se encuentran presentes: 2 padres, 2 hijos, 1 hija, 1 hermano, 1 hermana, 1 abuelo y 1 nieto.

Sin embargo son sólo 4 personas.

Ejemplo 2: En una reunión familiar se observa que hay 2 padres, 1 hijo, 1 hija, 2 hermanos, 2 tíos, 1 sobrino y 1 sobrina. ¿Cuántas personas como mínimo hay en dicha reunión?

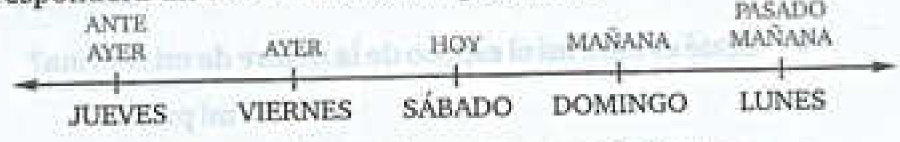
Resolución:

Están presentes:

- 2 padres: (1) y (2)
- 1 hijo: (3)
- 1 hija: (4)
- 2 hermanos: (1) y (2)
- 2 tíos: (1) y (2)
- 1 sobrino: (3)
- 1 sobrina: (4)

TIEMPOS DIARIOS Y DÍAS DE LA SEMANA

Bajo este título se agrupan aquellos problemas en los cuales se establece una relación entre los tiempos diarios (hoy, ayer, mañana, etc.) y los días de la semana (lunes, martes, miércoles, etc.). A cada día de la semana le corresponderá un determinado tiempo diario.



El ayer de pasado mañana es domingo
mañana

Ejemplo 3: El ayer del anteayer de mañana fue jueves. ¿Qué día será el mañana del mañana de pasado mañana?

Resolución: Para resolver este tipo de problemas aplicaremos un criterio basado en la recta numérica.

Para aplicar este criterio debemos conocer primero las siguientes equivalencias:

- Hoy = 0
- Mañana = + 1
- Pasado mañana = + 2
- Ayer = − 1
- Anteayer = − 2

El criterio consiste en cambiar los tiempos por su respectivo valor numérico, luego se suman esos valores y el resultado lo ubicamos en la recta numérica. Veamos:

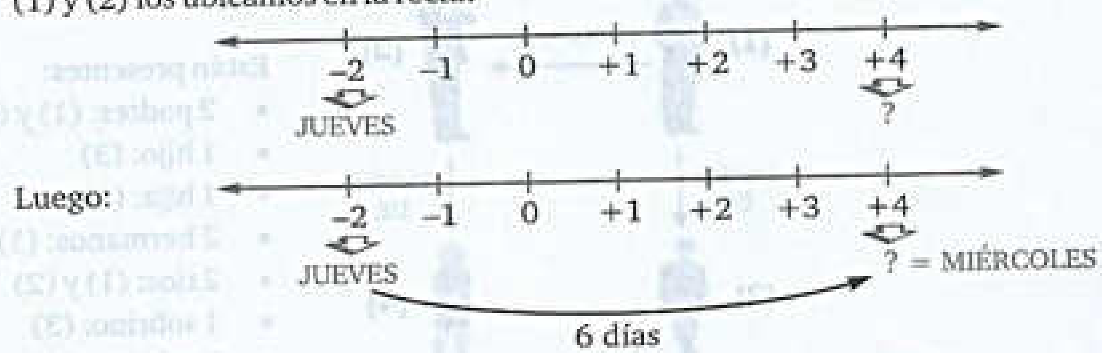
El ayer del anteayer de mañana es jueves
−1 −2 +1
Suma = −2

Entonces: − 2 fue jueves ....(1)

¿Qué día será el mañana del mañana de pasado mañana?
+1 +1 +2
Suma = +4

Entonces: ¿Qué día será + 4? ....(2)

(1) y (2) los ubicamos en la recta:



Rpta: Miércoles

Observación:

Otras equivalencias a tener en cuenta:

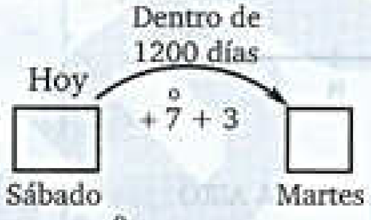
- Hace 1 día ó 1 día antes = – 1
- Hace 2 días ó 2 días antes = – 2
- Hace 3 días ó 3 días antes = – 3
- ⋮

- Dentro de 1 día ó 1 día después = + 1
- Dentro de 2 días ó 2 días después = + 2
- Dentro de 3 días ó 3 días después = + 3
- ⋮

RELACIÓN DE TIEMPOS Y CALENDARIOS

Ejemplo: Si hoy es Sábado. ¿Qué día de la semana caerá dentro de 1200 días?

Resolución:



Rpta.: Martes

Año civil → 365 días = $\overset{o}{7}+1$

Año bisiesto → 366 días = $\overset{o}{7}+2$; Febrero tiene 29 días.

Año comercial → 360 días

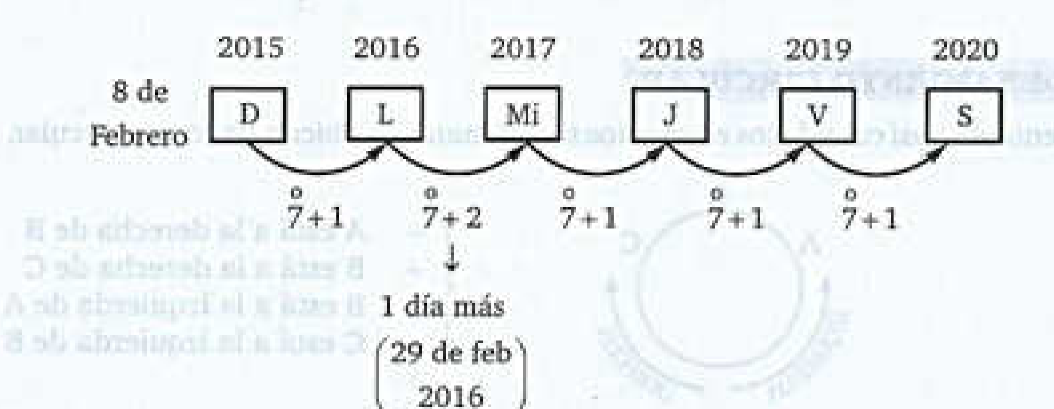
NOTA "S"

Para el reconocimiento de un año bisiesto, debemos tener en cuenta:

$$\overline{abcd} = \begin{cases} \text{Si}: \overline{cd} \neq 00 \rightarrow \overline{cd} = \overset{o}{4} & \text{ejemplos}: 2016, 1848 \\ \text{Si}: \overline{cd} = 00 \rightarrow \overline{ab} = \overset{o}{4} & \text{ejemplos}: 2000, 1600 \end{cases}$$

Ejemplo: El 8 de febrero del 2015 fue Domingo. ¿Qué día cayó el 8 de febrero del 2020?

Resolución:



ORDENAMIENTOS

Bajo este título se agrupan aquellos problemas en los cuales un grupo de elementos (personas, animales, objetos, etc.) se ordenan o se ubican de acuerdo a ciertos criterios: Edades, tamaños, puntajes, posición respecto de los otros (izquierda – derecha; arriba – abajo, frente a), orden de llegada, etc.

Los ordenamientos pueden ser:
- lineal
- circular

• ORDENAMIENTO LINEAL

Se denomina así cuando los elementos se ordenan o se ubican uno a continuación de otro o sea de forma horizontal o vertical.

IZQUIERDA MENOS ← A — B → DERECHA MÁS

- A está a la izquierda de B
- B está a la derecha de A
- A tiene menos puntos que B
- B tiene más puntos que A
- ⋮

ARRIBA ALTO ↑ A — B ↓ ABAJO BAJO

- A está más arriba que B
- B está más bajo que A
- A es más alto que B
- B es más bajo que A
- ⋮

4° 3° (B) 2° (A) 1°

- A llegó antes que B
- B llegó después de A

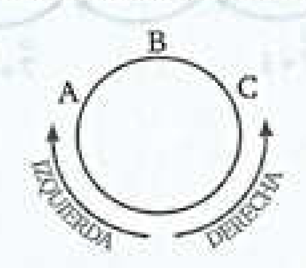
NOTA "S"

* No es menor que < > mayor ó igual que.

* No es mayor que < > menor ó igual que.

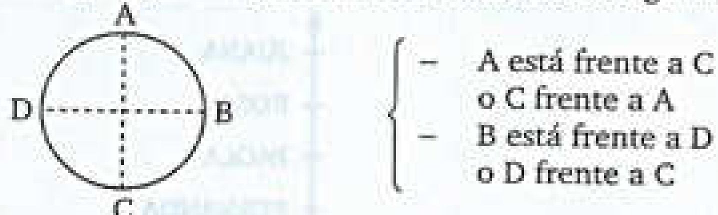
• ORDENAMIENTO CIRCULAR

Se denomina así cuando los elementos se ordenan o se ubican de forma circular.



- A está a la derecha de B
- B está a la derecha de C
- B está a la izquierda de A
- C está a la izquierda de B

Cundo los datos nos indiquen que una persona está frente a otra sugerimos el trazo de diámetros.



NOTA "S"
Ubicados simétricamente es equivalente a decir ubicados a igual distancia.

Ejemplo 4: Cinco amigos están en el cine sentados uno al lado de otro. Carla y Ángel se sientan en forma adyacente. Ángel no está al lado de Elena ni de Bruno. Carla está en un extremo izquierdo. Si Elena y David no están juntos, ¿quiénes están sentados al lado de David?

Resolución:

- Carla esté en el extremo izquierdo

CARLA				

- Carla y Ángel se sientan en forma adyacente.

CARLA	ÁNGEL			

- Ángel no está al lado de Elena ni de Bruno.

CARLA	ÁNGEL			
			ELENA	BRUNO
		ó	BRUNO	ELENA

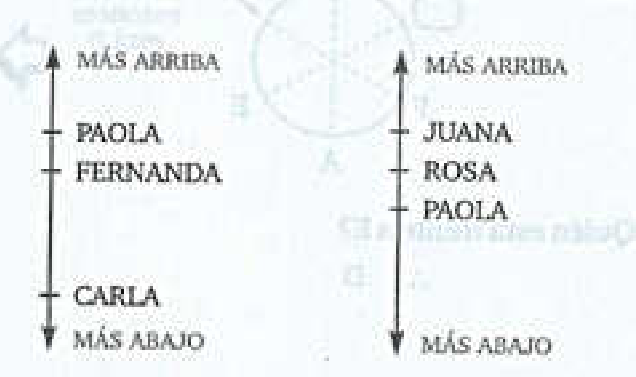
- Elena y David no están juntos.

CARLA	ÁNGEL	DAVID	BRUNO	ELENA

¿Quiénes están sentados al lado de David?

∴ Ángel y Bruno

Ejemplo 5: Cinco chicas están escalando una montaña. Carla está más abajo que Fernanda, quién se encuentra un lugar más abajo que Paola, quién está más abajo que Rosa, quién se encuentra entre Juana y Paola. ¿Quién está en cuarto lugar?



Resumiendo los dos esquemas:

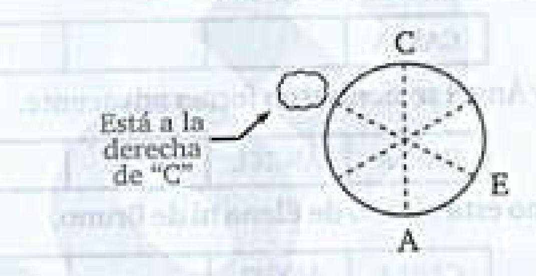
∴ Rosa

Ejemplo 6: Seis personas A, B, C, D, E y F se sientan simétricamente alrededor de una mesa circular. Se sabe que:

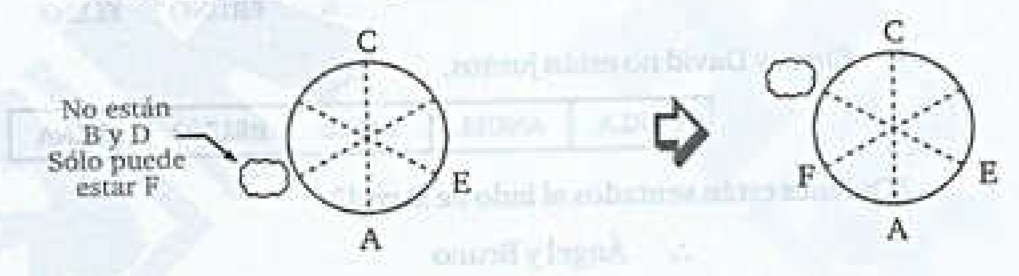
- "A" se sienta frente a "C", quien tiene a su derecha a la persona que está frente a "E".
- "A" no está junto a "B" ni junto a "D".
- "E" no está junto a "D".

¿Quién está frente a "E"?

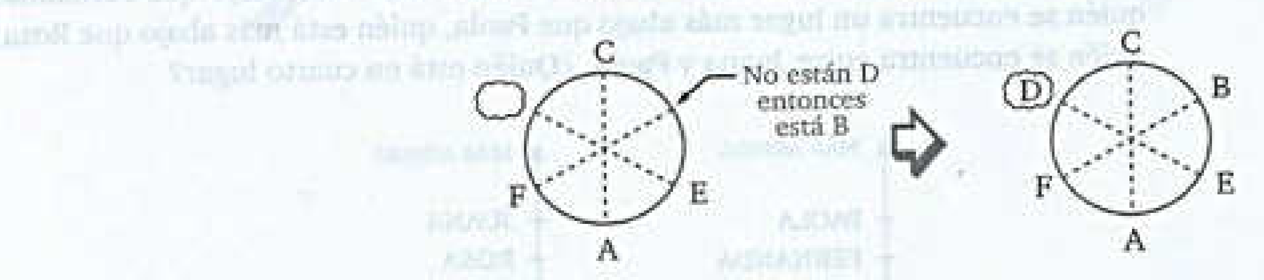
Resolución:



- A no está junto a B ni junto a D



- E no está junto a D



¿Quién está frente a E?

∴ D

TOMA DE DECISIONES

Bajo este título se agrupan aquellos problemas en los cuales un grupo de personas tienen ciertas características: profesiones u oficios, lugares donde viven, estudios, aficiones (juegos, bebidas, mascotas, etc.), nacionalidades, etc. Los datos suelen presentarse en un aparente caos y se pide determinar las características que corresponden a cada persona. Para la resolución de este tipo de problema se sugiere el uso de tablas como la que mostramos a continuación.

CARACTERÍSTICAS

PERSONAS						......
→						......
→						......
→						......
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Ejemplo 7: Se encuentran reunidos 4 profesores cuyos nombres son: Ángel, Bruno, César y David. Los cursos que dictan son: Historia, RM, RV y Física aunque no necesariamente en ese orden.

– El profesor de Historia, que es primo de Ángel, es cuñado de Bruno y además es el más joven del grupo.
– César que es el de más edad, es vecino del profesor de RM, quien a su vez es el más alto.
– Ángel, que es bajo, es menor que el profesor de Física.

¿Quién es el profesor de Física?

Resolución: Analizando los datos:

- Si el profesor de Historia es primo de Ángel, entonces Ángel no enseña Historia.
- Como el profesor de Historia es el cuñado de Bruno, entonces Bruno no es el profesor de Historia.
- Como el profesor de Historia es el más joven, César no es el profesor de Historia (porque César es el de más edad).
- Si César es vecino del profesor de RM, entonces César no es el profesor de RM.
- Como Ángel es bajo, Ángel no es el profesor de RM (porque el profesor de RM es el más alto)
- Si Ángel es el menor que el profesor de Física, entonces Ángel no es el profesor de Física.

Colocamos el resultado de nuestro análisis en la tabla:

	HISTORIA	RM	RV	FÍSICA
ÁNGEL	NO	NO		NO
BRUNO	NO			
CÉSAR	NO	NO		
DAVID				

Para completar la tabla debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Si por fila o columna en todos los casilleros menos uno se ha colocado un NO, en el casillero que falta se debe colocar un SI (cada persona dicta un curso)
- Si en un casillero se ha colocado un SI, en los otros casilleros de la fila y columna a la cual pertenece este casillero se debe colocar un NO

Entonces la tabla completa quedará así:

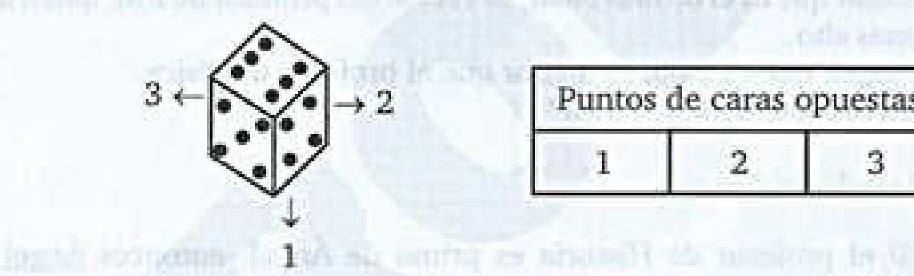
	HISTORIA	RM	RV	FÍSICA
ÁNGEL	NO	NO	SI	NO
BRUNO	NO	SI	NO	NO
CÉSAR	NO	NO	NO	SI
DAVID	SI	NO	NO	NO

∴ El profesor de Física es César.

PROBLEMAS CON DADOS

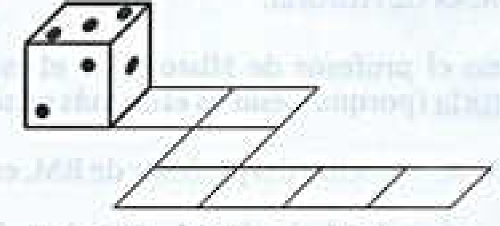
En problemas con dados debemos tener en cuenta:

* En un dado legal o común la suma de puntajes de las caras opuestas es 7.



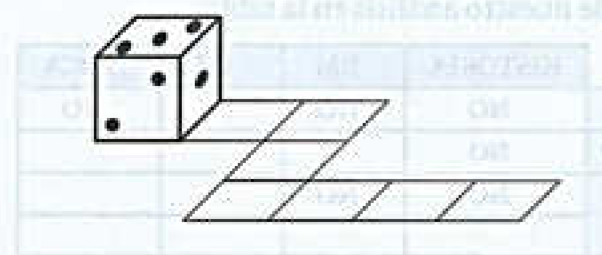
Puntos de caras opuestas		
1	2	3

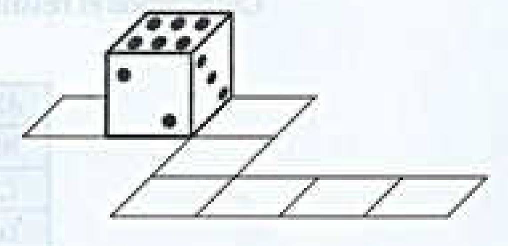
Ejemplo: El dado rueda en un circuito como se presenta en la figura e, inicialmente, la cara superior es un 3.

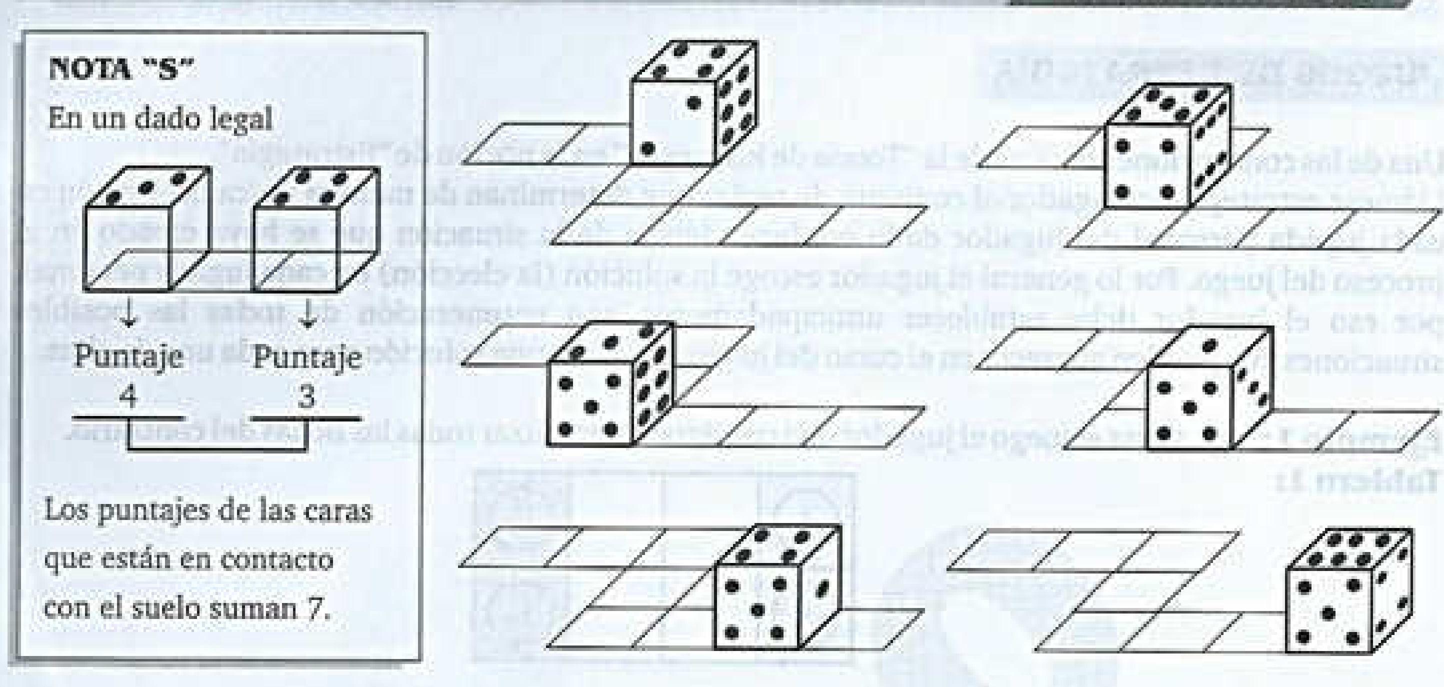


¿Cuál será la cara superior al final del recorrido?

Resolución: Vemos el proceso teniendo en cuenta la primera afirmación del enunciado, que es lo que nos permite descubrir las nuevas caras que se asoman a la vista.





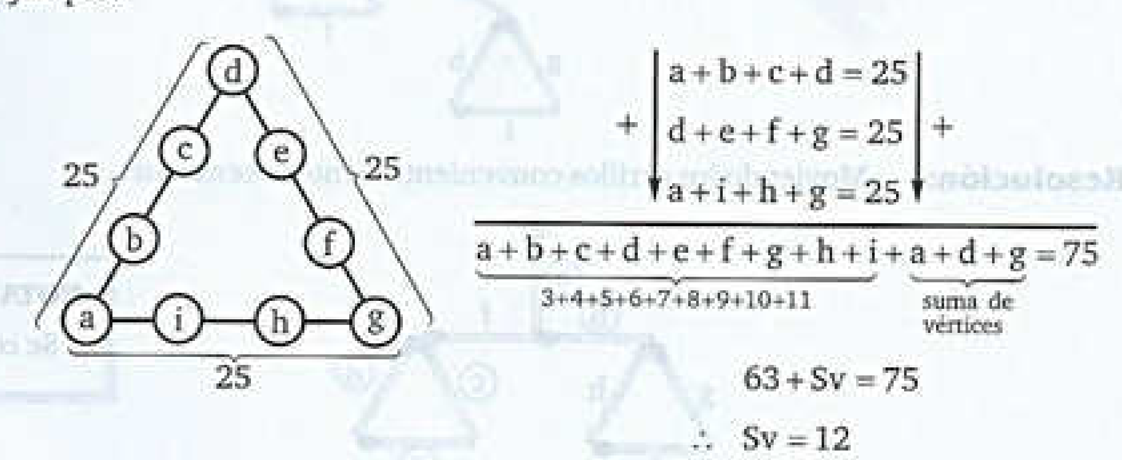


∴ La cara superior, al final, es la cara 6.

DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS

Ejemplo: En los círculos de la figura distribuya los números naturales del 3 al 11, de manera que los números en cada lado del triángulo sumen 25. Calcule la suma de los números ubicados en los vértices.

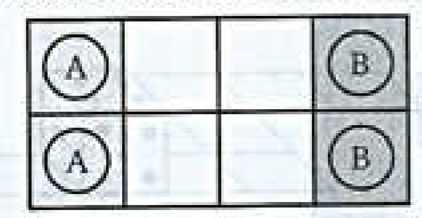
Resolución: En este tipo de problemas no es necesario conocer la ubicación exacta de cada número, basta con encontrar una estrategia para hallar lo que nos pide.
Por ejemplo:



JUEGOS DE ESTRATEGIA

Una de las concepciones básicas de la "Teoría de los juegos" en la noción de "Estrategia".
Llámese estrategia del jugador al conjunto de reglas que determinan de manera única la elección en cada jugada personal del jugador dado en dependencia de la situación que se haya creado en el proceso del juego. Por lo general el jugador escoge la solución (la elección) en cada jugada personal, por eso el jugador debe establecer anticipadamente una enumeración de todas las posibles situaciones que pueden aparecer en el curso del juego y preveer una solución para cada una de ellas.

Ejemplo 1: Gana el juego el jugador que consigue inmovilizar todas las fichas del contrario.
Tablero 1:

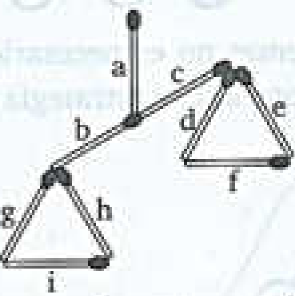


Resolución: Para descubrir la estrategia que nos permita asegurarnos el triunfo primero jugaremos una cuantas partidas.
Estrategia Ganadora: En este caso, el jugador que empieza siempre pierde. Para ganar, siempre tengo que avanzar (nunca debo retroceder). Para saber cómo debo avanzar (con qué ficha y cuantas casillas) tendré que fijarme en lo que ha hecho el otro jugador. Se puede dar dos situaciones diferentes:
* Si avanza, yo avanzaré el mismo número de casillas; pero en la fila.
* Si retrocede, yo avanzaré tantas casillas como él haya retrocedido en la misma fila.

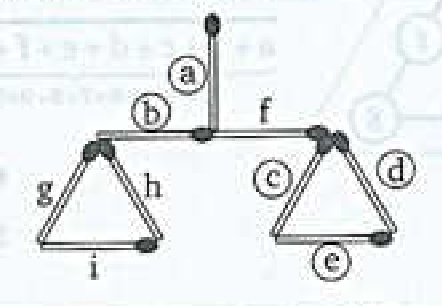
PROBLEMAS DE CERILLOS

En esta parte del curso requerimos de la imaginación e ingenio para afrontar las diversas situaciones presentadas, utilizando en mucho de los casos el "Pensamiento lateral".

Ejemplo: Moviendo 5 cerillos, hacer que la balanza este en equilibrio



Resolución: Moviendo los cerillos convenientemente obtenemos:



NOTA "S"
* Se coloca b colineal a f.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. ¿Qué es para mi la hermana del hijo de mi hermano?

Rpta: ....

2. Ángel es nieto del papá de Bruno. Si Bruno es hijo único, ¿qué parentesco hay entre Ángel y Bruno?

Rpta: ....

3. En una reunión familiar están presentes dos padres, dos hijos y un nieto. ¿cuántas personas como mínimo hay en dicha reunión?

Rpta: ....

4. Coloque los números del 1 al 9, uno por círculo, de manera que la suma de los números de cada lado sea igual a 17. Dar como respuesta la suma de los números que van en los vértices.

Rpta: ....

5. Si el mañana de pasado mañana es Lunes, ¿qué día es hoy?

Rpta: ....

6. ¿Cuántos cerillos, como mínimo, hay que mover para formar 4 triángulos equiláteros todos iguales?

Rpta: ....

7. Cinco alumnos: A, B, C, D y E rindieron el examen de razonamiento matemático. A obtuvo más nota que C, D menos nota que B, C más nota que B y E más nota que A. ¿Quién obtuvo la menor nota?

Rpta: ....

8. Seis amigos: A, B, C, D, E y F se sientan simétricamente alrededor de una mesa circular. Se sabe que:

* A se sienta junto a la derecha de C y frente a D.
* F está junto a C.
* B no está junto a D.

¿Quiénes están junto a E?

Rpta: ....

9. Tres amigos: Aldo, Bruno y Ciro son abogado, doctor y profesor, no necesariamente en ese orden. El abogado le dice a Bruno que el otro es profesor. Ciro no es abogado. Diga que profesión tiene cada uno.

Rpta: ....

10. Ana, Brenda y Carol tienen de mascotas un perro, un gato y un hamster, no necesariamente en ese orden. Carol le dice a Brenda que le gustaría tener un hamster. Brenda tiene un gato. Diga que mascota le corresponde a cada una.

Rpta: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 ¿Qué es para mi el primo del abuelo paterno del único hijo del hijo de mi hermano?

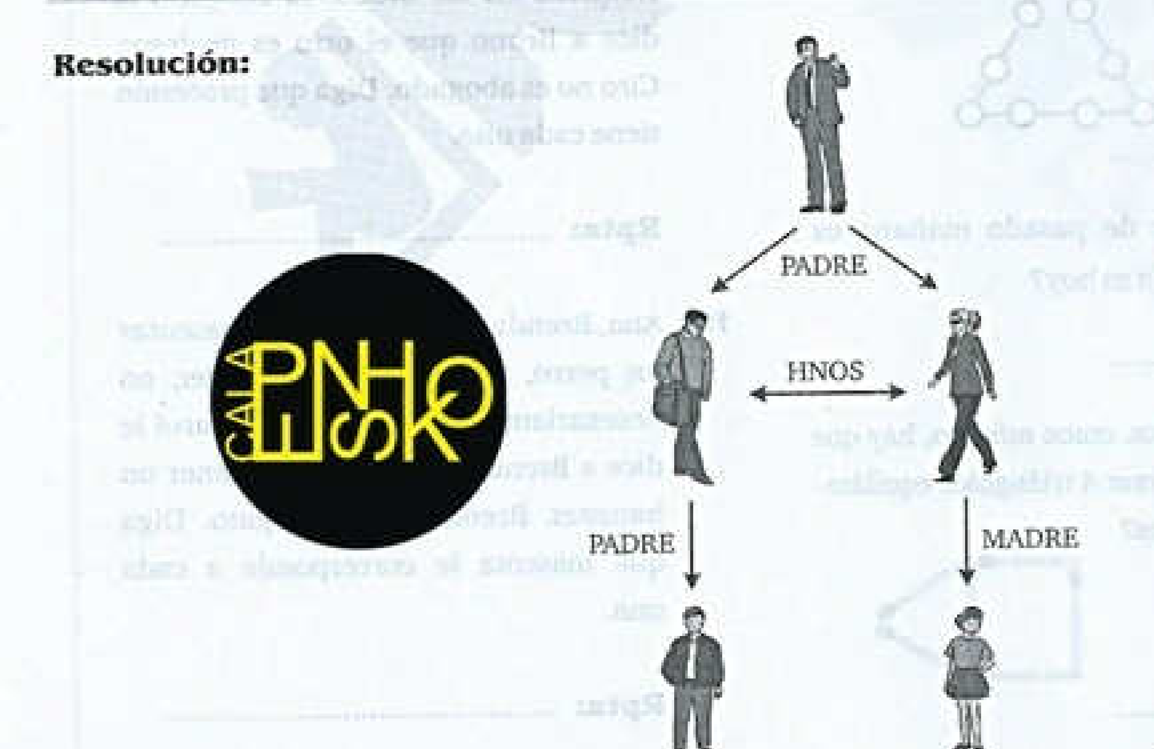
Resolución: Para resolver este tipo de problemas se sugiere empezar desde el final e ir retrocediendo parentesco tras parentesco.

- ¿Qué es para mi el primo del abuelo paterno del hijo del hijo de mi hermano?
  (hijo de mi hermano = mi sobrino)
- ¿Qué es para mi el primo del abuelo paterno del hijo de mi sobrino?
  (hijo de mi sobrino = mi sobrino nieto)
- ¿Qué es para mi el primo del abuelo paterno de mi sobrino nieto?
  (abuelo paterno de mi sobrino nieto = mi hermano)
- ¿Qué es para mi el primo de mi hermano?

Rpta: Es mi primo

PROBLEMA 2 En una reunión están presentes 1 abuelo, 2 padres, 1 madre, 2 hijos, 2 hijas, 1 hermano, 1 hermana, 1 sobrino, 1 sobrina, 1 nieto y 1 nieta. ¿Cuántas personas como mínimo están reunidos?

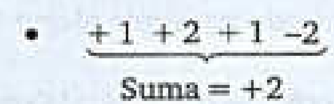
Resolución:



∴ Son 5 personas

PROBLEMA 3 El mañana del pasado mañana del mañana de anteayer será lunes. ¿Qué día fue el ayer del ayer del anteayer del mañana de mañana?

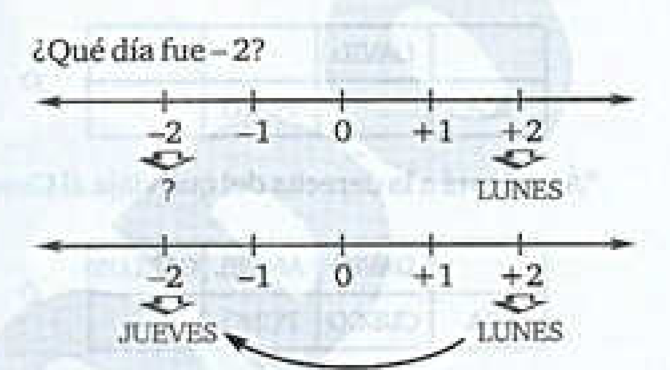
Resolución: Cambiamos los tiempos por sus equivalentes numéricos.



Entonces: + 2 será lunes

- ¿Qué día fue −1 −1 −2 + 1 + 1 ?
  Suma = − 2

Entonces: ¿Qué día fue − 2?



∴ Jueves

PROBLEMA 4 Para llegar al punto R se debe pasar previamente por los puntos A, B, C, S y T, aunque no necesariamente en ese orden. Si C está más cerca de R que B. T está más cerca de R que C. S está más cerca de R que T y A está antes que T pero después que C. ¿Cuá es la única línea de puntos para llegar directamente a R?

Resolución: Digamos que el sentido para llegar a R sea el siguiente: →

- C está más cerca de R que B
  → B C R
- T está más cerca de R que C
  → B C T R
- S está más cerca de R que T
  → B C T S R
- A está antes que T pero después que C
  → B C A T S R

∴ La línea de puntos para llegar a R es: B C A T S R

PROBLEMA 5 En la sala de espera de un aeropuerto se encuentran 4 personas senadas en una misma fila de 4 asientos, sus nombres son: Ángel, Bruno, Carlos, David, y sus destinos: Puno, Tacna, Ica y Cusco; aunque no necesariamente en ese orden. Además se sabe que:

- El que viaja a Tacna no está en un extremo.
- David tiene a su costado izquierdo al que viaja a Ica y a su costado derecho al que viaja a Puno.
- Ángel está a la derecha del que viaja al Cusco y a la izquierda de Carlos.

¿Quiénes viajan a Cusco y Puno respectivamente?

Resolución: "David tiene a su costado izquierdo al que viaja a Ica y a su costado derecho al que viaja a Puno"

	DAVID		
ICA		PUNO	

ó

		DAVID	
	ICA		PUNO

"Ángel está a la derecha del que viaja al Cusco y a la izquierda de Carlos"

	DAVID	ÁNGEL	CARLOS
ICA	CUSCO	PUNO	

ó

	ÁNGEL	DAVID	CARLOS
CUSCO	ICA		PUNO

Completando:

BRUNO	DAVID	ÁNGEL	CARLOS
ICA	CUSCO	PUNO	TACNA

¡NO! porque el que viaja a Tacna no está en un extremo

ó

BRUNO	ÁNGEL	DAVID	CARLOS
CUSCO	ICA	TACNA	PUNO

∴ Los que viajan a Cusco y Puno son Bruno y Carlos

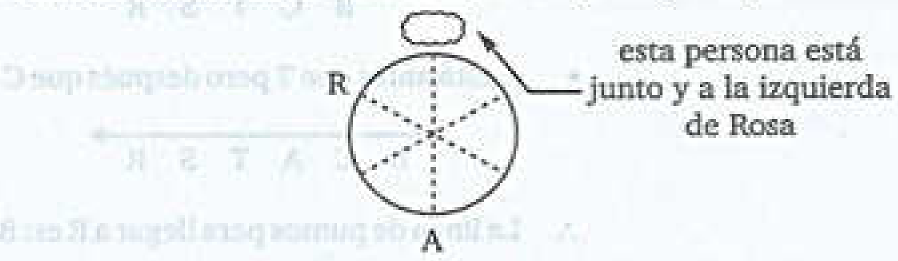
PROBLEMA 6 Alrededor de una mesa circular están sentados 6 amigas distribuidas simétricamente. Si se sabe que:

- Karen se ubica junto a Rosa pero no junto a María.
- Ana se sienta frente a la persona que está junto y a la izquierda de Rosa.
- María está a dos lugares de Ana.
- Inés se ubica a dos lugares a la derecha de Dora.

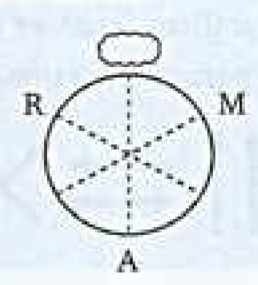
¿Quién se encuentra frente a Ana?

Resolución:

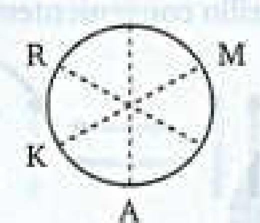
- Ana se sienta frente a la persona que está junto y la izquierda de Rosa.



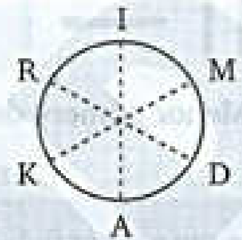
- María está a dos lugares de Ana.



- Karen se ubica junto a Rosa pero no junto a María.

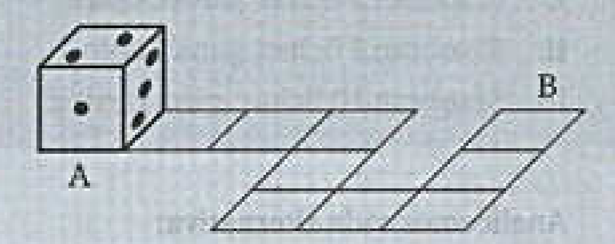


- Inés se ubica dos lugares a la derecha de Dora.



∴ Frente a Ana se encuentra Inés.

PROBLEMA 7 En el gráfico se muestra un dado común. Si el dado rota sobre el tablero cuando llegue al punto B, ¿qué número estará en su cara superior?



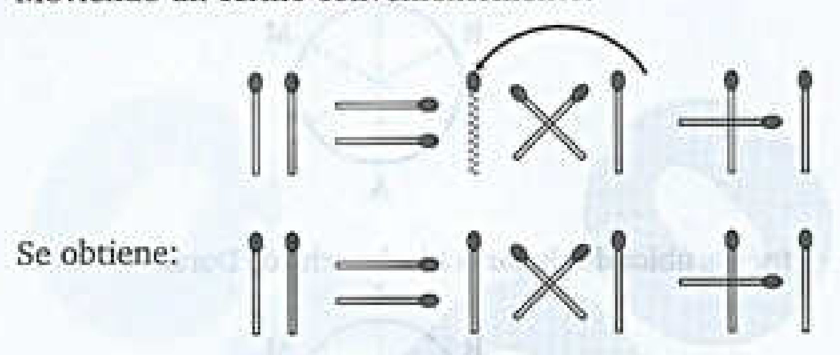
Resolución: Analizando el recorrido del dado tenemos:

A 5 3 2 4 1 3 2 4 6 3 B

Se observa el puntaje número 4

PROBLEMA 8 En el siguiente gráfico, ¿cuál es el menor número de cerillos que se debe cambiar de lugar para obtener una operación correcta?

Resolución: Moviendo un cerillo convenientemente:



Se obtiene:

∴ Menor número de cerillos a mover es igual a uno.

PROBLEMA 9 Dexter y Genio juegan a sacar fichas de una caja, con las siguientes reglas:

- Se puede sacar 1, 2 o 3 fichas en cada turno.
- Pierde el que saca la última ficha.

Si le toca jugar a Dexter y ninguno de los dos se equivoca, ¿qué afirmaciones son ciertas?

I. Si sobran 5 fichas, gana Dexter.

II. Si sobran 8 fichas, gana Genio.

III. Si sobran 10 fichas, gana Dexter.

Resolución: Analicemos cada alternativa:

Si Dexter juega, estará perdido ya que:

* Al sacar la 1, Genio saca la 2, 3 y 4, ganando.
* Al sacar la 1 y 2, Genio saca la 3 y 4, ganando.
* Al sacar la 1, 2 y 3 y Genio saca 4 ganando. → Es Falso.

Si Dexter juega, basta con que saque la 1, 2 y 3 para poner a Genio en el caso anterior, en el que este último quedaría irremediablemente perdido → Falso.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

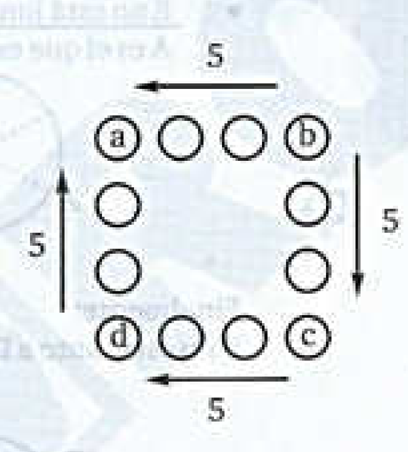
Ya se habrá dado cuenta que el que se quede con 5 fichas tocándole jugar, pierde, por lo cual a Dexter le falta sacar la ficha 1, y luego a cualquier jugada de Genio. Dexter sacará la ficha 5, y como estamos en el caso I, tocándole a Genio, este último perderá. → Verdadero.

∴ Son correctas: Sólo III

PROBLEMA 10 En la figura distribuir los números del 1 al 12 de modo que la suma de los números que se hallan en cada lado del cuadrado sea 22. Dar como respuesta la suma de los números que van en los vértices.

a ○ ○ b
○ ○
○ ○
d ○ ○ c

Resolución:



Los vértices se suman 2 veces:

$a+b+c+d$

$4S = 1+2+3+\ldots+12+(a+b+c+d)$

$4S = \dfrac{12 \times 13}{2} + a+b+c+d$

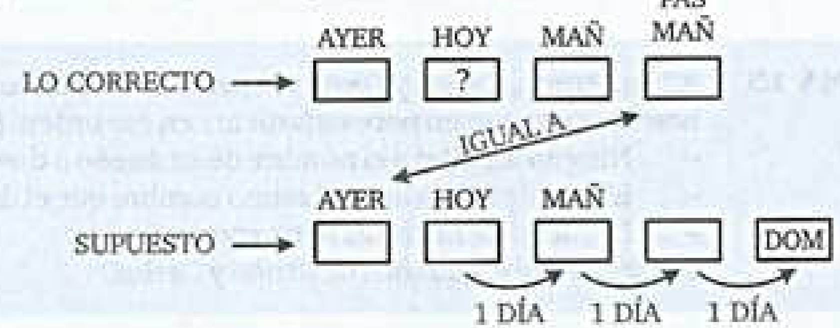
$4S = 78 + a+b+c+d$

$4(22) = 78 + a+b+c+d$

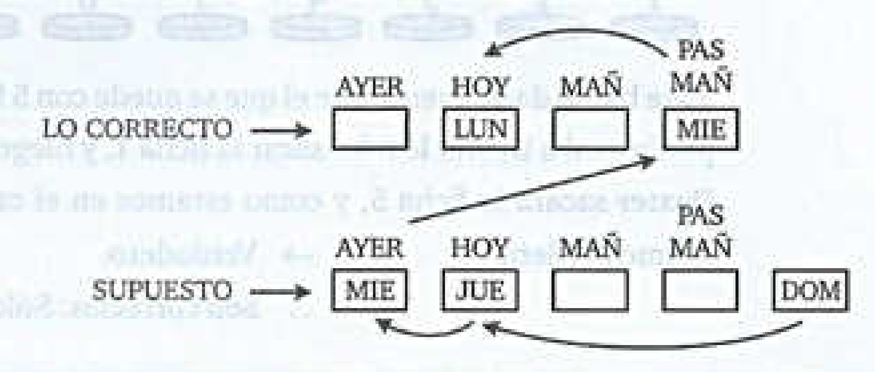
$\therefore \quad a+b+c+d = 10$

PROBLEMA 11 Si ayer hubiese sido lo que será pasado mañana entonces faltarían 3 días para el domingo. ¿Qué día es hoy?

Resolución: De acuerdo al enunciado debemos suponer que el ayer sea igual al pasado mañana y en ese supuesto faltarían 3 días para el domingo.



Ahora partiendo del domingo encontraremos que día es hoy.



∴ Hoy es lunes

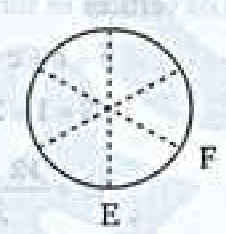
PROBLEMA 12 Seis amigos se ubican simétricamente alrededor de una mesa circular.

- Carlos no está sentado al lado de Emilio ni de Ángel.
- Bruno no está sentado al lado de Daniel ni de Ángel.
- Emilio no está al lado de Bruno ni de Daniel.
- Fredy está junto y a la derecha de Emilio.

¿Quién está 2 lugares a la derecha de Carlos?

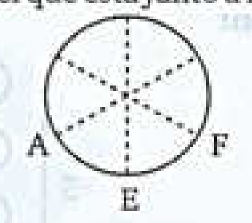
Resolución:

- F está junto y a la derecha de E



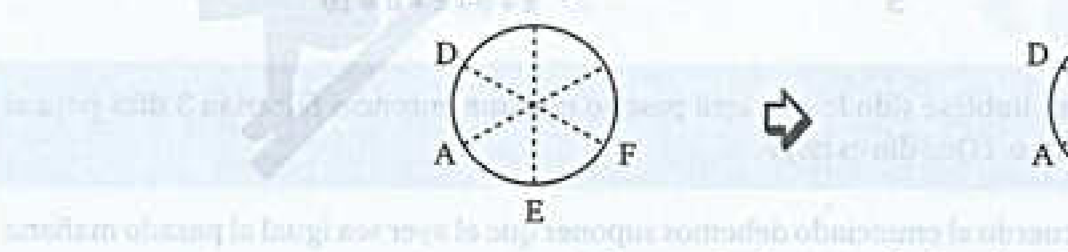
- C no está junto a E
- E no está junto a B ni a D

A es el que está junto a E

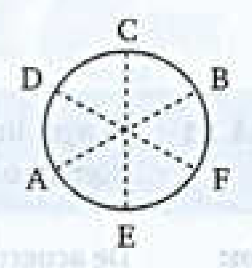


- C no está junto a A
- B no está junto a A

D es el que está junto a A



Finalmente:
B no está junto a D



∴ El que está 2 lugares a la derecha de Carlos es Ángel.

PROBLEMA 13 Alicia, Bruno, Carlos y David tienen cada uno un loro, los cuales tienen los mismos nombres aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

- Ningún loro lleva el nombre de su dueño o dueña.
- El loro de Alicia lleva el mimo nombre que el dueño de Bruno.
- El dueño de Bruno es hermano de Carlos.

¿Quiénes son los dueños de Bruno y Carlos?

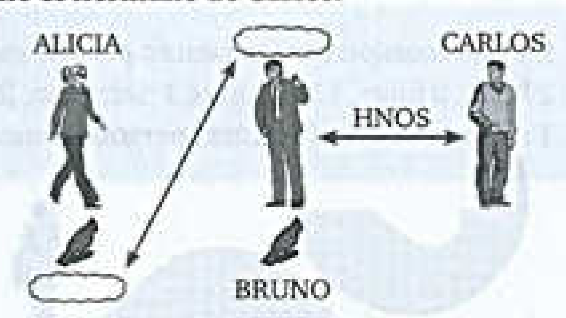
Resolución:

- Ningún loro lleva el nombre de su dueño

LOROS

	ALICIA	BRUNO	CARLOS	DAVID
ALICIA	NO			
BRUNO		NO		
CARLOS			NO	
DAVID				NO

- El loro de Alicia lleva el mismo nombre que el dueño de Bruno.
- El dueño de Bruno es hermano de Carlos.



Conclusión: El loro de Alicia no es Bruno ni Carlos y Carlos no es dueño de Bruno.

LOROS

	ALICIA	BRUNO	CARLOS	DAVID
ALICIA	NO	NO	NO	
BRUNO		NO		
CARLOS		NO	NO	
DAVID				NO

Completamos la tabla:

	ALICIA	BRUNO	CARLOS	DAVID
ALICIA	NO	NO	NO	SI
BRUNO	NO	NO	SI	NO
CARLOS	SI	NO	NO	NO
DAVID	NO	SI	NO	NO

$\therefore$ Los dueños de Bruno y Carlos son: David y Bruno

PROBLEMA 14 Si 1 día después de 2 días antes de 3 días después de 4 días antes de ayer es el pasado mañana del ayer del Domingo, ¿qué día será 6 días después de 4 días antes de 2 días después de mañana?

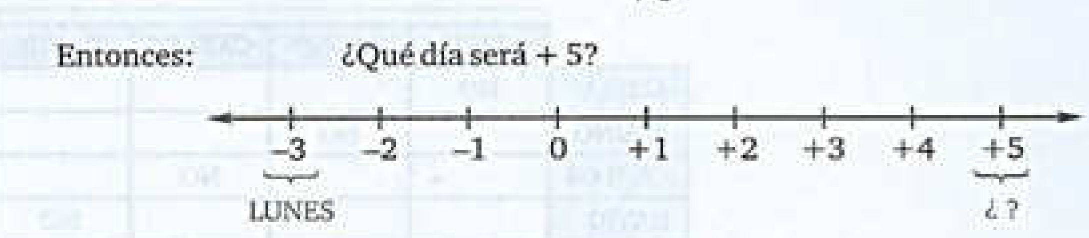
Resolución: Cambiando los tiempos por sus respectivos valores numéricos tendremos:

$$\underbrace{+1-2+3-4-1}_{-3} \text{ es } \underbrace{\underbrace{+2-1}_{+1} \text{ del Domingo}}_{\text{LUNES}}$$

Entonces: -3 fue lunes.

¿Qué día será $\underbrace{+6-4+2+1}_{+5}$?

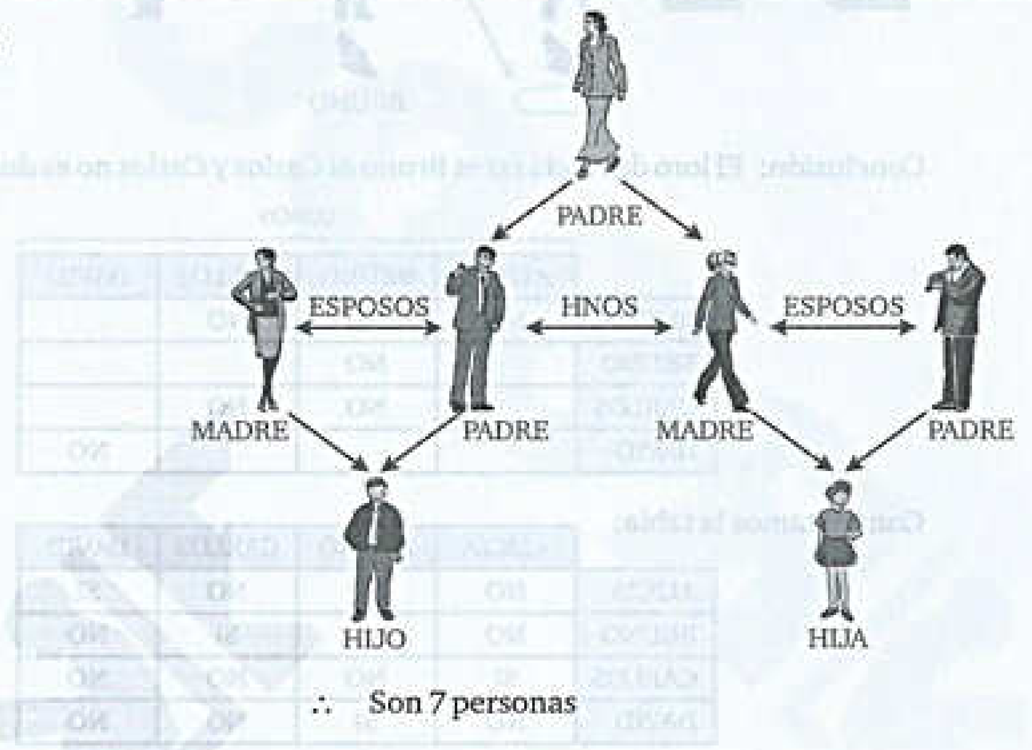
Entonces: ¿Qué día será + 5?



∴ Contando los días: ¿? = Martes

PROBLEMA 15 En una reunión familiar están presentes 2 padres, 3 madres, 2 esposos, 2 esposas, 2 hijos, 2 hijas, 1 hermano, 1 hermana, 2 tíos, 2 tías, 1 sobrino, 1 sobrina, 1 abuela, 1 nieto y 1 nieta. ¿Cuántas personas como mínimo hay en dicha reunión?

Resolución:



∴ Son 7 personas

PROBLEMA 16 De los amigos A, B, C, D y E se sabe que lo siguiente:

– A es más viejo que C y más alto que B
– B es más viejo que A y más bajo que E
– C es más viejo que E y más bajo que D
– D es más joven que A y más bajo que B
– E es más viejo que B y más bajo que A

¿Cuál(es) de los amigos es más joven que E y más alto que D?

Resolución: Establezcamos lo siguiente:

- A es más joven que B → A < B
- A es más viejo que B → A > B
- A es más alto que B → A > B
- A es más bajo que B → A < B

EDAD	ALTURA
– $A < C$	– $A > B$
– $B > A$	– $B < E$
– $C < E$	– $C < D$
– $D < A$	– $D < B$
– $E > B$	– $E < A$
$D < A < B < E < C$	$C < D < B < E < A$
($A < B$: Más jóvenes que E)	($B < E < A$: Más altos que D)

$\therefore$ Los que son más jóvenes que E y más altos que D son A y B.

PROBLEMA 17 Alrededor de una mesa circular se sientan 8 amigos, sus profesiones son: Ingeniero, Profesor, Economista, Farmacéutico, Periodista, Biólogo, Abogado y Arquitecto.
– El Ingeniero está frene al profesor y entre el Economista y el Farmacéutico.
– El Periodista está junto y a la derecha del profesor.
– Frente al Farmacéutico está el Abogado y éste a su vez está junto al Arquitecto.
¿Quién está entre el Biólogo y el Profesor?

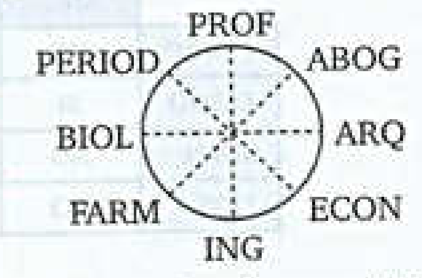
Resolución:

- "El ingeniero está frente al profesor y entre el economista y el farmacéutico"

- "El Periodista está junto y a la derecha del profesor"

- "Frente al farmacéutico está el Abogado y éste a su vez está junto al Arquitecto"
  Esto descarta la primera opción ya que en ella frente al farmacéutico está el periodista.

$\Rightarrow$ Completamos en la segunda opción ubicando al abogado y al biólogo.



$\therefore$ Entre el Biólogo y el Profesor está el Periodista.

PROBLEMA 18 Están en una sala de conferencia un ingeniero, un contador, un abogado y un médico, sus nombres aunque, no necesariamente en ese orden, son: Pedro, Diego, Juan y Luis. Si se sabe que:

- Pedro y el contador no se llevan bien.
- Juan se lleva muy bien con el médico.
- Diego es pariente del abogado y éste es amigo de Luis.
- El ingeniero es muy amigo de Luis y del médico.

¿Quién es el abogado?

Resolución:

	ING	CONT	ABOG	MÉDICO
PEDRO		NO		
DIEGO		NO	NO	
JUAN		NO		NO
LUIS	NO	SI	NO	NO

Repasamos algunos datos:

- Pedro es amigo del contador (Luis)
- El abogado es amigo de Luis
- El ingeniero es amigo de Luis

Pedro no es abogado ni ingeniero

	ING	CONT	ABOG	MÉDICO
PEDRO	NO	NO	NO	
DIEGO		NO	NO	
JUAN		NO		NO
LUIS	NO	SI	NO	NO

Completamos la tabla:

	ING	CONT	ABOG	MÉDICO
PEDRO	NO	NO	NO	SI
DIEGO	SI	NO	NO	NO
JUAN	NO	NO	SI	NO
LUIS	NO	SI	NO	NO

∴ El abogado es Juan

PROBLEMA 19 En el 2016, el día que el matrimonio Carhuancho cumplirá un aniversario más, la esposa recordaba que se casaron el ene – simo día de cierto mes cuyo primer y último día era Domingo y curiosamente "n" es la raíz cúbica de dicho año. ¿En qué fecha cumplieron su aniversario en el 2016?

Resolución: Si el primer día de dicho mes fue Domingo debió pasar 28 días más para que el último día también lo sea.

Se deduce que se casó en Febrero de un año bisiesto.

Asumiendo que se casó en $\overline{19ab}$, siendo $\overline{ab} = \overset{o}{4}$

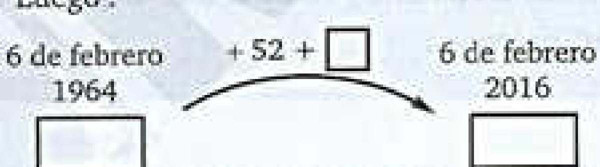
$$n^3 = 1 \times 9 \times a \times b$$

Luego "n" debe ser $\overset{o}{3}$ y $\overset{o}{2}$; siendo la única posibilidad $n = \overset{o}{6}$.

Luego : $a \times b = 24$

3	8	×
4	6	✓ Si cumple
6	4	✓
8	3	×

Luego :



Años Bisiestos:
1965, 1968, 1972, ..., 2012

PROBLEMA 20 Cuatro hermanos tienen deudas entre sí. Juan debe a Mariano S/ 90, Roger debe a Pedro S/ 60, Mariano debe a Roger S/ 40 y Pedro debe a Juan S/ 90. Todas estas deudas quedarían canceladas si. **ADMISIÓN UNMSM 2015 - II**

A) Pedro y Roger pagan a Mariano S/ 30 y S/ 20.

B) Juan paga a Roger S/ 50.

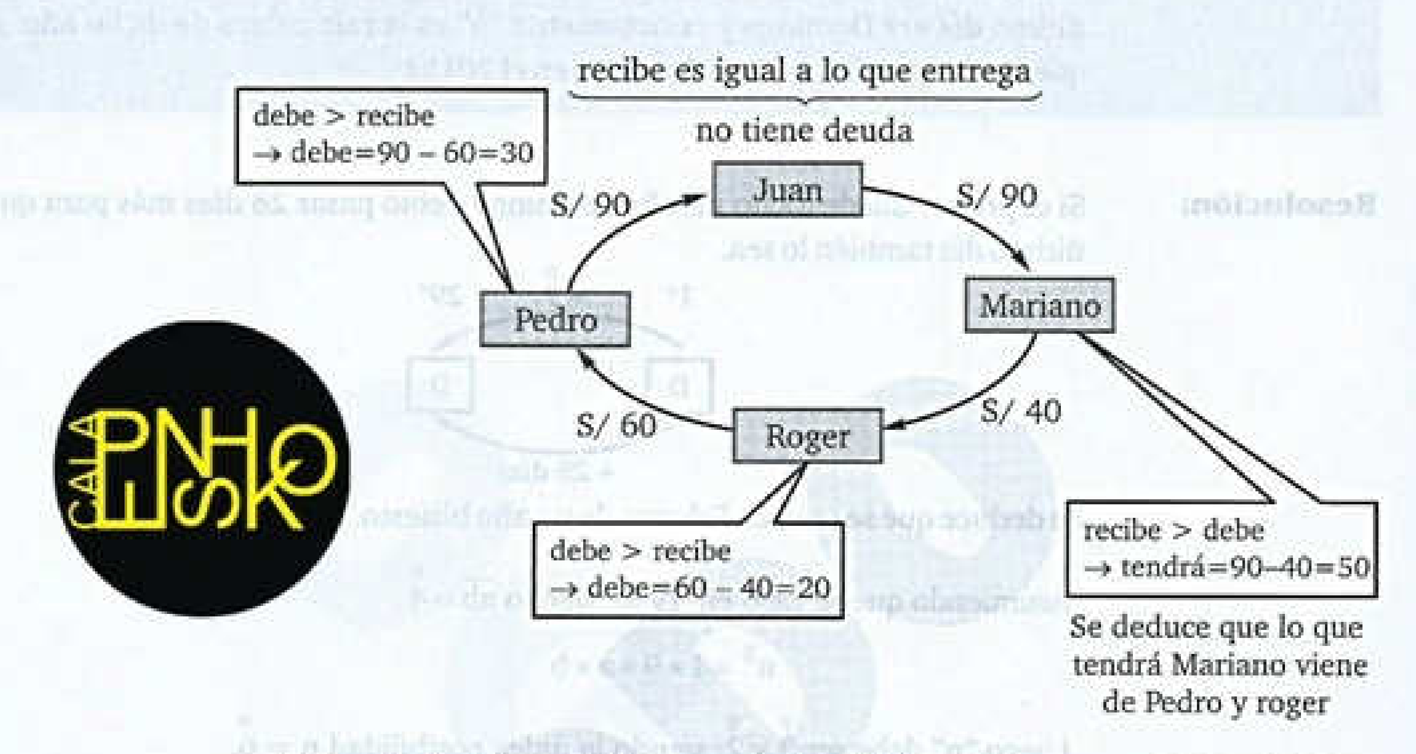
C) Juan paga a Mariano S/ 80.

D) Roger paga a Pedro S/ 30.

E) Pedro y Roger pagan a Mariano S/ 30 y S/ 10.

Resolución: Nos piden obtener la cancelación de deudas.

De los datos, tenemos el siguiente esquema:



∴ Todas las deudas quedarían canceladas si Pedro y Roger pagan S/ 30 y S/ 20 a Mariano.

PROBLEMA 21 Los amigos Luis, Martín, Nelson y Pedro tienen en total S/. 180 y todos tienen un billete de diferente denominación (en soles)- Si Martín le dice al que tiene S/. 50, que Luis es quién tiene más dinero, y Pedro le dice al que tiene S/. 50, que uno de los otros tiene S/. 10, entonces:

Resolución: Los billetes son: S/. 100; S/. 50; S/. 20 y S/. 10.

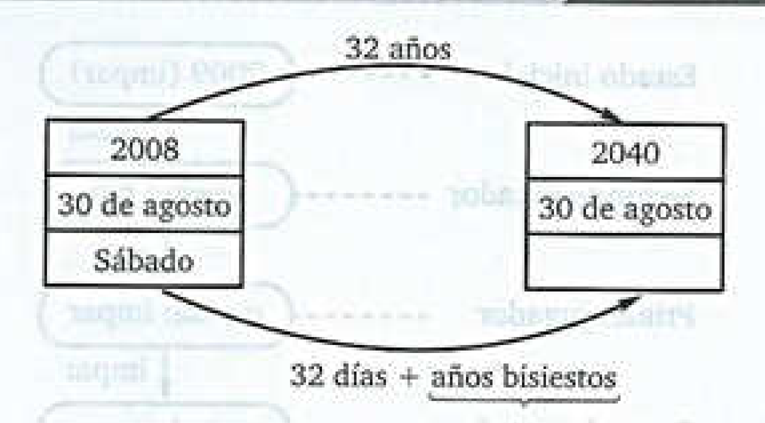
* De lo que dice Martín se deduce que:
  - Martín no tiene S/. 50.
  - Luis tiene S/. 100
* De lo que dice Pedro se deduce que:
  - Pedro no tiene S/. 50 ni S/. 10

Entonces Nelson tiene S/. 50 y Pedro tiene S/. 20

∴ Finalmente Martín tiene S/. 10

PROBLEMA 22 El 30 de agosto del 2008 fue sábado, ¿que día de la semana será el 30 de agosto del 2040?

Resolución:

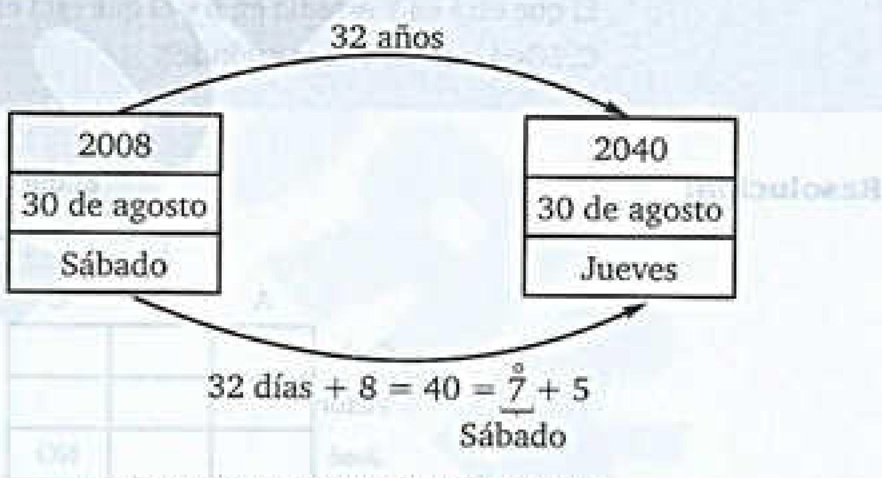


Para saber cuántos años bisiestos hay que considerar, debemos tener cuidado con los años extremos 2008 y 2040.

Para lo cual debemos saber si el 29 de febrero del 2008 está en el intervalo de análisis (30 de agosto del 2008 al 2040) lo mismo para el caso del 29 de febrero del 2040.

De acuerdo a lo anterior el 2008 no se debe considerar y el 2040 si por lo tanto los años bisiestos son: 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, 2032, 2036 y 2040, un total de 8 años.

Por lo tanto



$\therefore$ El 30 de agosto del 2040 es Jueves.

PROBLEMA 23 Hay un montón de 2009 piedras, dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo a las siguientes reglas:

* En cada jugada se puede retirar 4, 3, 7 u 11 piedras del montón.
* Pierde aquel jugador que en su turno retire las últimas piedras del montón.

Determine qué jugador puede ganar y cuántas piedras debe retirar en su primera jugada para asegurarse dicho triunfo luego de analizar y seguir una estrategia.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

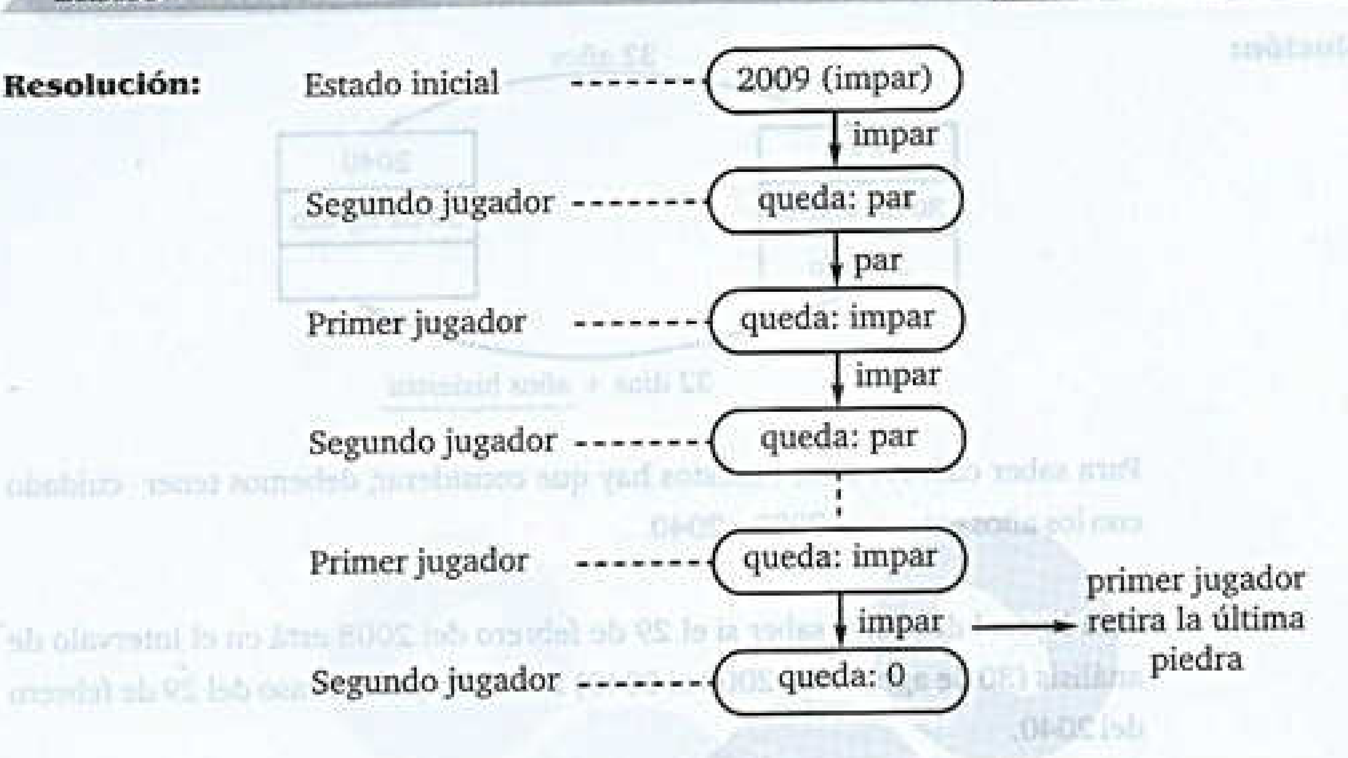
Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

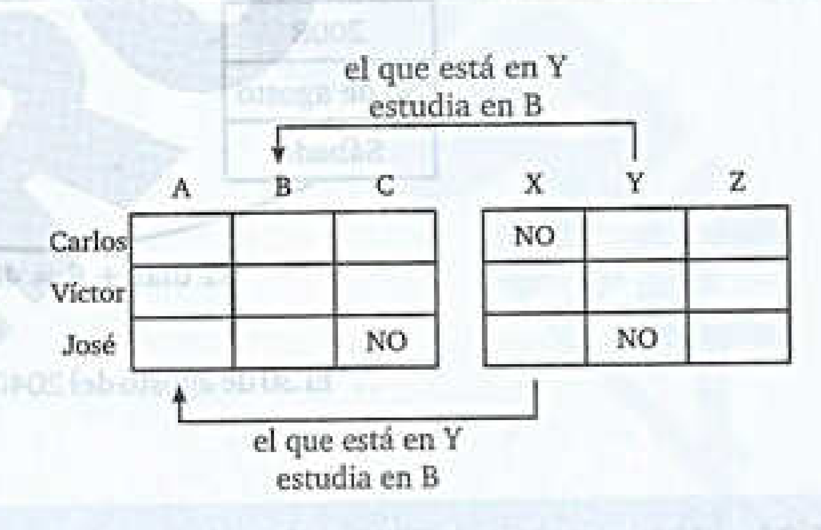
03 de setiembre del 2020

Resolución:



PROBLEMA 24 Carlos, Víctor y José estudian en tres universidades X, Y, Z. Además cada uno de ellos estudia una carrera diferente A, B ó C. Carlos no está en X y José no está en Y. El que está en Y estudia en B y el que está en X no estudia en A. José no estudia en C. ¿Qué estudia Víctor y dónde?

Resolución:



Como José no está en Y no estudia B, entonces José estudia A y si José estudia A no está en X, entonces Víctor está en X.

	A	B	C
Carlos	NO	SI	NO
Víctor	NO	NO	SI
José	SI	NO	NO

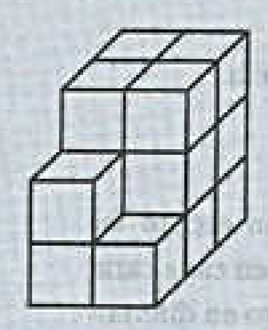
	X	Y	Z
Carlos	NO	SI	NO
Víctor	SI	NO	NO
José	NO	NO	SI

$\therefore$ Víctor estudia C en X

PROBLEMA 25 En la figura, se muestra un sólido formado por 15 cubitos idénticos. Si se pinta toda la superficie del sólido mostrado, ¿cuántos cubitos quedarán solo con tres caras pintadas?

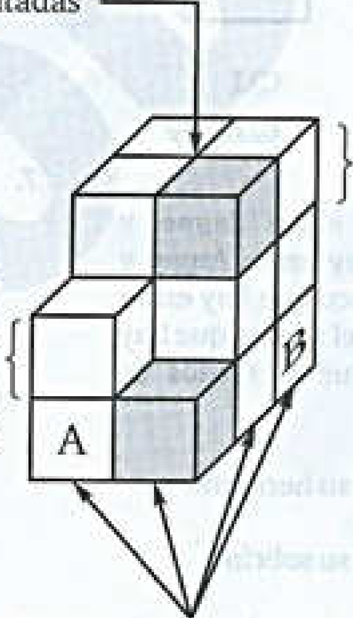
ADMISIÓN UNMSM 2015 - II

A) 7
B) 8
C) 9
D) 6
E) 5



Resolución: Nos piden la cantidad de cubitos que tendrán tres caras pintadas.

Tres caras pintadas



Los 4 cubos de arriba tienen cada uno tiene caras pintadas

+

A, B, C (de la esquina inferior opuesta) son 3 cubos que tienen <u>tres caras pintadas</u>.

Los cubos de este nivel tienen 4, 2 o una cara pintada, pero no hay de tres

Cuatro caras pintadas

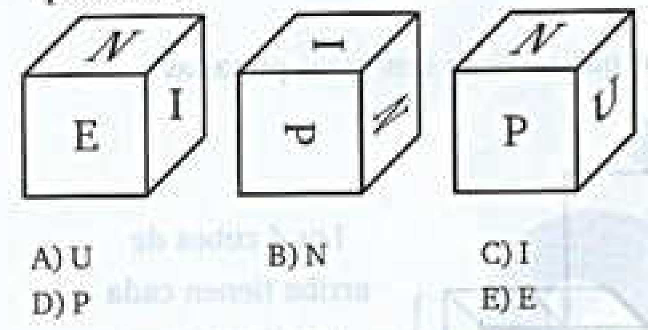
∴ Hay 7 cubitos que cumplen la condición dada.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Qué es de Manuel, la única hermana de la suegra de la esposa del padre del hermano de Manuel?

A) su tía abuela B) su abuela
C) su mamá
D) su bisabuela E) su tía

2. En un hexaedro regular se han escrito las letras E, I, N, P, R y U; una letra en cada cara. Las figuras muestran al hexaedro en diferentes posiciones. ¿Qué letra está en la cara opuesta a R?



A) U B) N C) I
D) P E) E

3. El parentesco que hay entre Jaime y Ángel es el mismo que hay entre Ángel y Carlos, además el parentesco que hay entre Ángel y el hijo de Carlos es el mismo que hay entre Jaime y Carlos. ¿Qué es Carlos de Jaime?

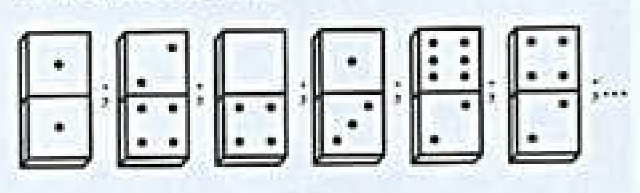
A) es su hijo B) es su hermano
C) es su nieto
D) es su padre E) es su sobrino

4. En una reunión familiar se observa lo siguiente:
- El tío de Marcela es el único hermano de Andrés
- Marcela es hija única
- Brenda es cuñada de César y abuela de Marcos y Ana
- Andrés es suegro de Pedro.

¿Qué es Pedro de Ana y qué es Marcos de Andrés?

A) tío - nieto B) tía – hijo
C) papá - nieto
D) abuelo - hijo E) papá - sobrino

5. Halle la diferencia positiva de puntos de la ficha que continua.

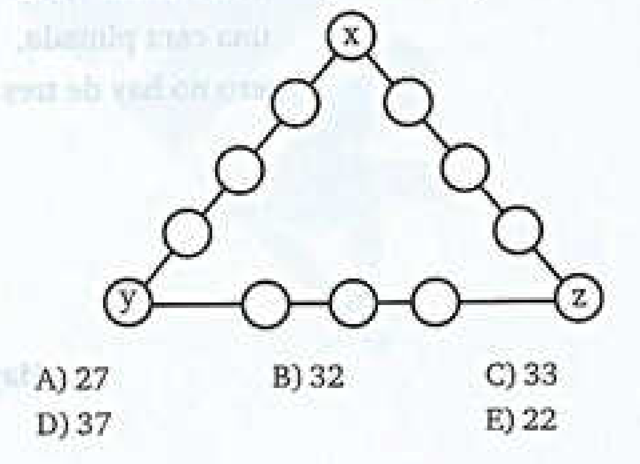


A) 2 B) 4 C) 6
D) 3 E) 5

6. En una reunión familiar se observa que están presentes: 1 abuelo, 3 padres, 2 hijos, 1 hija, 2 hermanos, 2 tíos, 1 sobrino, 1 sobrina, 1 tío abuelo y 1 nieto. ¿Cuántas personas como mínimo hay en dicha reunión?

A) 5 B) 7 C) 9
D) 11 E) 13

7. En la siguiente figura se van a colocar los números del 1 al 12, de tal forma que la suma por cada lado debe ser la misma y la máxima posible. Dar como respuesta: x + y + z.



A) 27 B) 32 C) 33
D) 37 E) 22

8. En una reunión familiar se observa: 1 abuelo, 1 abuela, 3 padres, 3 madres, 1 suegro, 1 suegra, 3 esposos, 3 esposas, 1 yerno, 1 nuera, 2 hijos, 2 hijas, 1 hermano, 1 hermana, 1 nieto y 1 nieta. ¿Cuántas personas como mínimo están presentes en dicha reunión?

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

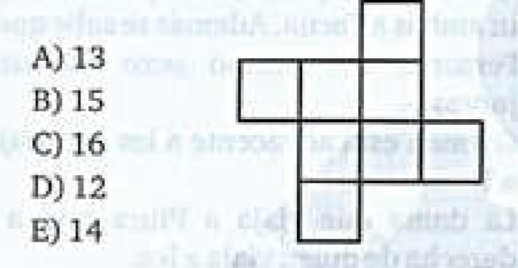
9. Si el anteayer del mañana de pasado mañana es viernes, ¿qué día fue el mañana del pasado mañana de ayer?

A) martes B) miércoles
C) jueves
D) viernes E) sábado

10. El ayer del ayer del anteayer de mañana es domingo. ¿Qué día será 3 días después del mañana de hace 2 días?

A) lunes B) martes
C) miércoles
D) jueves E) viernes

11. Ubica los números 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 en las casillas, sin repetir, de manera que en cada aspa de molino la suma sea la misma. Entonces la suma mínima será:



A) 13
B) 15
C) 16
D) 12
E) 14

12. Si 1 día después de 2 días antes de 3 días después de 4 días antes y así sucesivamente hasta 9 días después de 10 días antes de hoy es martes, ¿qué día será 10 días después de 9 días antes de 8 días después de 7 días antes y así sucesivamente hasta 2 días después de 1 día antes de hoy?

A) jueves B) viernes C) sábado
D) domingo E) lunes

13. Si el ayer del pasado mañana del mañana del ayer del mañana de hace 3 días es el pasado mañana del ayer del sábado, ¿qué día será el mañana del anteayer del ayer de pasado mañana?

A) lunes B) martes C) jueves
D) viernes E) sábado

14. Si lunes es el martes del miércoles, y el jueves es el viernes del sábado. ¿Qué día es el domingo del lunes?

A) sábado B) lunes C) martes
D) miércoles E)viernes

15. En una carrera participaron 7 atletas, se sabe que se dieron los siguientes resultados:

- Fernando no llegó en tercer lugar
- Hugo llegó inmediatamente después de Tomás
- César llegó en cuarto lugar, 3 lugares después de Mario
- Nicolás no llegó después de César
- Bruno llegó al último
- No hubo empates

¿Quién llegó en quinto lugar?

A) Fernando B) César C) Tomás
D) Hugo E) Nicolás

16. Si mañana fuese lo que fue hace 3 días, entonces faltarían 5 días para el sábado. ¿Qué día es hoy?

A) lunes B) domingo C) sábado
D) viernes E) jueves

17. Cinco autos fueron numerados del 1 al 5, en una carrera. Si:

- El auto 1 llegó en tercer lugar.
- La diferencia en la numeración de los últimos autos en llegar es igual a 3.
- La numeración de ningún auto coincidió con su orden de llegada.

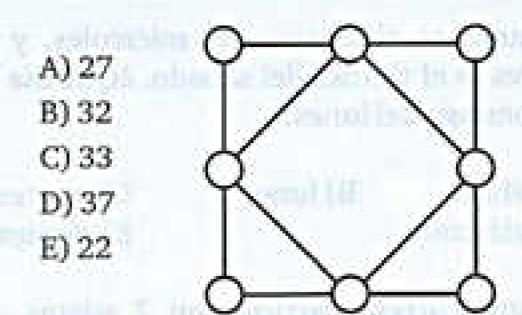
Luego, se puede afirmar que:

I. El auto 2 llego último.
II. El auto 3 ganó la carrera.
III. El auto 4 llegó después del auto 2.

A) sólo I B) I y II C) I y III
D) II y III E) Todas

18. Coloque las cifras del 1 al 8 en los círculos de los dos cuadrados para que los tres vértices de los triángulos pequeños sumen lo mismo. ¿Cuál es esa suma, si es la menor posible?

A) 27
B) 32
C) 33
D) 37
E) 22



19. Cinco Amigos A, B, C, D y E se sientan en una misma fila de 6 butacas juntas de un cine. Si sabemos que:

- B no se sienta junto a D, pero hay una persona sentada en cada uno de sus lados.
- C se sienta en uno de los extremos de la fila.
- C se sienta 3 butacas a la izquierda de B.
- Hay 2 butacas entre A y la butaca vacía.

¿Qué asiento a partir del asiento de E está vacío?

A) primero B) segundo C) tercero
D) cuarto E) sexto

20. ¿Cuántos cerillos como mínimo se debe mover para obtener una figura de 4 u^2 de área. Sabiendo que cada cerillo mide una unidad?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

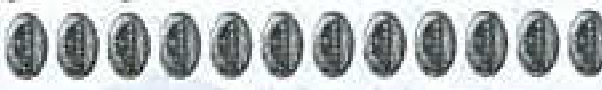
21. De 4 amigas se sabe lo siguiente:

- Carla es mayor que Ana.
- Diana es mayor que Betty.
- La menor de ellas estudia derecho.
- Betty estudia medicina.
- La que estudia turismo es solamente menor que la que estudia educación.
- Carla no estudia educación.

¿Qué estudian Carla y Diana?

A) derecho y educación
B) derecho y turismo
C) turismo y derecho
D) turismo y educación
E) derecho y medicina

22. Su turno debe retirar una, dos o tres monedas de modo que pierde el jugador que retira la última moneda. Si Rodo inicia, ¿Cuántas monedas debe retirar en su primera jugada para asegurar su triunfo?



A) 1
B) 2
C) 3
D) Cualquier cantidad
E) Alexis siempre gana

23. En el aeropuerto se observa a Ángel, Bruno, Carmen, David y Elena, sentados juntos en una misma fila. Todos viajan a lugares diferentes a excepción de 2 personas que viajan ambas a Tacna. Además se sabe que:

- Personas del mismo sexo no están juntas.
- Carmen está adyacente a los que viajan a Tacna
- La dama que viaja a Piura está a la derecha de quien viaja a Ica.
- La dama que viaja a Huancayo está a la izquierda de Ángel y junto a David, quien a su vez está junto y a la izquierda de la dama que viaja a Piura.

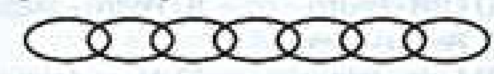
¿Adónde viajan Bruno y Elena?

A) Ica Piura B) Ica Huancayo
C) Tacna Huancayo
D) Tacna Piura E) Ica Tacna

24. Estos tres regalos está colocados en el orden correcto, pero en la estantería errónea. Se les debe mover a la estantería de arriba del todo, sin colocar un regalo de mayor peso encima de otro de menor peso. Si un movimiento consiste en trasladar un regalo de una estantería a otra, ¿en cuántos movimientos, como mínimo, se puede hacer todo el traslado?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

25. El profesor Ronald tiene una cadena de oro de 7 eslabones (ver figura) promete a su enamorada darle un eslabón cada día. ¿Cuántos eslabones como mínimo tendrá que abrir Ronald para cumplir lo prometido? (no puede dar por adelantado)



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

26. Tres chicos: Alejandro, Benito y Carlos; y tres chicas: Susana, Isabel y Pilar están sentados alrededor de una mesa, se puede observar que:

- Alejandro está frente a una chica y ésta tiene a una chica junto y a su derecha.
- Benito no está al lado de Alejandro.
- Susana está entre dos chicos.
- Pilar no está frente a Susana.

¿Quién está junto y a la derecha de Carlos?

A) Isabel B) Pilar C) Susana
D) Alejandro E) Benito

27. Tres varones A, B y C; y tres mujeres D, E y F se sientan simétricamente alrededor de una mesa circular, de modo que dos personas del mismo sexo no se sientan juntas. Entonces, se puede afirmar que:

I. A no se sienta frente a E.
II. C no se sienta frente a B.
III. F no se sienta frente a D.

A) I B) II C) III
D) I y III E) II y III

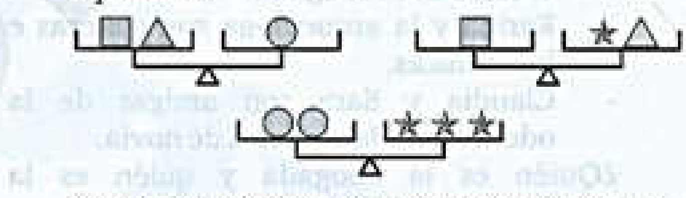
28. Ricardo, Alberto, Guillermo, Carlos, Eduardo y Mario se sentaron simétricamente alrededor de una mesa. Las profesiones de estos eran: médico, psicólogo, ingeniero, sociólogo, profesor y abogado.

- El profesor que tenía discrepancias con Carlos se sentó frente a Ricardo
- El médico se sentó frente a Alberto
- Alberto se sentó entre el sociólogo y el profesor
- Mario que se lleva bien con todos se sentó a la izquierda del ingeniero y frente al abogado
- El ingeniero se sentó frente a Eduardo, junto al médico y a la izquierda del profesor

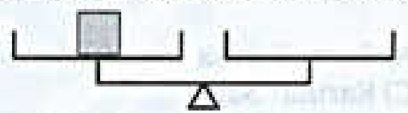
¿Quién tenía discrepancias con Carlos?

A) Guillermo B) Ricardo C) Alberto
D) Eduardo E) Mario

29. Si se sabe que las siguientes barras estan en equilibrio



Selecciona la opción que equilibra la balanza



A) ΔΔ B) ΔΔΔ C) ΔΔΔΔ
D) ΔΔΔΔΔ E) ΔΔΔΔΔΔ

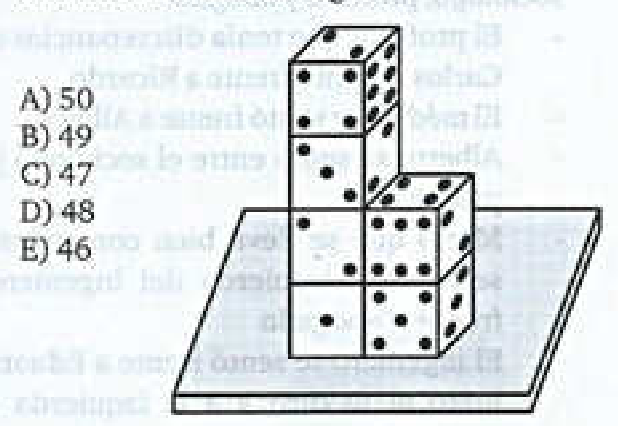
30. Un estudiante, un médico un ingeniero y un abogado practican, cada uno, un deporte diferente.

- Yo juego tenis le dice el médico a Ángel.
- Bruno practica natación.
- El abogado acompaña a David cuando éste juega fútbol.
- El estudiante juega básquet.

¿Cómo se llama el estudiante y qué deporte practica?

A) Ángel - natación B) Bruno - natación
C) Bruno - tenis
D) Claudio - fútbol E) Ángel - basquet

31. En la figura, se muestra una torre formada por seis dados normales e idénticos sobre un pedazo de madera no transparente. ¿Cuál es la suma mínima de los puntos de todas las caras no visibles de la figura?



A) 50
B) 49
C) 47
D) 48
E) 46

32. Se sabe que las profesiones de Ana, Claudia, Karina y Sara son: arqueóloga, abogada, odontóloga y profesora, aunque no necesariamente en ese orden. Si se sabe:

- Ana está casada con el hermano de la abogada.
- Claudia y la profesora van a trabajar en el carro de la abogada.
- Karina y la arqueóloga son solteras e hijas únicas.
- Claudia y Sara son amigas de la odontóloga, la cual está de novia.

¿Quién es la abogada y quién es la profesora?

A) Sara - Karina B) Sara - Claudia
C) Karina - Sara
D) Sara - Ana E) Ana – Claudia

33. Cinco personas fueron invitadas a una fiesta de disfraces donde ocurría lo siguiente:

- José no se habla con los que estaban disfrazados de esclavo y de virrey
- Andrés fue disfrazado de Inca
- Pedro odia a los españoles
- Luis fue disfrazado de esclavo y se encuentra conversando con el que fue disfrazado de emperador romano
- Una de las personas fue disfrazada de pirata

¿De qué se disfrazó Pedro?

A) inca B) virrey
C) emperador romano
D) esclavo E) pirata

34. Hay cuatro amigos, cada uno con una determinada afición a un juego (sapo, ajedrez, dominó, damas), a tener mascota (loro, gallo, perro, canario) y a la lectura (poesía, novela, ciencia-ficción, comics)

- Pedro lee poesía
- El que juega sapo tiene loro
- Luis no tiene el canario
- El que lee novelas juega ajedrez
- Alex juega dominó
- El que lee ciencia-ficción tiene el perro
- Jaime no juega ajedrez
- El que juega damas lee comics

¿Quién es el dueño del gallo y quién del canario?

A) Luis - Pedro B) Pedro - Jaime
C) Pedro - Alex
D) Luis - Jaime E) Alex - Jaime

35. Armando, Benito, Carlos y Daniel tienen diferentes oficios: pintor, gasfitero, mecánico y carpintero; y usan uniforme crema, rojo, azul y verde, se sabe que:

- El pintor derrotó a Benito en ajedrez
- Carlos y el mecánico juegan a menudo fútbol con los hombres de rojo y azul.
- Armando y el carpintero son vecinos del hombre de uniforme azul.
- El gasfitero usa uniforme crema.

¿Qué oficio tiene Armando? y ¿De qué color es el uniforme de Benito?

A) mecánico verde B) mecánico rojo
C) gasfitero crema
D) carpintero rojo E) pintor azul

36. Sobre los lugares de nacimiento de tres parejas de esposos se sabe que:

- Dos personas nacieron en Ica, dos nacieron en Lima y dos nacieron en Tacna.
- No hay 2 varones del mismo lugar.
- Luis es iqueño y la esposa de José es tacneña.
- No hay pareja de esposos del mismo lugar.

¿Dónde nacieron Pedro y la esposa de Luis?

A) Tacna - Lima B) Lima - Ica
C) Ica - Lima
D) Lima - Tacna E) Tacna - Lima

37. Cuatro personas: Pérez, López, Martínez y Fernández viven en calles diferentes: A, B, C, y D, en departamentos con diferentes números de habitaciones: 2, 3, 4 y 5, y ubicados en pisos diferentes: 3°, 4°, 5° y 6°. Además se sabe que:

- El departamento del 3er. Piso tiene una habitación más que el de la calle A y dos más que el de Pérez.
- López vive en un departamento de la Calle B el cual es más grande que el del 6° piso y que el de la calle C.
- Martínez vive en un departamento de 3 habitaciones pero no es el de la calle C, y ninguno de estos dos está en el 5° piso.
- Fernández no vive en el departamento del 4° piso, porque éste es el de la calle D y es menor que el de Fernández.

¿En qué pisos viven López y Fernández?

A) 5to y 3ro B) 4to y 3ro C) 5to y 2do
D) 4to y 6to E) 2do y 3ro

38. En un pueblo en el cual sólo viven 6 parejas de esposos, se conoce que

- Diana, Manuel y Óscar son hermanos.
- Fernanda es hija única.
- Ignacio se casó con la hermana de Lucía y ésta, con el hermano de él.
- Óscar no es el esposo de Claudia.
- Alicia, Lucía y Elisa son hermanas.
- Pablo es cuñado de Fernanda y de Óscar.
- Elisa es cuñada de Óscar.
- Claudia, Ignacio y Nicolás son hermanos.
- El otro habitante es Sebastián.

Halle uno de los seis matrimonios.

A) Ignacio Elisa
B) Ignacio Alicia
C) Óscar Fernanda
D) Sebastián Claudia
E) Óscar Claudia

39. Un vendedor de abarrotes sólo tiene 2 pesas, una de 2Kg y otra de 5Kg y una balanza de 2 platillos. Si un cliente le pide un kilogramo de arroz, ¿ cuántas pesadas como mínimo debe realizar el vendedor, utilizando siempre las 2 pesas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

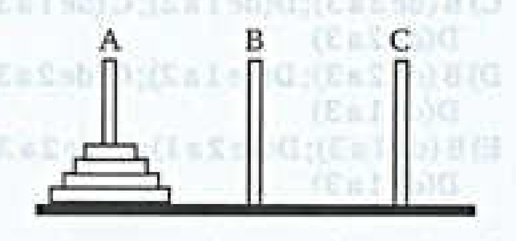
40. Un explorador debe hacer un viaje de 6 días a través del desierto para lo cual contrata cargadores. El explorador y los cargadores pueden llevar, cada uno, alimentos y bebida sólo para 4 días. Si nadie se quedó por el camino, ¿cuántos cargadores contrató el explorador como mínimo?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

41. Hay cuatro botes en una de las orillas del río; sus nombres son Ocho, Cuatro, Dos y Uno, porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno de ellos en cruzar el río. Se puede atar un bote a otro, pero no más de uno, y entonces el tiempo que tardan en cruzar es igual al del más lento de los dos botes. Un solo marinero debe llevar todos los botes a la otra orilla. ¿Cuál es la menor cantidad de tiempo que necesita para completar el traslado?

A) 14 hr B) 15 hr C) 16 hr
D) 17 hr E) 18 hr

42. En la figura, en el poste A hay 4 discos de madera de diferente tamaño, el más grande en la parte inferior y hacia arriba en orden decreciente. Trasladando los discos de uno en uno se deben pasar los 4 discos hacia el poste C y colocarlos en el mismo orden, pudiendo colocar los discos de manera momentánea en el poste B. ¿Cuántos traslados como mínimo se deben realizar, si un disco grande no puede ser colocado sobre uno pequeño?



A) 7 B) 9 C) 15
D) 16 E) 13

43. A, B, C y D participaron en una competencia de natación.
¿Quién ganó? - le preguntó alguien.
– A dijo: C fue el primero y B fue el segundo.
– B dijo: C fue el segundo y D fue el primero.
– C dijo: D fue el último y A fue el segundo.
Si de las dos afirmaciones que dio cada uno, una es verdadera y la otra es falsa, ¿cuál es el orden de llegada?

A) CADB B) CABD C) ABCD
D) ACDB E) DCBA

44. Tatiana va al mercado y por un plátano paga 21 céntimos, por una tuna 12 céntimos y por una sandía 18 céntimos. ¿Cuánto gastará al comprar un mamey, un melocotón y una naranja?

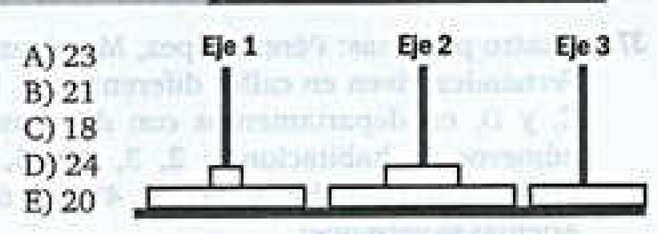
A) 66 céntimos B) 60 céntimos
C) 69 céntimos
D) 63 céntimos E) 72 céntimos

45. Se tiene una torre con cuatro discos (A, B, C y D) y tres ejes (1, 2 y 3)

Se desea trasladar los cuatro discos, del eje 1 al eje 3 con el mínimo de movimientos. Sabiendo que se puede mover un disco a la vez y nunca un disco de mayor diámetro puede estar sobre otro de menor diámetro, indique la alternativa que consigna los cuatro últimos movimientos (puede emplear el eje 2)

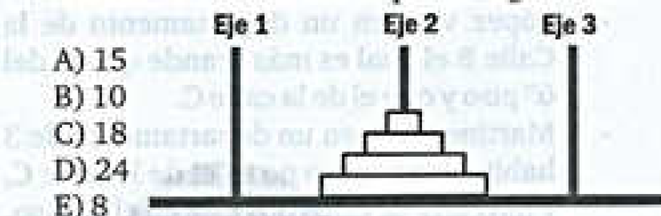
A) B (de 1 a 3); D(de 2 a 1); C (de 3 a 1); D(de 1 a 3)
B) B (de 1 a 3); D(de 2 a 1); C (de 1 a 3); D(de 2 a 3)
C) B (de 2 a 3); D(de 1 a 2); C (de 1 a 3); D(de 2 a 3)
D) B (de 2 a 3); D(de 1 a 2); C (de 2 a 3); D(de 1 a 3)
E) B (de 1 a 3); D(de 2 a 1); C (de 2 a 3); D(de 1 a 3)

46. Con las reglas anteriores, se desea colocar todos los discos en el eje 3. ¿En cuántos movimientos como mínimo se puede lograr esto?



A) 23
B) 21
C) 18
D) 24
E) 20

47. Con las reglas anteriores, se desea colocar todos los discos en el eje 3. ¿En cuántos movimientos como mínimo se puede lograr esto?



A) 15
B) 10
C) 18
D) 24
E) 8

48. Estás dentro de un círculo de siete velas encendidas. Pero las velas son mágicas, porque, cuando tocas una vela cambian de estado ella y sus dos adyacentes (si están encendidas se apagan y si están apagadas se encienden). ¿Cuántas veces como mínimo se deben tocar las velas para conseguir que todas las velas estén apagadas?

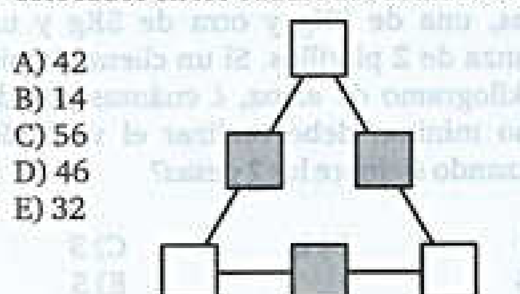
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

49. Se tienen 8 tarjetas numeradas del 1 al 8. Ordene las tarjetas de tal modo que para cada par de tarjetas consecutivas la diferencia entre sus números (el mayor menos el menor) sea siempre mayor que 3. ¿Cuál es la suma de los números de la primera y la segunda tarjeta?

A) 7 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

50. En la figura siguiente, se debe escribir en cada cuadrado, los números 1, 2, 4, 8, 16 y 32, sin repetirlos, tal que el producto de los números sobre cada lado del triángulo sea el mismo y además el mínimo posible.
Dé por respuesta la suma de los números colocados en los cuadrados sombreados

A) 42
B) 14
C) 56
D) 46
E) 32



A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

03 de setiembre del 2020

Verdades y Mentiras - Implicancias

CAPACIDADES

- Incentivar el desarrollo creativo y lógico.
- Desarrollar la capacidad de interrelación de premisas.
- Mejorar nuestra capacidad analítica.
- Mostrar la importancia de los fundamentos lógicos en la matemática.

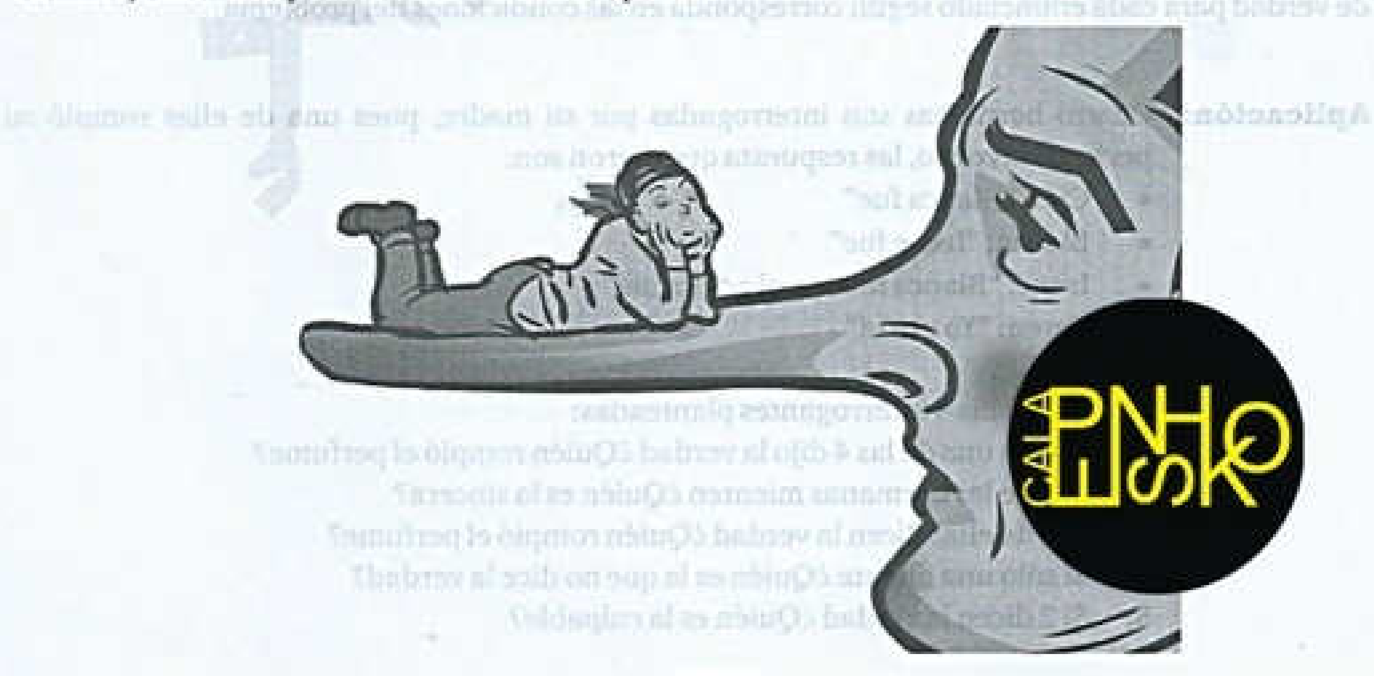
La psiquiatría definió al hábito de mentir constantemente como mitomanía. Se trata de una tendencia del carácter o constitutiva de la persona – niño o adulto – a mentir, a crear fábulas inventadas o a simular.

El mitómano encuentra que todos los medios son buenos para tergiversar la realidad: las mentiras, fábulas, las fabulaciones y hasta simula enfermedades mentales y/o físicas. Puede clasificarse en mitomanía vanidosa y mitomanía perversa.

- La mitomanía vanidosa se caracteriza está caracterizada básicamente por fanfarronadas; proezas atléticas, actos de adoración, éxitos amorosos, salvatajes heroicos, fortunas hábilmente ganadas, etc.
- La mitomanía perversa se caracteriza por una agresividad y necesidad de dañar al otro. Toma formas diversas: difamación, denuncias, falsas acusaciones, falsos atentados, cartas anónimas. Es de notar que son mitómanos mucho más peligrosos cuando son "buenos actores" y logran convencer fácilmente a quienes lo escuchan.

Lo que busca una persona mitómana es siempre obtener algún provecho, las invenciones son un truco con un fin. En en general un individuo inestable, sugestionable y particularmente teatral. Aunque al comienzo la simulación a la mentira son un hecho consciente, luego se verá a sí mismo como parte de su juego.

Dicho en otras palabras: acaba creyéndose sus propias mentiras. Sin embargo la caída en su propia falsedad es una convicción frágil y por lo tanto siempre reversible. Con ayuda de especialistas se puede salir de esto, con voluntad y un cambio profundo en la manera de pensar.



INTRODUCCIÓN

Para un buen entendimiento de las matemáticas y por ende un buen desenvolvimiento en la comprensión de nuestro entorno es necesario el desarrollo y potenciamiento de conceptos lógicos.

.... ¿Cómo entender las imágenes caprichosas que se ven en la pantalla de las computadoras?

.... ¿Como entender el comportamiento de plusvalía, del tiempo – sociedad?

- ¡Si el pueblo me elige, entonces cambiaré para mejor la situación de los pobres! ... ¿Cómo comprender?
- A y B conformaran el equipo de negociaciones a menos que el presidente no interfiera en los fundamentos técnicos. etc. etc.

En el presente capítulo desarrollaremos los siguientes temas:

- Verdades y mentiras
- Implicancias lógicas

VERDADES Y MENTIRAS

En éste tema hay 2 criterios muy interesantes para su enfoque y desarrollo.

- **Principio de Contradicción (FASE 1):**

El primero es buscar 2 premisas (datos) que se contradigan entre sí y partiendo de ellos asumir o suponer las veracidades correspondientes asumiendo que sólo uno fue el asesino:

Pedro dice: Juan es el culpable
Juan dice: Pedro es el culpable

Estas 2 premisas se contradicen es decir las 2 no pueden ser verdades o mentiras. Pedro (dice la verdad) Juan (miente) o Pedro (miente) Juan (dice la verdad). Y se prosigue en el análisis.

- **Principio de Suposición (FASE 2):**

El segundo criterio, es de suponer en todo el problema quién fue el culpable e ir colocando el valor de verdad para cada enunciado según corresponda en las condiciones del problema.

Aplicación: Cuatro hermanas son interrogadas por su madre, pues una de ellas rompió su perfume favorito, las respuesta que dieron son:

- Cira: "Blanca fue"
- Blanca: "Irene fue"
- Irene: "Blanca miente al acusarme"
- Karen: "Yo no fui"

Responder las 4 interrogantes planteadas:

1. Si sólo una de las 4 dijo la verdad ¿Quién rompió el perfume?
2. Si 3 de las hermanas mienten ¿Quién es la sincera?
3. Si 3 de ellas dicen la verdad ¿Quién rompió el perfume?
4. Si sólo una miente ¿Quién es la que no dice la verdad?
5. Si 2 dicen la verdad ¿Quién es la culpable?

Resolución:

La posible culpable

	$\overline{C}$	$\dot{B}$	$\dot{I}$	$\dddot{K}$
$\overline{\text{Cira}}$	F	V	F	F
Blanca	F	F	V	F
Irene	V	V	F	V
Karen	V	V	V	F

1. Se observa que para responder 1 la columna (k) tiene sus condiciones.
   Rpta: Rompió Karen

2. Analizando la columna (k)
   Rpta: Irene

3. Analizando la columna (B)
   Rpta: Blanca

4. Analizando la columna (B)
   Rpta: Blanca

5. Hay 2 posibilidades, columna (C) y columna (I)
   Rpta: Cira o Irene

IMPLICANCIAS LÓGICAS

En este tema se analizará principalmente la condicional (→), bicondicional (↔) y otras formas lógicas de conectividad.

- A integra el equipo, si B está en el equipo.
  $B \rightarrow A$
- Si M es seleccionado, Q debe ser seleccionado.
  $M \rightarrow Q$
- R debe ser seleccionado, si N es seleccionado.
  $N \rightarrow R$
- R es seleccionado, sólo si N es seleccionado.
  $N \rightarrow R$
- Sólo si r es seleccionado, N es seleccionado.
  $R \rightarrow N$
- A y B no deben ser ambos seleccionados.
  A ó B pero no los dos
- A es seleccionado si y sólo si B es seleccionado.
  $A \leftrightarrow B$

¡Importante!
Considerar que una condicional (→) se lee de izquierda a derecha, si se afirma el antecedente se afirma el consecuente pero no lo contrario.

ESTRUCTURA LÓGICA EQUIVALENTE DE A → B:

~ B → ~ A

Aplicación: Wanda, Paty, Gaby y Tania son las encargadas de llevar provisiones para la excursión de la universidad. Cada una llevará algo diferente: Sandwiches, gaseosas, frutas y el botiquín, bajo las siguientes condiciones:

- Si Tania no lleva la fruta, Wanda llevará los sandwiches.
- Si Wanda lleva las gaseosas entonces Gaby lleva los sandwiches.
- O Paty o Tania llevan la fruta.
- Gaby lleva los sandwiches si y solo sí Tania lleva la fruta.

1. Si Wanda lleva las gaseosas ¿Qué artículos llevarán Gaby, Paty y Tania respectivamente?

2. Si Paty no lleva las frutas al paseo, entonces es posible que:
   I. Gaby lleve los sandwiches.
   II. Paty lleve el botiquín.
   III. Wanda lleve los sandwiches.

3. Si Paty lleva la fruta, entonces es posible que:
   I. Tania lleva gaseosas.
   II. Wanda lleve el botiquín.
   III. Gaby lleve los sandwiches.

Resolución: Planteamos las condiciones:

$$\underset{\sim F}{T} \rightarrow \underset{S}{W} \quad ; \quad \underset{\sim S}{W} \rightarrow \underset{F}{T} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$\underset{G}{W} \rightarrow \underset{S}{G} \quad ; \quad \underset{\sim S}{G} \rightarrow \underset{\sim G}{W} \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

De P y T uno de los 2 lleva la fruta .... (θ)

$$\underset{S}{G} \leftrightarrow \underset{F}{T} \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

1.

W	P	G	T
G	B	S	F
(β)			

2.

W	P	G	T
G	B	S	F
B	G		
	~F		
	↓		↓
	(θ)		(γ)

3.

W	P	G	T
S	F	B	G
		G	B
			~F
			↓
			(α)

Rpta: Gaby: sandwiches
Paty: botiquín
Tania: fruta

I. (V)
II. (F)
III. (F)

Rpta: Sólo I

I. Puede que sí
II. Imposible
III. Imposible

Rpta: II y III

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Nilda, Nora, Nadia, Nélida y Natalia son amigas y se sabe que sólo una de ellas está casada, al preguntarles quién es la casada ellas respondieron:
* Nilda: Nora es la casada.
* Nora: Nadia es la casada.
* Nadia: Natalia es la casada.
* Nélida: Yo no soy casada.
* Natalia: Nadia mintió cuando dijo que yo soy la casada.

Si 4 de ellas mintieron y sólo una dice la verdad. ¿Quién es la casada?

Rpta.: ....

2. Jacinta, Sofía, María y Roberta tienen 16, 17, 19 y 20 años, aunque no necesariamente en ese orden. Si:
* Roberta dice: Yo tengo 16.
* Sofía dice: Yo tengo 17.
* Jacinta dice: María no tiene 19.
* María dice: Sofía dice 20.

y solo una de ellas miente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

Rpta.: ....

3. Álex, Beto, César y David han competido en una carrera. Al preguntarle quién fue el ganador, ellos respondieron lo siguiente:
* Álex: Ganó David.
* Beto: Yo no gané.
* César: Álex miente.
* David: Ganó César.

Si solo es cierta una de estas cuatro afirmaciones, ¿quién ganó y quién dice la verdad, respectivamente?

Rpta.: ....

4. Cinco niños tienen 12, 14, 18, 20 y 26 juguetes respectivamente. Se sabe que cada uno dijo:
* Abel: "Yo tengo 26 jugadores".
* Boris: "Yo tengo 20 juguetes".
* Carlos: "Boris tiene 14 juguetes".
* David: "Yo tengo 18 juguetes".
* Eduardo: "Yo tengo 14 juguetes".

Si solamente uno de ellos miente y los otros dicen la verdad, ¿cuántos juguetes tienen juntos Abel y Eduardo?

Rpta.: ....

5. Cuatro amigos juegan fulbito y, por casualidad, uno de ellos rompió la luna de la casa de un vecino, quien sale de su casa enojado y pregunta: ¿Quién ha sido? Las respuestas fueron las siguientes:
* Andrés: Yo no fui.
* Carlos: Darío no fue.
* Darío: Yo no participé en el juego.
* Rúben: Fue Andrés.

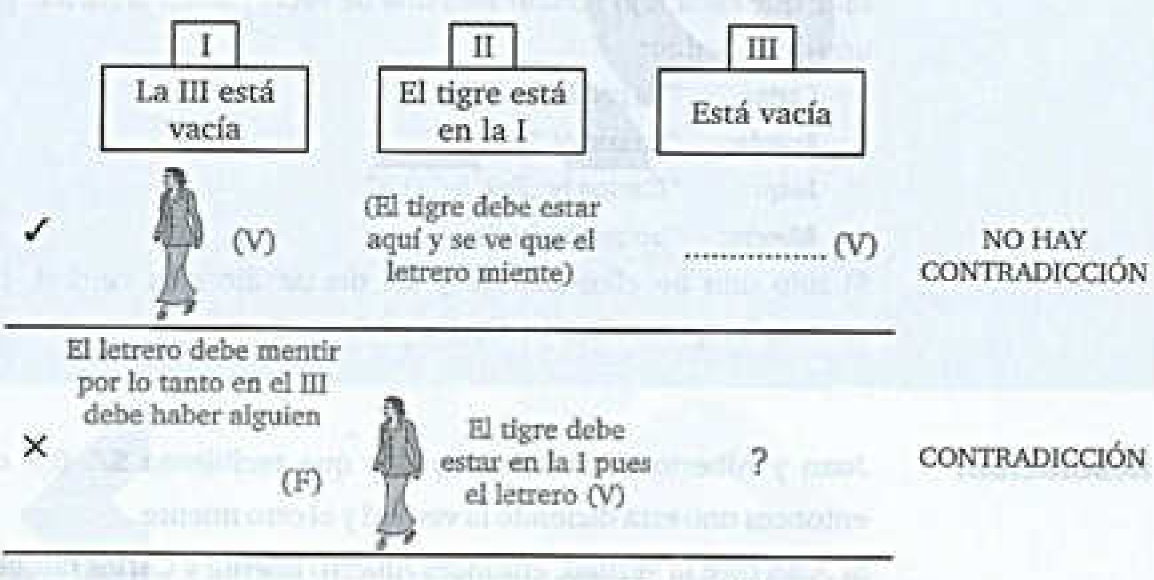
Si se sabe que solo uno de ellos dijo la verdad, ¿quién fue el culpable?

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 En una habitación hay una dama y el letrero que en ella se encuentra dice la verdad. En otra habitación hay un tigre y el letrero miente; la otra habitación está vacía y el letrero o bien dice la verdad o bien miente. ¿En qué puerta se encuentra la dama?

Resolución: Por principio de suposición, asumiremos el lugar de la dama y la concordancia con las condiciones.



∴ La dama se encuentra en la puerta I.

PROBLEMA 2 Cuatro amigas, María, Lucía, Isabel y Mónica se reúnen para averiguar quién de ellas le contó el secreto a Juan. Las afirmaciones de cada una con respecto al tema fueron las siguientes:

- **María** : "Lucia contó el secreto"
- **Lucía** : "Isabel contó el secreto"
- **Isabel** : "Lucía no dice la verdad"
- **Mónica** : "Yo no fui"

Además, se sabe que sólo una de las cuatro amigas fue la indiscreta que le contó el secreto a Juan.
Si sólo una de ellas miente, ¿quién es esa persona?

Resolución: Analizando las contradicciones entre Lucía e Isabel. Se dan 2 casos y confrontando con la pregunta que solo una debe mentir.

María	V		María	V
Lucía	(F)	ó	Lucía	(V)
Isabel	(V)		Isabel	(F)
Mónica	V		Mónica	V

✓ Lucía contó el secreto

Lucía contó / Isabel contó } Contradicción pues sólo una contó el secreto

∴ La persona que contó el secreto es Lucía

PROBLEMA 3 Lucho repartió monedas de S/. 5; S/. 2; S/. 1 y S/. 0,5 entre sus cuatro hijos. Se sabe que cada hijo recibió sólo una de estás cuatro monedas y que además, cada uno de ellos dijo:

* **Carlos:** "Yo recibí S/. 5"
* **Andrés:** "Yo recibí S/. 1"
* **Juan:** "Carlos recibió S/. 0,5"
* **Alberto:** "Yo recibí S/. 0,5

Si solo uno de ellos miente y los demás dicen la verdad, ¿cuánto suman las cantidades que recibieron Carlos y Alberto?

Resolución: Juan y Alberto dicen que hay dos que recibieron S/. 0,5 que no es correcto, entonces uno esta diciendo la verdad y el otro miente.

Si Juan dice la verdad, entonces Alberto miente y Carlos también miente. Pero por dato sólo uno miente,

Entonces el que miente es Juan y los otros dicen la verdad. Según esto:

Carlos recibió S/. 5

Andrés recibió S/. 1

Juan recibió S/. 2

Alberto recibió S/. 0,5

Luego:

∴ Carlos + Alberto = S/. 5,5

PROBLEMA 4 Mario, Juan, Carlos y William toman una ficha diferente cada uno (las fichas están numeradas del 1 al 4) y dicen:

* **Mario:** Yo tengo la ficha 3.
* **Juan:** el número de mi ficha es el doble que el de William.
* **Carlos:** Mario no tiene la ficha 3.

* **William:** Carlos tiene la ficha 4.

Si solo uno de ellos miente, ¿cuánto suman los números de las fichas que tienen Juan y William?

Resolución:

Mario: Yo tengo la ficha 3.
Juan: el número de mi ficha es el doble que el de William.
Carlos: Mario no tiene la ficha 3.
William: Carlos tiene la ficha 4.

Datos: 3V y 1 M

Fichas: 1, 2, 3, 4

FASE 1 CONTRADICCIÓN

Entre Mario y Carlos está el que dice mentira, por lo tanto, los que no participan dicen Verdad, de aquí.

* Mario:
(V) Juan:
* Carlos:
(V) William:

Si Carlos tiene la ficha 4, entonces Juan debe tener la ficha 2 y William la ficha 1, de aquí se deduce que Mario debe tener, la ficha 3, quedando:

(V) Mario: Ficha 3
(V) Juan: Ficha 2
(M) Carlos: Ficha 4
(V) William: Ficha 1 $\therefore$ Suma de fichas de Juan y William: $2 + 1 = 3$

Habrá otra forma de abordar el problema

NOTA "S"

1. Se busca una autoafirmación positiva.

Ejemplo:
* Yo tengo....... Se asumirá en
* Yo soy....... cualquiera de ellos
* Yo recibí...... que es enunciado
* Yo obtuve...... es verdadero.

Ojo: Si no cumpliese, se cambiará al otro valor de verdad.

MÉTODO "S"

Con la nota "S" expuesta veamos:

(V) Mario: Yo tengo la ficha 3 $\rightarrow$ Ficha 3
(V) Juan: Mi número de ficha es el doble que el de William $\rightarrow$ Ficha 2
(M) Carlos: Mario no tiene la ficha 3 $\rightarrow$ Ficha 4
(V) William: Carlos tiene la ficha 4 $\rightarrow$ Ficha 1.

PROBLEMA 5 En una fiesta infantil cada uno de los presentes recibió a lo más dos porciones de torta. A cuatro unta si han recibido torta y respondieron:

* **Margarita:** yo no he recibido dos porciones.
* **Diego:** Jair recibió dos porciones.
* **Jair:** Margarita miente y Tatiana recibió una porción.
* **Tatiana:** Jair recibió una porción.

Si uno de ellos no recibió porción de torta y es el único que siempre dice la verdad, ¿cuántas porciones de torta han recibido entre Magarita, Tatiana y Jair?

Resolución:

FASE 1 CONTRADICCIÓN

* Margarita: yo no he recibido dos porciones.
* Diego: Jair recibió dos porciones.
* Jair: Margarita miente y Tatiana recibió una porción.
* Tatiana: Jair recibió una porción.

Datos: Uno de ellos no recibió porción de torta y es el único que siempre dice la verdad, entonces 3 dicen mentira y 1 verdad.

* Margarita o Jair dicen la verdad entonces los demás mienten.

(M) Margarita:
(M) Diego: Jair no recibió 2 porciones.
(V) Jair:
(M) Tatiana: Jair no recibió una porción.

Jair no recibió porción de torta entonces dice verdad y Margarita miente.

Entonces:
- ✔ Margarita: Recibe 2 porciones.
- ✔ Diego: Recibió 1 o 2 porciones.
- ✔ Jair: No recibió ninguna porción.
- ✔ Tatiana: Recibió 1 porción.

Piden: Lo que recibieron Margarita, Tatiana y Jair: $2 + 1 + 0 = 3$

PROBLEMA 6 Don Justo repartió billetes de 10, 20, 50 y 100 soles, entre sus cuatro hijos, uno a cada una. Se sabe que cada una hizo las siguientes afirmaciones:

* **Karina** : "Yo recibí 100 soles".
* **Gloria** : "Yo recibí 20 soles".
* **Valeria** : "Karina recibió 10 soles".
* **Patricia** : "Yo recibí 10 soles".

Si solo una de ellas miente y las otras dicen la verdad, ¿cuánto es la diferencia positiva de la cantidad de dinero que recibieron Valeria y Patricia?

Resolución:

FASE 1 CONTRADICCIÓN

Datos: 1 M y 3 V Billetes: S/ 10, S/ 20, S/ 50, S/ 100 a cada una.

✔ Karina : "Yo recibí 100 soles".
(V) Gloria : "Yo recibí 20 soles".
✔ Valeria : "Karina recibió 10 soles".
(V) Patricia : "Yo recibí 10 soles".

(entre ellos está el que dice mentira, entonces los demás dicen verdad)

* Si Patricia recibió S/ 10 entonces Karina ya no podría recibir lo mismo, por lo tanto Valera miente, de aquí:

(V) Karina : Recibió S/ 100
(V) Gloria : Recibió S/ 20
(M) Valeria : Recibió S/ 50 (Se deduce que ella tuvo que recibir dicha
(V) Patricia : Recibió S/ 10 suma).

Piden la diferencia positiva de la cantidad de dinero que recibieron Valeria y Patricia: 50 – 10 = 40

MÉTODO "S"

1 M y 3 V

(La primera autoafirmación positiva la dice Karina)

(V) Karina: S/ 100
(V) Gloria: S/ 20
(M) Valeria: S/ 50 } Diferencia
(V) Patricia: S/ 10 } + S/ 40

PROBLEMA 7 Hay pulpos de 6, 7 y 8 tentáculos sirviendo al rey del fondo de mar. Los de 7 tentáculos siempre mienten, mientras que los de 6 u 8 tentáculos siempre dicen la verdad. Cierto día se reunieron cuatro pulpos.

* El pulpo azul dijo: "Entre los cuatro, tenemos un total de 28 tentáculos".
* El pulpo verde dijo: "Entre los cuatro, tenemos un total de 27 tentáculos".
* El pulpo amarillo dijo: "Entre los cuatro, tenemos un total de 26 tentáculos".
* El pulpo rojo dijo: "Entre los cuatro, tenemos un total de 25 tentáculos".

¿De qué color es el único pulpo que dijo la verdad y cuántos tentáculos realmente tiene el pulpo rojo, respectivamente?

Resolución:

FASE 2
Utilicemos el principio de suposición.

NOTA "S"
Cuando suponemos, el enunciado puede ser verdadero o falso. Si cumple con las condiciones dadas hemos supuesto bien y sino cambiamos su valor de verdad

Datos:
* Los de 7 tentáculos siempre mienten.
* Los de 6 u 8 tentáculos siempre dicen la verdad.
* Solo 1 pulpo dice la verdad, los demás mienten.

Analizando los enunciados tenemos:

(M) Pulpo Azul: "Entre los 4 tenemos 28".
(7 Tentáculos)
Azul: 7 Verde: 7 } Absurdo ya que hay un
Amarillo: 7 Rojo: 7 } pulpo que dice la verdad

Suponemos que el pulpo verde dice verdad:

(V) Pulpo Verde: "Entre los 4 tenemos 27".

Azul: 7 Verde: 6

Amarillo: 7 Rojo: 7 Deben sumar 20

$7 + 7 + 6$ (única forma).

Cumple las condiciones ya que un sólo pulpo dice verdad.

∴ El pulpo verde dice verdad y el pulpo rojo tiene 7 tentáculos.

PROBLEMA 8 Cuatro niños de 5, 7, 8 y 6 años de edad tienen la siguiente conversación:

* **Mauro** : "Yo tengo 5 años".
* **Lucas** : "Yo tengo 8 años".
* **Ciro** : "Mauro tiene 7 años".
* **Benito** : "Yo tengo 7 años".

Si solo uno de ellos miente, y los otros dicen la verdad, ¿cuánto suman las edades, en años, de Mauro y Benito?

Resolución: Datos: | Edades: 5, 7, 8 y 6 años | 1 M y 3 V |

FASE 1
CONTRADICCIÓN

(V) Mauro : "Yo tengo 5 años".

(V) Lucas : "Yo tengo 8 años".

Ciro : "Mauro tiene 7 años".

Benito : "Yo tengo 7 años".

(Los que no participan dicen verdad)

De aquí se deduce que Ciro miente entonces Benito dice la verdad, finalmente:

(V) Mauro: Tiene 5 años

(V) Lucas: Tiene 8 años

(M) Ciro: Tiene 6 años

(V) Benito: Tiene 7 años

∴ Piden suma de edades de Mauro y Benito: $5 + 7 = 12$ años.

PROBLEMA 9 Acerca del número de autos que tiene Jorge, sus amigos conversan entre ellos:

* **Hilario** : Jorge tiene solamente autos grises.
* **Mario** : todos sus autos son rojos y son más de 5.
* **Nora** : tiene todos sus autos grises y son más de 3.
* **Eva** : yo sé que tiene menos de 5 autos.

Si solo uno de ellos miente y los demás dicen la verdad, ¿cuántos autos tiene Jorge?

Resolución: Datos: | 1 M y 3 V |

FASE 2
Utilicemos el principio de suposición.

Suponemos que lo dicho por Hilario es mentira entonces:

(M) Hilario: Jorge no tiene solamente autos grises.

(V) Mario: Todos sus autos son rojos y son más de 5.

Absurdo

De aquí lo dicho por Hilario es Verdad entonces:

(V) Hilario : Jorge solo tiene autos grises.
(M) Mario : N° de autos < 5
(V) Nora : N° de autos > 3
(V) Eva : N° de autos < 5

De aquí: $3 < \underbrace{N° \text{ de autos}}_{4} < 5$

∴ El número de autos que tiene Jorge es 4.

PROBLEMA 10 Hilda, Paola, Lucía, Deysi y María están conversando sobre la cantidad de dinero que tiene cada una de ellas en su cartera y en la conversación se escuchó las siguientes afirmaciones:

* **Hilda:** "yo no tengo S/ 100"
* **Paola:** "yo no tengo S/ 120"
* **Lucía:** "yo no tengo S/ 200"
* **Deysi:** "yo tengo S/ 100"
* **María:** "yo no tengo S/ 150"

Si se sabe que solo una de ellas tiene S/ 100 y las demás tienen S/ 120, y que tres de ellas mienten y dos dicen la verdad, ¿quien tiene S/ 100?

Resolución: Datos:

Solo 1 de ellos tiene S/ 100, las demás S/ 120
3M y 2V

FASE 2
Principio de Suposición.

(M) Hilda: Yo no tengo S/ 100.
(M) Paola: Yo no tengo S/ 120.
(V) Lucía: Yo no tengo S/ 200 → (Verdadero, de ser falso tendría S/200 y eso no puede ocurrir.)
(M) Deysi: Yo tengo S/ 100
(V) María: Yo no tengo S/ 150 → Verdadero.

∴ Hilda tiene el billete de S/ 100.

PROBLEMA 11 Cuatro amigas viven en un edificio de cuatro pisos, cada una en un piso diferente. Y afirmaron lo siguiente:

* **Valeria** : "No vivo en el último piso".
* **Patricia** : "No vivo en el primer ni en el último piso".
* **Karina** : "Vivo en el último piso".
* **Gloria** : "Vivo en el primer piso".

Si se sabe que solo una de ellas miente y las demás siempre dicen la verdad, ¿quién vive en el primer piso?

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

Resolución: Datos: 1 M y 3 V

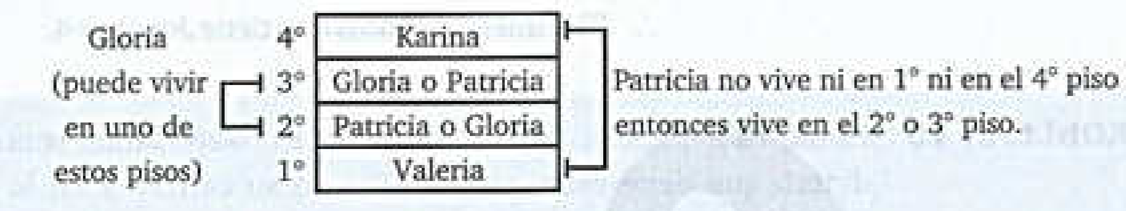
FASE 2
Principio de Suposición.

* Supongamos que Valeria miente, entonces:

(M) Valeria: "Vivo en el último piso"
(V) Karina: "Vivo en el último piso"

Los dos no pueden vivir en el último piso por ello lo que dice Valeria es verdad.

* Ahora suponemos que Gloria miente entonces Patricia y Karina dicen verdad, de aquí:



∴ La persona que vive en el 1° piso es Valeria.

PROBLEMA 12 Cuatro amigos lanzaron, cada uno, dos dados convencionales, donde estuvieron como suma de los puntos en las caras superiores de sus respectivos dados: 2, 3, 5 y 12 puntos. Se sabe que dijeron:

* **Javier** : Yo obtuve puntaje 5.
* **Manolo** : El puntaje que obtuve es primo.
* **Carlos** : Javier no obtuvo puntaje 5.
* **Ricardo** : Carlos obtuvo puntaje par y primo.

Si solo uno de ellos dice la verdad y Javier no obtuvo menos de 5, calcular puntajes de Ricardo y Carlos.

Resolución: Datos:

Javier ≥ 5	1 V ; 3 M	Puntajes: 2, 3, 5, 12

Puedo usar el Método "S" genial

(V) Javier: Yo obtuve puntaje 5.
(M) Manolo: El puntaje que obtuve es primo.
(M) Carlos: Javier no obtuvo puntaje 5.
(M) Ricardo: Carlos obtuvo puntaje par.

Manolo no obtuvo puntaje primo por lo tanto el puntaje que obtuvo fue 12. Entonces el puntaje obtenido por Javier fue 5. De esta manera los puntajes quedan así:

(V) Javier: 5 puntos.
(M) Manolo: 12 puntos.
(M) Carlos: 3 puntos.
(M) Ricardo: 2 puntos

∴ Piden: $2 + 3 = 5$

PROBLEMA 13 María, Martha, Mirtha y Mónica tienen 25, 28, 32 y 40 años de edad, no necesariamente en ese orden. Ellas tienen la siguiente conversación:

* **María** : "ayer cumplí 25 años".
* **Martha** : "yo tengo 28 años".
* **Mirtha** : "mañana cumpliré 41 años".
* **Mónica** : "Martha tiene 40 años"

Si se sabe que solo una de ellas miente, ¿quién miente y quién es la mayor de todas respectivamente?

Resolución:

Datos: | Edades: 25; 28; 32; 40 | 1 M y 3 V |

FASE 2
Principio de Suposición.

(V) María: "ayer cumplí 25 años".
( ) Martha: "yo tengo 28 años"
(V) Mirtha: "mañana cumpliré 41 años".
( ) Mónica: "Martha tiene 40 años".

Contradicción (1 V y 1 M)

De aquí: María y Mirtha dicen la verdad.
Luego: María: 25 años.
Mirtha: 40 años.

Entonces, Mónica miente, de aquí:

(V) María: 25 años.
(V) Martha: 28 años.
(V) Mirtha: 40 años.
(M) Mónica: 32 años.

∴ Mónica miente y la mayor es Mirtha.

PROBLEMA 14 Ruth, Raquel y Rita conversan sobre sus edades, y durante la charla afirman:

* **Ruth:** Tengo 12 años. Tengo dos años más que Rita. Soy tres años menor que Raquel.
* **Raquel:** Rita tiene 15 años. No soy la más joven. Entre Rita y yo hay 5 años de diferencia.
* **Rita:** Raquel tiene 5 años más que Ruth. Ruth tiene 13 años. Soy más joven que Ruth.

Si cada una hizo dos afirmaciones verdaderas y una falsa, ¿qué edad tiene Rita?

Resolución:

Datos: | Cada uno dijo 2V y 1M |

FASE 2
Principio de Suposición.

Analizando los enunciados:

✓ Ruth: (13 años)

Tengo 12 años. (M) Tengo dos años más que Rita. (V) Soy tres años menor que Raquel. (R)

- Raquel: (16 años)

Rita tiene 15 años. (M) No soy la más joven. (V) Entre Rita y yo hay 5 años de diferencia. (V)

- Rita: (11 años)

Raquel tiene 5 años más que Ruth. (M) Ruth tiene 13 años. (V) Soy más joven que Ruth. (V)

∴ Ruth tiene 11 años.

PROBLEMA 15 En una extraña reunión que se propició en la selva, la cual estaba dirigida por el león; y estaba integrada por el cocodrilo, el elefante, la jirafa, el mono y el tigre; les pasaba algo curioso, cada uno se creía otro animal diferente al que es, pero igual a uno de los presentes, además no había dos animales que se creyeran ser el mismo animal.

- El que se creía mono discutió con el cocodrilo y le dijo que estaba loco.
- El que se creía cocodrilo no era el tigre.
- El elefante se creía el más alto de todos.
- El león, el único cuerdo, increpó al que se creía tigre que el elefante lo estaba imitando.
- Ningún animal se creía león.

¿Qué animal, se creía elefante?

Resolución:

Lo que se creen:	EL.........	JIRAFA	TIGRE	C.........	MONO
Lo que son:	COCODRILO	ELEFANTE	JIRAFA	MONO	TIGRE
		(1)	(2)		(3)

(1) • El elefante se cree jirafa (más alto)

(2) • LEÓN — TIGRE / JIRAFA (El elefante imita a la jirafa)

(3) • El que se cree mono discutió con el cocodrilo y además no puede ser mono ni cocodrilo.

¡Ud. completa ...! ... ¡Fácil no!

∴ El cocodrilo se creía elefante.

PROBLEMA 16 Un juez interroga a tres personas: A, B y C sospechosas de un delito. Se sabe que una de ellas es culpable. Además en sus declaraciones, cada una hace 2 afirmaciones, como sigue:

- **Alejandra** : Yo y Lucía somos inocentes.
- **Lucia** : Alejandra es inocente y Daniela es culpable.
- **Daniela** : Yo soy inocente y Alejandra es culpable.

El juez se entera que los sospechosos se han puesto de acuerdo para que uno de ellos diga dos verdades, otro 2 mentiras y el otro una verdad y una mentira. ¿Quién es culpable?

Resolución: Asumiendo la culpable caso por caso:

Culpable → • Alejandra:	F	V	Alejandra:	V	F	Alejandra:	V	V
Lucía:	F	F	• Lucía:	V	F	Lucía:	V	V
Daniela:	V	V	Daniela:	V	F	• Daniela:	F	F

En este caso se verifica las condiciones dadas 2F, 2Y y 1V 1F

∴ Alejandra es culpable

PROBLEMA 17 En la competencia de natación de damas, Carla, Carmen y Diana ocuparon los tres primeros puestos, aunque no necesariamente en ese orden. al ser cuestionadas acerca del resultado de la competencia, por una compañera gravosa, ellas contestaron:

- **Carla** : "Yo gané la competencia"
- **Carmen** : "Yo no gané la competencia"
- **Diana** : "Yo terminé mejor ubicada que Carmen"

Si solo una miente, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Carla miente
II. Carmen dice la verdad
III. Diana miente.

Resolución: Asumiendo de quién es la que miente se tiene:

FASE 1 CONTRADICCIÓN

2°	3°	Carla	F	1°	Carla	V	1°	Carla	V
3°	2°	Carmen	V	1°	Carmen	F	2°	Carmen	V
1°	1°	Diana	V	–	Diana	V	3°	Diana	F

2 CASOS — CONTRADICCIÓN — 1 CASO

En ambos casos Carmen dice la verdad

∴ La afirmación II es verdadera.

PROBLEMA 18 Un grupo de amigas formado por Lucía, Mabel, Paty, Evelin, Brenda, Isabel y Fabiola, deben elegir entre ir a comer pollo o pizza. Cada una debe elegir entre ir a comer pollo o pizza. Cada una debe elegir solo una de las alternativas. El grupo ira a donde la mayoría escoja, además:

- Lucía escogerá ir a comer pollo, solo si Paty escoge ir a comer pizza.
- Evelin y Mabel no escogen lo mismo si y solo si Fabiola escoge ir a comer pizza.
- Si Brenda escoge ir a comer pizza, entonces Isabel escoge ir a comer pollo.
- Fabiola e Isabel no escogen ir al mismo lugar.

a) Si Evelin y Fabiola escogen ir a comer pollo, entonces. ¿Cuál es el máximo número de amigas que pudo haber escogido ir a comer pizza?

b) Si Brenda y Paty escogen ir a comer pollo, entonces. ¿Cuál es el mínimo número de amigas que pudo haber escogido ir a comer pizza?

Resolución:

- PATY $\rightarrow$ LUCIA
  Pizza Pollo
- EV $\neq$ MA $\leftrightarrow$ F
  Pizza

  EV = MA $\leftrightarrow$ F
  Pollo
- B $\rightarrow$ I
  Pizza Pollo
- F $\neq$ I

a)

L	M	P	E	B	I	F
Pizza	Pollo	Pizza	Pollo	Pollo	Pizza	$\neq$ Pollo
↑		↑			↑	

$\therefore$ El máximo número es 3

b)

L	M	P	E	B	I	F
Pollo	Pollo	Pollo	Pollo	Pollo	Pizza	$\neq$ Pollo
					↑	

$\therefore$ El mínimo número es 1

PROBLEMA 19 En un concurso de Lógica, las respuestas de cuatro concursantes se muestran en la siguiente tabla:

Pregunta	Respuestas			
1	V	F	F	V
2	F	F	V	F
3	F	F	V	V
4	V	V	F	F

Pablo respondió todas las preguntas correctamente, Joaquín se equivocó en todas sus respuestas y Elena se equivocó solo en una respuesta. ¿Cuáles fueron las respuestas que dio Carmen en el orden natural de las preguntas?

Resolución: De los datos observamos que las respuestas de Pablo y Joaquín son opuestas totalmente.

Pregunta	Respuestas			
1	V	F	F	V
2	F	F	V	F
3	F	F	V	V
4	V	V	F	F

Respuestas opuestas

Vamos a suponer que Pablo responde todas las preguntas de manera correcta.

Pablo	Elena	Joaquín	Carmen
V	F	F	V
F	F	V	F
F	F	V	V
V	V	F	F

Elena: Tiene 1 sola incorrecta, cumple las condiciones dadas.

Carmen: Tiene 2 correctas 2 incorrectas.

∴ Las respuestas dadas por Carmen fueron: VFVF

PROBLEMA 20 Gokú, Krilin, Gojan y Vegeta tuvieron una discusión en la casa de Gokú, lo que dejó como resultado un plato, un vaso, un jarrón y un cuadro todos rotos, pero cada objeto fue roto por solo una persona. Al ver esto, la esposa de Gokú los interrogó para saber quién fue el que rompió cada uno los objetos. Cada uno dio dos declaraciones, de las cuales, una de ellas es verdad y la otra es mentira.

	1era. declaración	2da. declaración
Krilin	Vegeta rompió el plato.	Quién rompió el cuadro fue Gokú.
Vegeta	Yo rompí el vaso.	Quién rompió el plato fue Gojan.
Gokú	Krilin rompió el vaso.	Gojan rompió el jarrón.
Gojan	La primera afirmación de Gokú es falsa	Vegeta rompió el cuadro.

¿Quién rompió el cuadro y quién el vaso respectivamente?

Resolución: Datos:

* Cada uno rompió un objeto;
* De las 2 declaraciones una es verdad y la otra es mentira o viceversa

Puedo usar el Método "S" genial

	1era. declaración	2da. declaración
Krilin	Vegeta rompió el plato. (M)	Quién rompió el cuadro fue Gokú. (V)
Vegeta	Yo rompí el vaso. (V)	Quién rompió el plato fue Gojan. (M)

Gokú:	Krilin rompió el vaso. (M)	Gojan rompió el jarrón. (V)
Gojan:	La primera afirmación de Gokú es falsa. (V)	Vegeta rompió el cuadro. (M)

La autoafirmación cumple las condiciones

Analizando obtenemos:

Vegeta: Rompió el vaso. Gojan: Rompió el jarrón.
Gokú: Rompió el cuadro. Krilin: Rompió el plato.

∴ Gokú y Vegeta rompieron el cuadro y el vaso.

PROBLEMA 21 En un bosque africano, un explorador se encontró con tres cazadores y les preguntó que habían cazado y las respuestas de estos fueron:

1er. cazador: cazamos 2 búfalos, 5 tigres y 1 mono.
2do. cazador: cazamos 5 búfalos, 2 tigres y 2 monos.
3er. cazador: cazamos 1 búfalo, 2 tigres y 1 mono.

Respectivamente, si se sabe que uno de los cazadores siempre dice la verdad, el otro siempre miente y el tercer cazador alterna una verdad y una mentira (no dice dos verdades o dos mentiras seguidas), ¿cuántos animales de cada tipo fueron cazados en total?

Resolución: Datos:

- Un cazador siempre dice la verdad.
- Un cazador siempre miente.
- Un cazador alterna una verdad y una mentira.

FASE 2
Principio de Suposición.

Analizando al 2do. y al 3er. cazador ambos responden 2 tigres estas afirmaciones deben ser verdaderas de no ser así habría una contradicción con los datos dados de aquí:

1er. cazador: 2 búfalos, 5 tigres y 1 mono. → Todas deben ser mentiras.
(F) (F) (F)

2do. cazador: 5 búfalos, 2 tigres y 2 monos. → Todas deben ser verdades.
(V) (V) (F)

3er. cazador: 1 búfalo, 2 tigres y 1 mono. → Respuestas alternadas.
(F) (V) (F)

∴ Los animales que fueron cazados son: 5 búfalos, 2 tigres y 2 monos.

PROBLEMA 22 Cuatro amigos: Luis, Mario, Nora y Paty, terminaron sus estudios de medicina, ingeniería, educación y economía, no necesariamente en ese orden, y tienen la costumbre de decir, siempre, una verdad y una mentira. Se le hace dos preguntas a cada uno acerca de sus profesiones o las de sus amigos y responden lo siguiente:

Luis: "Nora es doctora", "Mario es ingeniero".
Mario: "Nora no es doctora", "Paty es economista".
Nora: "Paty es profesora", "Luis es economista"
Paty: "Yo soy doctora", "Mario es profesor".
¿Quién es doctor(a) y quién es profesor(a) respectivamente?

Resolución: Datos: Cada uno dice una verdad y una mentira o viceversa.

Paty: "Yo soy doctora" → VERDAD
De aquí completamos el valor de verdad de cada uno de los enunciados.

Podemos utilizar el Método "S"

Luis: "Nora es doctora", "Mario es Ingeniero"
(F) (V)
Mario: "Nora no es doctora", "Paty es economista"
(V) (V)
Nora: "Paty es profesora", "Luis es economista"
(F) (V)
Paty: "Yo soy doctora", "Mario es profesor"
(F) (V)
∴ Doctora: Paty Profesora: Nora.

PROBLEMA 23 Manuel fue asesinado a tiros por un hombre y luego de una ardua investigación se llevó ante el fiscal a cinco sospechosos. El fiscal preguntó que era lo que podían declarar en su defensa, y respondieron:

Rigoberto: Yo no maté a Manuel.
Nunca tuve un revólver en mis manos.
Julián lo mató.

Eulogio: Yo no maté a Manuel.
Nunca tuve un revólver de mi propiedad.
Los otros están tratando de exculparse.

Demetrio: Yo no maté a Manuel.
No conocí a Manuel antes.
Julián lo mató.

Julián: Yo soy inocente.
Gilberto es el culpable.
Rigoberto mintió al decir que fui yo.

Gilberto: Yo no cometí el asesinato.
Eulogio es el culpable.
Demetrio responderá por mí, él me conoce desde hace años.

Si cada uno hizo 3 declaraciones, 2 verdaderas y 1 falsa. ¿Quién asesinó a Manuel?

Resolución: Datos: Cada uno 3 declaraciones (2 verdades y 1 falsa).

Puedo usar el Método "S" genial

Utilicemos el Método "S":

Julián: Yo soy inocente (Verdad)

(Si esto es verdad los enunciados que acusan a Julián serán falsos).

Completando el valor de verdad de los enunciados:

Rigoberto: Yo no maté a Manuel. (V)
Nunca tuve un revólver en mis manos. (V)
Julián lo mató. → (F)

Eulogio: Yo no maté a Manuel. (F)
Nunca tuve un revólver de mi propiedad. (V)
Los otros están tratando de exculparse. (V)

Demetrio: Yo no maté a Manuel. (V)
No conocí a Manuel antes. (V)
Julián lo mató. → (F)

Julián: Yo soy inocente. (V)
Gilberto es el culpable. (F)
Rigoberto mintió al decir que fui yo. (V)

Gilberto: Yo no cometí el asesinato. (V)
Eulogio es el culpable. (V)
Demetrío responderá por mí, él me conoce desde hace años. (F)

∴ El asesino de Manuel es Eulogio.

NOTA "S"
Si Julián, Rigoberto, Demetrio y Gilberto no cometieron el asesinato entonces fue Eulogio.

PROBLEMA 24 En una sala hay algunas personas que siempre dicen la verdad y las demás siempre mienten. En cierto momento, tres personas hacen las siguientes afirmaciones:

Primera: "No hay más que nueve personas en esta sala.
Todos somos mentirosos".

Segunda: "No hay más de diez personas en esta sala.
Algunas no son mentirosas".

Tercera: "Hay once personas en esta sala.
Al menos tres son mentirosas".

¿Cuántas personas hay en la sala y cuántas son mentirosas?

Resolución: Dato: Algunas personas siempre dicen la verdad y las demás siempre mienten.

Analizando el valor de verdad de los enunciados:

FASE 2 Principio de Suposición.

PRIMERA: "No hay más que nueve personas en esta sala.
(F) Todos somos mentirosos". (N° de personas > 9)

SEGUNDA: "No hay más de diez personas en esta sala.
(V) Algunas no son mentirosas". (N° de personas = 10)

TERCERA: "Hay once personas en esta sala.
(F) Al menos tres son mentirosas".

∴ Hay 10 personas y 2 son mentirosas.

PROBLEMA 25 Frente a un grupo de tres amigos se ubicó un dado común de modo que ellos observan las mismas tres caras del dado normal. Se les pregunta: ¿Cuál es la suma de los puntos de las tres caras visibles?, y ellos responden:

Alex: Yo no observo una cara con 5 puntos.
Yo no observo una cara con 1 punto.

Beto: La suma de puntos es 12.
Yo observo una cara con 2 puntos.

Carmen: Yo observo una cara con 6 puntos.
La suma de puntos es 10.

Si se sabe que de las dos afirmaciones que dio cada amigo una es cierta y la otra es falsa, ¿Cuál es la suma de los puntos de las tres caras visibles que observan los tres amigos?

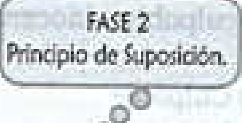
Resolución: Datos: 1 V y 1 M cada uno.

Analizando el valor de verdad de los enunciados:

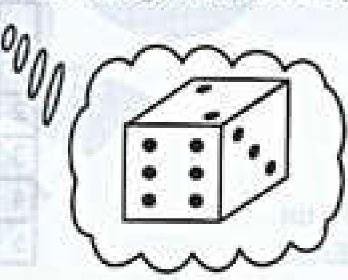
Alex: Yo no observo una cara con 5 puntos. (F)
Yo no observo una cara con 1 punto. (V)

Beto: La suma de puntos es 12. (F)
Yo observo una cara con 2 puntos. (V)

Carmen: Yo observo una cara con 6 puntos. (V)
La suma de puntos es 10. (F)



Se observa:



Piden: La suma de las caras visibles.

$\therefore \ 6 + 3 + 2 = 11$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Cuatro acusados de haber ocasionado un delito son entrevistados. Afirmando:
   - **Saúl:** Beto fue.
   - **Beto:** Daniel fue.
   - **Luis:** Yo no fui.
   - **Daniel:** Beto miente.

   Se sabe que 3 de ellos mienten y el otro dice la verdad. ¿Quién es el que cometió el delito?

   A) Saúl B) Luis C) Daniel
   D) Beto E) Faltan Datos

2. Preguntando mamá quién fue la persona que se comió el pastel, obtuvo las siguientes repuestas:
   - **Alan:** Esto es obra de solo uno de nosotros.
   - **Beto:** No, de dos de nosotros.
   - **Carlos:** No, de tres de nosotros.
   - **David:** No, de cuatro de nosotros.
   - **Ernesto:** Entre todos nos lo comimos.

   Mamá sabe que los inocentes dicen la verdad, mientras que los culpables mienten. ¿Ernesto es culpable o inocente?

   A) Culpable
   B) Inocente
   C) Culpable o inocente
   D) No se puede determinar
   E) Ninguna de las anteriores

3. Cuatro sospechosos de haber cometido un crimen son interrogados por la policía. Estos declaran lo siguiente:
   - **Totó:** "Fue Peter".
   - **Peter:** "Fue Renán".
   - **Astolfo:** "Yo no fui".
   - **Renán:** "Peter miente".

   Si solo una de las personas miente y solo uno de ellos es culpable, ¿quién cometió el crimen?

   A) Peter B) Totó C) Astolfo
   D) Renán E) Ninguno

4. Tres monedas de S/ 1, S/ 2 y S/ 5 están en el interior de tres frascos cerrados no transparentes, una moneda en cada frasco. En cada uno de estos frasco hay un letrero como se muestra en la figura:

   Aquí no hay S/1

   Si en cada frasco hay solo una moneda y de las inscripciones solo una es verdadera, ¿cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   I. El frasco II tiene la moneda de dos soles.
   II. El frasco I tiene la moneda de S/ 1 y el frasco III la moneda de S/ 2
   III. La suma de las cantidades en los frascos I y II es 6 soles
   IV. La suma de las cantidades en los frascos II y III es 5 soles.

   A) I y II B) II y III C) I y III
   D) Sólo II E) Sólo III

5. En una evaluación, tres alumnas (María, Rocío y Diana) deben contestar con verdadero (V) o falso (F) a las 5 preguntas. Una contestó correctamente todas, otra erró en todas y la última contestó más correctas que erradas. ¿Quién contestó correctamente todas las 5 preguntas?

	María	Rocío	Diana
1	F	V	V
2	V	V	F
3	F	F	V
4	V	V	F
5	F	V	V

   A) María B) Rocío
   C) Diana
   D) Diana o Rocío E) Rocío o María

6. Cuatro hermanos son interrogados por su madre, pues uno de ellos rompió el florero nuevo. Ellos afirman lo siguiente:
   - **Carlos:** Fue Luis.
   - **Luis:** Fue Miguel.
   - **Miguel:** Luis miente al decir que fui yo.
   - **Esteban:** Yo no fui.

   Si la madre sabe que solo uno de ellos dice la verdad, ¿quién es el culpable?

   A) Carlos B) Luis
   C) Miguel
   D) Esteban E) No se puede precisar

7. Cierto día cuatro hermanos comentan sobre el número de hijos que tienen:

- **Abel:** "Yo no tengo tres hijos",
- **Beto:** "Yo no tengo cuatro hijos",
- **Carlos:** "Yo tengo cuatro hijos", y
- **Daniel:** "Yo no tengo solo dos hijos".

Si se sabe que uno de ellos tiene solo tres hijos y los demás cuatro; además, que solo uno de ellos miente, ¿quién miente y quién tiene tres hijos respectivamente?

A) Beto y Daniel B) Abel y Beto
C) Beto y Carlos
D) Carlos y Beto E) Daniel y Abel

8. Cuatro amigas de 28, 30, 31 y 32 años de edad conversaban lo siguiente:

- **Ana:** "Yo tengo 28 años".
- **Beatriz:** "Ana tiene 30 años".
- **Carmen:** "Yo tengo 31 años".
- **Daniela:** "Yo tengo 30 años".

Si solo una de ellas miente y las otras dicen la verdad, hallar la suma de las edades de Ana y Beatriz.

A) 60 años B) 58 años C) 59 años
D) 61 años E) 62 años

9. Pedro, Juan y Luis fueron evaluados en tres asignaturas: Matemáticas, Química y Física. Cada uno aprobó solo un curso distinto al que aprobaron los otros dos. Al ser interrogados por sus padres, ellos hicieron las siguientes afirmaciones:

- **Pedro:** Juan aprobó Matemáticas.
- **Luis:** Yo aprobé Física.
- **Juan:** Luis aprobó Química.

Se sabe que el que aprobó Matemática siempre dice la verdad, y el que aprobó Química siempre miente, entonces indique quién aprobó Física, Química y Matemáticas respectivamente.

A) Pedro – Juan – Luis
B) Juan – Luis – Pedro
C) Luis – Pedro – Juan
D) Luis – Juan – Pedro
E) Pedro – Luis – Juan

10. Jacinto dispone solo de 4 monedas de S/ 5, S/1, S/2 y S/0,5 las cuales repartió entre sus cuatro hijos. Si se sabe que:

- **Carlos** dijo: "yo recibí S/5",
- **Andrés** dijo: "yo recibí S/1",
- **Juan** dijo: "Carlos recibió S/0,5" y
- **Beto** dijo: "Yo recibí S/ 0,5".

Si solo uno de ellos miente y los demás dicen la verdad, ¿cuánto suman las canti-dades que recibiron Carlos y Beto?

A) S/6 B) S/5,5 C) S/7
D) S/3 E) S/1,5

11. Cinco niñas tienen 2, 4, 6, 8 y 10 monedas, todas de 5 soles. Se sabe que cada una dijo:

- **Ana** : "Yo tengo 6 monedas"
- **Bertha** : "Yo tengo 10 monedas"
- **Carmen** : "Bertha tiene 4 monedas"
- **Doris** : "Yo tengo 8 monedas"
- **Emilia** : "Yo tengo 4 monedas"

Si solamente una de ellas miente y las otras dicen la verdad, ¿cuánto dinero tienen juntas Ana, Carmen y Emilia?

A) S/110 B) S/70 C) S/90
D) S/80 E) S/60

12. En una caja hay cuatro fichas de colores diferentes: azul, verde, amarillo y rojo. Álvaro, Mirna, Paulo y Daniel cogieron una ficha cada uno, aunque no necesariamente en ese orden. Interrogados cada uno contestó:

- **Álvaro:** "Yo tengo la ficha de color azul"
- **Mirna:** "Yo tengo la ficha de color verde"
- **Paulo:** "Yo tengo la ficha de color verde"
- **Daniel:** "Mirna tiene la ficha de color rojo"

Si solo uno de ellos miente, ¿quiénes tienen las fichas de color amarillo y azul, respectivamente?

A) Daniel y Álvaro B) Paulo y Mirna
C) Álvaro y Paulo
D) Mirna y Álvaro E) Paulo y Álvaro

13. Cuatro hermanas son interrogadas por su madre, pues una de ellas se comió los chocolates.

- **Carmen** : "Vanesa fue"
- **Vanesa** : "Mercedes fue"
- **Mercedes** : "Vanesa miente al decir que fui yo".
- **Paquita** : "Yo no fui"

La madre sabe que solo una de ellas dice la verdad. ¿Quién se comió el chocolate y quién dice la verdad respectivamente?

A) Carmen y Vanesa
B) Vanesa y Paquita
C) Paquita y Mercedes
D) Mercedes y Vanesa
E) Carmen y Mercedes

14. Xavier, Yago y Zenón asaltaron una joyería de la que robaron dinero y joyas, y se pusieron de acuerdo para ocultar un maletín con el dinero y otro con las joyas. Posteriormente fueron capturados y sus declaraciones fueron:

- **Xavier:** "el maletín con el dinero lo tiene Zenón"
- **Yago:** "el maletín con el dinero lo tengo yo"
- **Xavier:** "el maletín con las joyas lo tiene Yago"
- **Zenón:** "el maletín con las joyas lo tiene Xavier".

Si los tres mienten siempre, ¿quién tienen el maletín con el dinero y quién el maletín con las joyas, respectivamente?

A) Xavier – Yago B) Yago – Xavier
C) Yago – Zenón
D) Xavier – Zenón E) Zenón – Yago

15. Álex, Beto, César y David han competido en una carrera. Al preguntarle a cada uno quién fue el ganador, ellos respondieron lo siguiente:

- **Álex:** Ganó David.
- **Beto:** Yo no gané.
- **César:** Álex miente.
- **David:** Ganó César.

Si solo es cierta una de estas cuatro afirmaciones, ¿quién ganó y quién dice la verdad, respectivamente?

A) César y David B) Álex y Beto
C) César y Álex
D) Beto y César E) Beto y David

16. Cuatro amigos juegan fulbito y, por casualidad, uno de ellos rompió la luna de la casa de un vecino, quien sale de su casa enojado y pregunta: ¿Quién ha sido? Las respuestas fueron las siguientes:

- **Andrés:** Yo no fui.
- **Carlos:** Darío no fue.
- **Darío:** Yo no participé en el juego.
- **Rubén:** Fue Andrés.

Si se sabe que solo uno de ellos dijo la verdad, ¿quién fue el culpable?

A) Darío B) Andrés C) Carlos
D) Rubén E) Aldo

17. Hay un solo anillo y tres cajas cerradas de diferente color, rotuladas con los siguientes enunciados:

- **Caja azul:** El anillo no está aquí.
- **Caja verde:** El anillo no está en la caja roja.
- **Caja roja:** El anillo está aquí.

Si solo uno de los enunciados es cierto, ¿en qué caja se encuentra el anillo?

A) caja azul
B) caja verde
C) caja roja
D) En ninguna de las tres cajas
E) no se puede determinar

18. Un excursionista que se extravió en la selva escucha una conversación entre dos lugareños con los que se encontró.

- **Carlos:** Hoy es domingo.
- **Ana:** Ayer fue domingo.
- **Carlos:** es verano.

Si se sabe que el varón siempre miente los lunes, miércoles y viernes, y dice la verdad los demás días; mientras que la mujer miente los martes, Jueves y sábados, y dice la verdad los demás días, entonces sobre el día en que se realizó la conversación qué se puede concluir.

A) Es un domingo de verano.
B) Es un lunes de verano.
C) Es un lunes, pero no es verano.
D) Falta información.
E) Es domingo, pero no es verano.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del
Team Calapenshko,
el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**,
búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

19. En el curso de Biología, el profesor formó 4 grupos con los alumnos asistentes para que por grupo observen una célula con el microscopio. Una vez que terminaron de observarla, el profesor se da cuenta de que el microscopio está roto e interroga a cada grupo para conocer cuál fue el que la rompió, a lo que contestaron:

- **Representante del grupo 1**: El grupo 2 fue.
- **Representante del grupo 2**: El grupo 3 fue.
- **Representante del grupo 3**: El grupo 2 miente.
- **Representante del grupo 4**: Nosotros no fuimos.

Si solo el representante de un grupo dice la verdad, ¿que grupo o grupos es el culpable?

A) grupo 1 B) grupo 2 C) grupo 3
D) grupo 4 E) grupos 1 y 2

20. Los alumnos Abel, Juan y Darío responden una evaluación de tres preguntas: cada pregunta tiene dos posibles respuestas, verdadero (V) o falso (F). Sus respuestas se muestran en el cuadro adjunto.

	Abel	Juan	Darío
1era. pregunta	V	F	F
2da. pregunta	F	V	V
3era. pregunta	V	V	F

Se sabe que uno de ellos contestó correctamente todas las preguntas, otro se equivocó en todas sus respuestas y el tercero falló solo en una respuesta. ¿Cuál fue el orden de mérito de dichos alumnos?

A) Darío, Juan y Abel B) Darío, Abel y Juan
C) Juan, Darío y Abel
D) Abel, Juan y Darío E) Abel, Darío y Juan

21. Nilda, Lucía, Miriam, Sonia y Ángela son amigas y se sabe que solo una de ellas es casada. Al preguntarseles quién es la casada, ellas respondieron:

- **Nilda:** Lucía es la casada.
- **Lucía:** Miriam es la casada.
- **Miriam:** Ángela es la casada.
- **Sonia:** Yo no soy casada.
- **Ángel:** mintió cuando dijo que yo soy casada.

Si solamente es cierta una de las afirmaciones, ¿quién es la casada?

A) Lucía B) Miriam C) Nilda
D) Sonia E) Ángela

22. Aldo, Beto, Carlos y Darío son los únicos participantes en una carrera. Cuando un periodista, que había llegado tarde, les preguntó en que puesto habían llegado, respondieron así:

- **Aldo:** Darío fue primero y Beto fue segundo.
- **Beto:** Darío fue segundo y Carlos fue tercero.
- **Darío:** Carlos fue último y Aldo segundo.

Si cada uno dijo una afirmación verdadera y una afirmación falsa, además no hubo empates, ¿quién gano la carrera?

A) Aldo
B) Beto
C) Carlos
D) Darío
E) No se puede determinar

23. De las cinco frases que se indican, determine cuántas son falsas.

- Aquí hay exactamente dos frases falsas.
- Aquí hay exactamente una frase falsa.
- Aquí hay exactamente dos frases verdaderas.
- Aquí hay exactamente una frase verdadera.
- Todas estas frases son falsas.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

24. Cuatro amigos cuyas edades son: 10; 20; 30 y 40 años comentan sobre estas.

- **Javier:** Nací 20 años antes que Luis.
- **Luis:** Tengo 20 años.
- **Carlos:** Tengo el doble de la edad de Javier.
- **Darío:** Soy menor de edad.

Si solo uno de ellos ha mentido, ¿cuánto suman las edades de Carlos y Darío?

A) 20 años B) 30 años C) 40 años
D) 60 años E) 50 años

25. Tres amigos se sientan en una banca de 3 asientos y comentan lo siguiente:

- **Andrés:** Braulio y Carlos se sientan juntos.
- **Braulio:** Carlos no está a mi lado.
- **Carlos:** Andrés está a la derecha de Braulio

Se sabe que solo uno de ellos miente y que Braulio no esta sentado en el extremo izquierdo. Indique cuáles de los siguientes enunciados son correctos.

I. Andrés miente.
II. Braulio miente.
III. Carlos está junto a Andrés.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) II y III

26. De Carla, Betty y Jessica se sabe que solo una de ellas miente, y esta es la menor. Si Betty afirma que Carla y Jessica son mentirosas, se concluye que:

A) Carla y Bett son mayores que Jessica.
B) Betty es mayor que Carla.
C) Carla y Jessica son mayores que Betty.
D) Jessica y Betty son mayores que Carla.
E) Betty es mayor que Jessica.

27. Gloria, Karina, Milagros y Juana fueron las únicas participantes de una competencia de natación. Cuando se les preguntó sobre su orden de llegada, ellas afirmaron lo siguiente:

- **Gloria:** Yo llegué en primer lugar.
- **Milagros:** Yo no llegué en segundo ni en tercer lugar.
- **Juana:** Yo llegué antes que Gloria.
- **Karina:** Yo llegué inmediatamente después de Milagros.

Si no hubo empates, además, se conoce que solo una de ellas mintió, ¿quién llegó en tercer lugar?

A) Gloria B) Juana C) Karina
D) Milagros E) No se puede determinar

28. Alicia, Carmen, Elvira y Gina son cuatro amigas. Se sabe que dos de ellas son casadas y siempre dicen la verdad, mientras que las otras dos son viudas y siempre mienten. Si Carmen dijo que Gina es viuda y esta comentó que Alicia y Carmen son casadas, entonces es cierto que:

A) Carmen y Alicia son viudas.
B) Gina dijo la verdad.
C) Elvira siempre miente.
D) Alicia es casada.
E) Carmen y Elvira son casadas.

29. Tres personas (A, B y C), algunas de las cuales son serias y otras son bromistas, tienen la siguiente conversación.

- **A:** C y yo estamos serias.
- **B:** C no es seria.
- **C:** B es seria y A es una bromista.

Si las serias siempre dicen la verdad y las bromistas siempre mienten, determinen que tipo de personas son A y B respectivamente

A) seria – seria.
B) seria – bromista
C) bromista – seria
D) bromista – bromista
E) no se puede determinar

30. Un viajero llega a una isla en la que todos los habitantes dicen la verdad los lunes, miércoles, viernes y domingos, mientras los demás días mienten. El viajero mantiene una conversación con un nativo de la isla.

- **Viajero:** ¿Qué día es hoy?
- **Nativo:** sábado
- **Viajero:** ¿qué día de la semana será mañana?
- **Nativo:** miércoles

¿Que día de la semana es realmente?

A) jueves B) lunes C) viernes
D) sábado E) Martes

31. Carlos, el enamorado de Aurora, mentía indefectiblemente los martes, jueves y sábados, y los demás días decía la verdad.

- **Carlos:** Aurora, salgamos a pasear hoy.
- **Aurora:** No
- **Carlos:** ¿Por qué no, si hoy es Sábado?
- **Aurora:** No... tal vez mañana.
- **Carlos:** Mañana no podremos porque será miércoles, y tengo que estudiar.

¿En que día de la semana ocurrió esta conversación?

A) lunes B) martes C) Jueves
D) viernes E) sábado

32. El inspector Aníbal, a bordo de su lancha, llegó a una isla donde los forasteros siempre mienten y los nativos siempre dicen la verdad. Mientras fondeaba cerca de la costa, vio a tres hombres paseando por la playa. ¿Son ustedes nativos o forasteros? - les gritó. Uno de ellos contestó, pero el ruido del motor le impidió oírlo. El inspector volvió a preguntar y el segundo hombre respondió. Ha dicho que es nativo y yo también lo soy. entonces el tercero añadió. El primero es forastero y el segundo también lo es. ¿Cuántos eran forasteros y qué era el tercero que contestó?

A) 3; nativo B) 2; nativo C) 2; forastero
D) 1; forastero E) 1; nativo

33. Gérman, Ernesto, David, Renzo, Paulo y Walter son sospechosos de un robo, el cual fue realizado por uno de ellos. Al ser interrogados, manifestaron lo siguiente:

- **Germán:** Renzo fue.
- **Ernesto:** Walter es inocente.
- **David:** Paulo no fue.
- **Renzo:** El culpable es Ernesto.
- **Paulo:** Germán dice la verdad.
- **Walter:** David miente.

Si tres de ellos mienten y los otros tres dicen la verdad, ¿quién cometió el robo?

A) Paulo B) Ernesto C) David
D) Renzo E) Walter

34. El señor Márquez me comentaba que cada uno de sus hijos decía dos verdades y una mentira cuando alguien les pedía que se presentarán. Sus nombres son Justo, José y Pedro. Hace poco los evalúe y la respuesta fue:

- **1er. hijo:** Soy José; hoy es lunes y hace frío.
- **2do. hijo:** Soy Justo; hoy es Lunes y hace calor.
- **3er. hijo:** Soy Pedro, tengo 18 años y hace frío en este día. ¿Cómo se llama el primer hijo?

A) Justo B) Pedro C) José
D) Juan E) Faltan datos

35. Rebeca vive en el mismo edificio que yo, pero no sé en que departamento. Le pregunté a cuatro de mis vecinos por el número de su departamento y ellos afirman:

- **Vecino 1:** El número de su departamento es 9.
- **Vecino 2:** El número de su departamento es primo.
- **Vecino 3:** El número de su departamento es par.
- **Vecino 4:** El número de su departamento es 15.

El portero no quiso decirme en qué departamento vive Rebeca, pero me aseguró que exactamente dos de las afirmaciones anteriores son falsas.
¿En qué departamento vive Rebeca?

A) 1 B) 15 C) 3
D) 9 E) 2

36. Al final de una carrera, los cuatro participantes afirman lo siguiente:

- **Luis:** No llegué en primer ni en último lugar.
- **Carmen:** No llegué última.
- **Rosa:** Yo fui la primera en llegar.
- **Rubén:** Yo fui el último en llegar.

Si solo uno de los participantes mintió y no hubo empates,¿quién ganó la carrera?

A) Luis B) Rubén
C) Rosa
D) Carmen E) no se puede determinar

37. Ariel, Beatriz, Marcos y Gabriela están sentados en una fila de 4 sillas numeradas en orden consecutivo de 8 al 11. Nicolás los mira y dice:

- Beatriz está al lado de Marcos.
- Ariel está entre Sandra y Marcos.

Pero sucede que las dos afirmaciones que hizo Nicolás son falsas. En realidad, Beatriz está en la silla numerada con 10. ¿Quién esta en la silla numerada con el 9

A) Marcos B) Beatriz C) Ariel
D) Gabriela E) Nicolás

38. En una reunión, Ana, Belén y Carla mantienen la siguiente conversación

- **Ana:** Nací 20 años antes que Carla.
- **Belén:** Tengo 24 años.
- **Carla:** Tengo 16 años de edad y le duplico la edad a Belén.

Si de las mencionadas solo hay una persona que es mayor de edad y solo una de ellas está mintiendo, halle la suma de las edades, en años, de Belén y Ana.

A) 44 B) 36 C) 60
D) 28 E) 40

39. Se conoce que Luis siempre dice la verdad y que Carlos siempre miente. Ambos comentan lo siguiente:

- **Luis:** No es verdad que María no ha perdido un lapicero.
- **Carlos:** No estoy mintiendo al decir que Juan no se encontró un lapicero.

Indique la proposición correcta.

A) María no perdió un lapicero y Juan se encontró un lapicero.
B) María no perdió un lapicero y Juan se encontró el lapicero de María.
C) María no perdió un lapicero y Juan no se encontró un lapicero.
D) María perdió un lapicero y Juan se encontró un lapicero.
E) María perdió un lapicero y Juan no encontró el lapicero de María.

40. Los habitantes de un pueblo agricultor tenían una rara costumbre: indefectiblemente los meses de mayor lluvia (marzo, junio y noviembre) siempre decían mentiras y los demás meses de sequía decían la verdad. En una oportunidad, llegó un misionero que se había extraviado años atrás, y al informarse de la rara costumbre del pueblo, entabló la siguiente conversación con un habitante, con la finalidad de saber en qué mes se encontraba.

- ¿Estamos en el mes de noviembre?
- Sí
- ¿Podré visitarlos el próximo mes?
- No, porque es abril, mes de inundaciones.

¿En qué mes ocurre dicha conversación?

A) enero B) marzo C) junio
D) noviembre E) septiembre

41. Andrés, Bernardo, Carlos y Darío toman una ficha diferente cada uno (las fichas están numeradas del 2 al 5) y dicen:

- **Andrés:** Yo tengo la ficha con el número 4
- **Bernardo:** El número de mi ficha es el doble que el de Darío.
- **Carlos:** Andrés no tiene la ficha con el número 4
- **Darío:** Carlos tiene la ficha con el número 5.

Si solo uno miente, ¿cuánto suman los números de las fichas de Carlos y Darío?

A) 9 B) 7 C) 5
D) 8 E) 6

42. A una conversación asistieron 120 congresistas. De ello, se sabe que:

- cada congresista es honesto o deshonesto (no hay otra posibilidad).
- al menos 2 de los congresistas son honestos.
- dado cualquier tema de congresistas, al menos 1 de los 3 es deshonesto.

¿Cuántos congresistas son deshonestos y cuántos son honestos, respectivamente?

A) 90 y 30 B) 60 y 60 C) 118 y 2
D) 2 y 118 E) 80 y 40

43. En el África, la tribu de los tacas miente solo los lunes, martes y miércoles, y la de los tiquis, los jueves, viernes y sábado. Un día se encontraron un taca y un tiqui, y sostuvieron el siguiente diálogo:

- **Taca:** ¡Hola! ¡Ayer yo mentí!
- **Tiqui:** ¡Hola! ¡Ayer yo también mentí!

¿En que día sucedió este encuentro?

A) martes B) jueves C) domingo
D) viernes E) Miércoles

44. Cuatro niños traviesos comentan acerca de cuántos vidrios rompieron jugando con la pelota. Resultó que rompieron 5; 3; 8 y 10; respectivamente, y cada uno dijo lo siguiente:

- **Alberto:** Juan rompió 5 vidrios.
- **Juan:** Yo rompí 8 vidrios.
- **Pedro:** Alberto rompió 3 vidrios.
- **Luis:** Yo rompí 8 vidrios.

Si dos de ellos mienten y los otros dicen la verdad, ¿cuántos vidrios rompió Alberto?

A) 5 B) 8 C) 3
D) 10 E) 13

45. Hay 45 personas en una fila que pueden ser veraces (dicen siempre la verdad) o mentirosos (siempre mienten). Todos, excepto la primera persona de la fila, dicen que la persona que está delante de él es un mentiroso, y la primera persona de la fila dice que todos los que están detrás de él son mentirosos. ¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

A) ninguno B) 22 C) 23
D) 44 E) 1

46. Ángela, Bertha, Carla, Doris y Elisa son estudiantes de un mismo salón de clases que discuten sobre el orden en que se dictan sus cursos de matemáticas, y cada una da su versión:

- **Ángela:** Geometría se dicta primero; Aritmética, tercero.
- **Bertha:** Álgebra se dicta primero; Lógico Matemático, tercero.
- **Carla:** Lógico Matemático se dicta cuarto; Geometría, tercero.
- **Doris:** Geometría se dicta segundo; Lógico Matemático, primero.
- **Elisa:** Aritmética se dicta primero; Trigonometría, quinto.

Si se sabe que en un día solo se dicta uno de esos cursos y que de las dos afirmaciones que hizo cada estudiante, una es verdadera y la otra es falsa, ¿cuáles son los cursos que se dictan primero y cuarto, respectivamente?

A) Álgebra y Aritmética
B) Álgebra y Geometría
C) Aritmética y Geometría
D) Álgebra y Lógico Matemático.
E) Aritmética y Lógico Matemático.

47. Jorge, Pedro, Ricardo, Diego y Álex han ocasionado un choque múltiple con sus autos, los cuales son de color amarillo, azul, verde, negro y rojo, no necesariamente en ese orden. Al ser interrogados por el policía, ellos hacen tres afirmaciones de las cuáles solo una es verdadera.

- **Jorge:** Mi auto es el azul. el de Diego es verde. El de Álex es el negro.
- **Pedro:** El rojo es mío. El de Álex es el amarillo. El de Jorge es el azul.
- **Ricardo:** El mío es el negro. El amarillo es de Jorge. Diego es dueño del azul.
- **Diego:** Jorge siempre miente. El negro es de Ricardo. El amarillo es de Pedro.
- **Álex:** El mío no es amarillo. El rojo es de Jorge. El verde es de Pedro.

¿De qué colores son los autos de Ricardo y Diego, respectivamente?

A) verde y negro B) negro y amarillo
C) negro y verde
D) rojo y azul E) negro y rojo

48. En un letrero están escritas cuatro proposiciones, tal como se muestra en el siguiente gráfico.

- En este letrero, al menos una proposición es cierta.
- En este letrero al menos dos proposiciones son falsas.
- En este letrero hay exactamente una proposición falsa.
- En este letrero hay exactamente una proposición verdadera.

¿Cuántas proposiciones con seguridad son verdaderas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Ninguna

49. En un aula se ha perdido un celular. Los sospechosos del robo, al ser interrogados por el profesor de RM, declararon lo siguiente:

- **Raúl:** Alfredo es culpable.
- **Alfredo:** Raúl es culpable.
- **Edgar:** Jesús es culpable.
- **Jesús:** Soy culpable.
- **Carlos:** Alfredo es inocente y Raúl culpable.

El profesor sabía que solo uno de ellos mentía y que este no era culpable del robo. ¿Quiénes, con seguridad, son los culpables del grupo?

A) Raúl y Alfredo
B) Jesús, Carlos y Alfredo
C) Jesús y Alfredo
D) Jesús y Raúl
E) Jesús, Raúl y Alfredo

50. Hay tres habitaciones, en una de las cuales hay una dama, en las otras dos hay un tigre, cada habitación tiene un letrero como los que se muestran.

I	II	III
En la habitación II hay un tigre	En esta habitación hay un tigre	En la habitación I hay un tigre

El letrero de la puerta de la habitación en donde está la dama es verdadero y al menos uno de los otros dos letreros es falso. ¿En qué habitación está la dama?

A) I B) II C) III
D) I o II E) II o III

team CALAPENSHKO

Razonamiento Inductivo

CAPACIDADES

- Desarrollar el interés por la resolución de problemas que aparentemente sean difíciles.
- Conocer y utilizar los métodos razonativos como parte de la investigación científica.
- Desarrollar la capacidad lógica-inductiva.
- Dar a conocer la importancia de la inducción matemática como método de demostración matemática.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Una proposición p(n) es verdadera para todos los valores de la variable n si se cumplen las siguientes condiciones:

PASO 1: La proposición p(n) es verdadera para $n = 1$, o bien, p(1) es verdadera.

PASO 2: Hipótesis es Inducción. Se supone que p(k) es verdadera, donde k es un número natural cualesquiera.

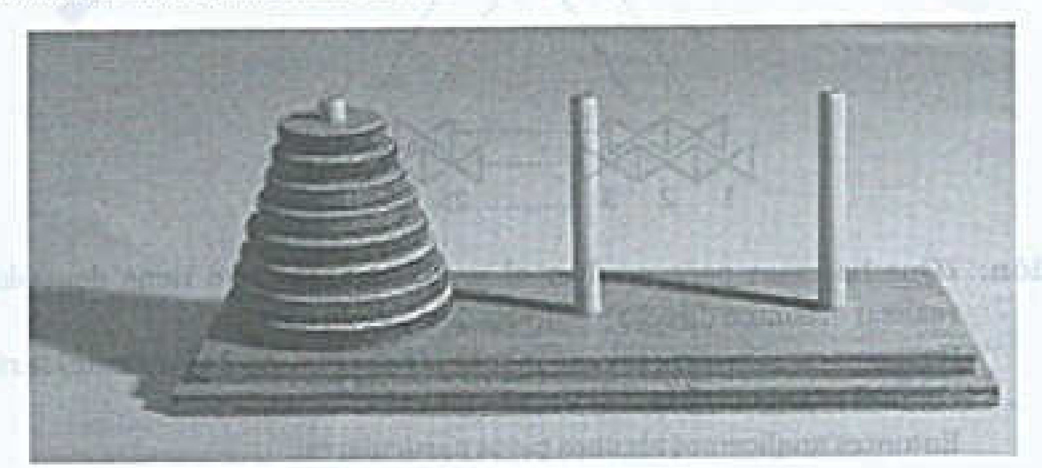
PASO 3: Tesis de Inducción. Se demuestra que $p(k + 1)$ es verdadera, o bien, p(k) verdadera $\rightarrow$ $p(k + 1)$ verdadera.

La técnica de Inducción Matemática consiste en los tres pasos anteriores. Si se necesita demostrar la validez de una proposición p(n) para todos los valores naturales n, entonces es suficiente que se cumplan: Paso 1, paso 2 y paso 3.

Comentario: Intuitivamente la idea anterior se conoce como el "Efecto Dominó". Si imaginamos una fila infinita de fichas de dominó: dispuestas verticalmente y suficientemente próximas una cualquiera de la siguiente, entonces si el volteamiento de la primera ficha provoca el volteamimento de la segunda ficha, por el Principio de Inducción Matemática la fila completa es volteada.

TORRES DE HANOI

Las torres de Hanoi es un juego matemático que consiste en tres varillas verticales y un cierto número de discos que determina la complejidad de la solución.



Están ubicadas como muestra la figura y no puede haber un disco mayor sobre uno menor que él en ningún momento, el juego consiste en pasar todos los discos, uno por uno, de la varilla 1 a la varilla 3, en el menor número de movimientos posibles.

Para comenzar la solución de este juego, se debe realizar diferentes partidas e ir descubriendo una estrategia que nos permita hallar la solución.

LÓGICA INDUCTIVA

La lógica inductiva implica razonar partiendo de hechos particulares para llegar a una conclusión general.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Denominaremos razonamiento inductivo al método que consiste en la aplicación de la lógica inductiva. Veamos los siguientes ejemplos:

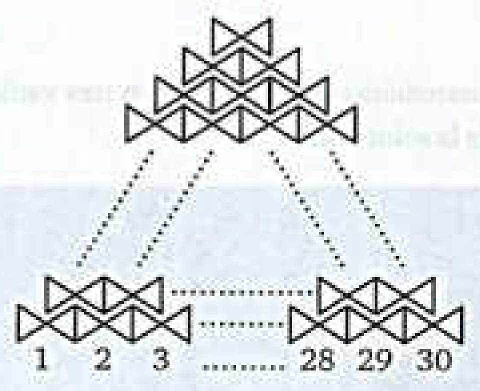
CONCEPTO

Se observan varios casos en los que números que terminan en 5 al ser elevados al cuadrado dan un resultado que termina en 25. A partir de esto podemos llegar a la conclusión que todos los números que terminan en 5 al ser elevados al cuadrado tienen un resultado que termina en 25.

$$15^2 = 225$$
$$35^2 = 1225$$
$$75^2 = 5625$$
$$155^2 = 24025$$
$$205^2 = 42025$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow (\ldots 5)^2 = \ldots 25$$

Ejemplo: La siguiente torre se ha construido con triángulos, ¿cuántos se han utilizado en total?



Resolución: ¿Que hacemos para resolver el problema?, la torre tiene demasiados niveles, realizar el conteo directo resultaría demasiado tedioso.

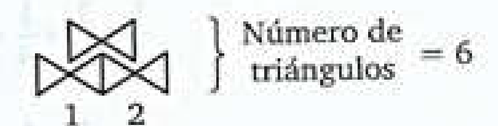
Razonemos: si la torre tuviera menos niveles (1 ó 2 ó 3 solamente) sería fácil contar cuántos triángulos hay.

Entonces analicemos algunos casos particulares:

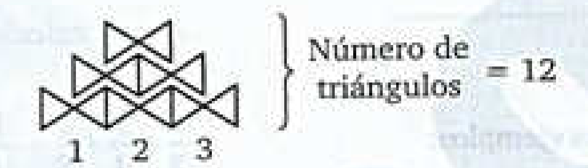
Para 1 nivel:

1 } Número de triángulos = 2

Para 2 niveles:



Para 3 niveles:



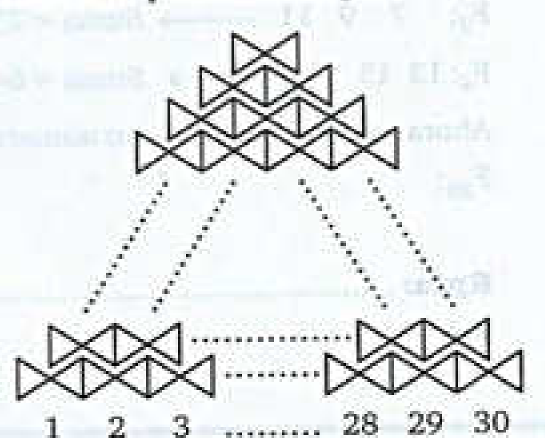
Ahora analicemos los resultados obtenidos en cada caso para encontrar una secuencia que nos permita encontrar el resultado en toda la figura.

1 } Número de triángulos $= 2 = 1 \times 2$

1 2 } Número de triángulos $= 6 = 2 \times 3$

1 2 3 } Número de triángulos $= 12 = 3 \times 4$

Se observa que los resultados se obtienen multiplicando el último número de la base de la figura por su consecutivo. De acuerdo a esto ya podemos calcular el resultado para toda la figura.



Número de triángulos $= 30 \times 31 = 930$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del
Team Calapenshko,
el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

03 de setiembre del 2020

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Observa los siguientes ejemplos:

$\underbrace{(11)^2}_{2\text{ cifras}} = 121$

$\underbrace{(111)^2}_{3\text{ cifras}} = 12321$

$\underbrace{(1111)^2}_{4\text{ cifras}} = 1234321$

Ahora calcula el resultado de:

$\underbrace{(111111111)^2}_{9\text{ cifras}} =$ ....

2. Observa los siguientes ejemplos:

$33^2 = 1089$

$333^2 = 110889$

$3333^2 = 11108889$

$33333^2 = 1111088889$

Ahora calcula el resultado de:

$\underbrace{33333.....33^2}_{20\text{ cifras}} =$ ....

3. Observa los siguientes ejemplos:

$99^2 = 9801$

$999^2 = 998001$

$9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$

Ahora calcula el resultado de:

$\underbrace{99999.....99^2}_{25\text{ cifras}} =$ ....

4. Observa los siguientes ejemplos:

$95^2 = 9025$

$995^2 = 990025$

$9995^2 = 99900025$

$99995^2 = 9999000025$

Ahora calcula el resultado de:

$\underbrace{99999.....95^2}_{30\text{ cifras}} =$ ....

5. Observa los siguientes ejemplos:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

Ahora, calcula el resultado de:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+......+\frac{1}{1024}=$ ....

6. Observa los siguientes ejemplos:

$5^3 = 125$

$5^5 = 3125$

$5^7 = 78125$

$5^9 = 1953125$

Ahora, calcula (a + b + c) en:

$5^{35} = \overline{.........abc}$

Rpta: ....

7. Observa los siguientes ejemplos:

F_1: 1 ⟶ Suma = 1

F_2: 3 5 ⟶ Suma = 8

F_3: 7 9 11 ⟶ Suma = 27

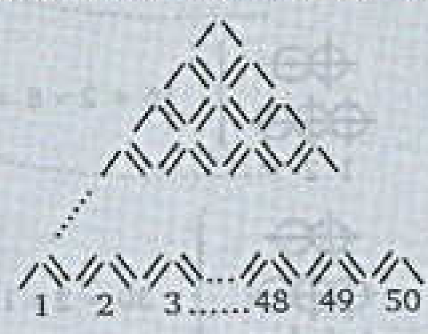
F_4: 13 15 17 19 ⟶ Suma = 64

Ahora calcula la suma de los números en F_{20}:

Rpta: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 ¿Cuántos palitos en total se cuentan en la siguiente figura?



Resolución:

Número de Palitos

Caso 1:

$2 = 2 \times 1^2$

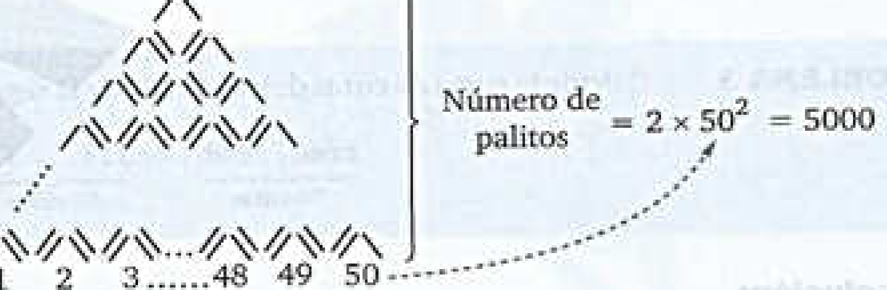
Caso 2:

$8 = 2 \times 2^2$

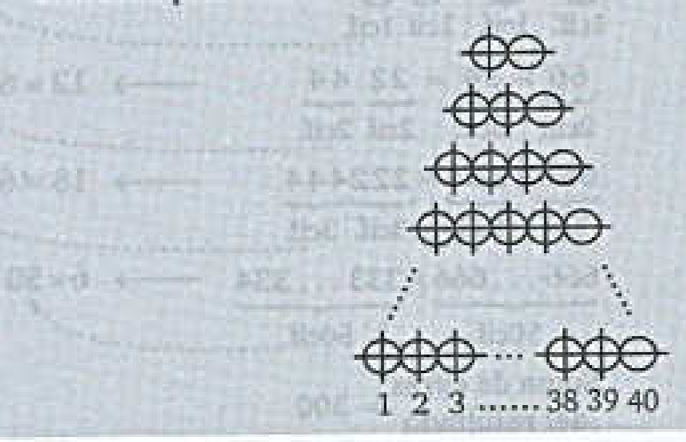
Caso 3:

$18 = 2 \times 3^2$

De acuerdo a los resultados obtenidos en cada caso, el resultado para toda la figura será:



PROBLEMA 2 ¿Cuántos puntos de intersección se cuentan en la siguiente figura?



Resolución:

Caso 1: Número de puntos de intersección

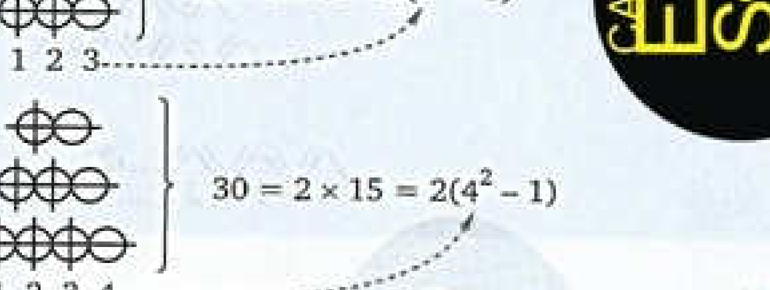
$6 = 2 \times 3 = 2(2^2 - 1)$

Caso 2:

1 2 3

$16 = 2 \times 8 = 2(3^2 - 1)$

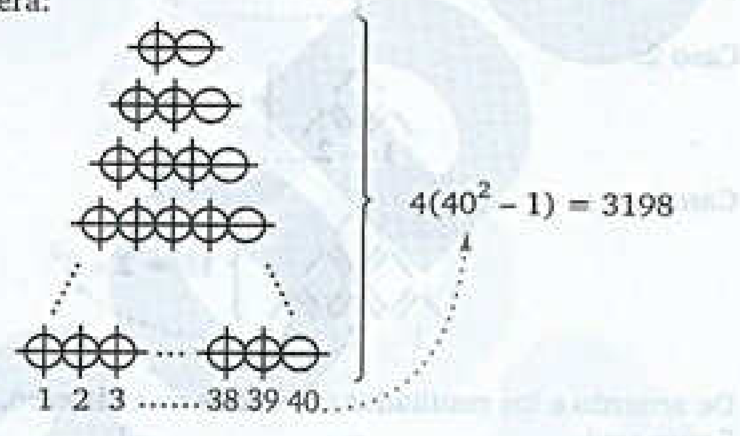
Caso 3:



$30 = 2 \times 15 = 2(4^2 - 1)$

1 2 3 4

De acuerdo a los resultados obtenidos en cada caso, el resultado para toda la figura será:



$4(40^2 - 1) = 3198$

PROBLEMA 3 Calcule la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

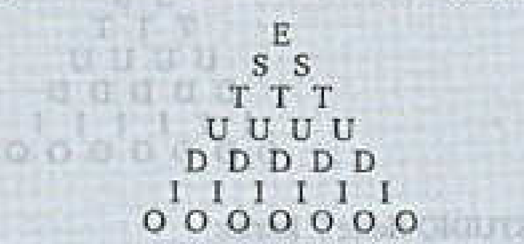
$$\underbrace{666\ldots666}_{\text{50 cifras}} \times \underbrace{333\ldots334}_{\text{50 cifras}}$$

Resolución:

	Resultado	Suma de cifras
Caso 1:	$\underbrace{6}_{\text{1cif.}} \times \underbrace{4}_{\text{1cif.}} = \underbrace{2}_{\text{1cif.}}\underbrace{4}_{\text{1cif.}}$	$\longrightarrow 6 = 6 \times 1$
Caso 2:	$\underbrace{66}_{\text{2cif.}} \times \underbrace{34}_{\text{2cif.}} = \underbrace{22}_{\text{2cif.}}\underbrace{44}_{\text{2cif.}}$	$\longrightarrow 12 = 6 \times 2$
Caso 3:	$\underbrace{666}_{\text{3cif.}} \times \underbrace{344}_{\text{3cif.}} = \underbrace{222}_{\text{3cif.}}\underbrace{444}_{\text{3cif.}}$	$\longrightarrow 18 = 6 \times 3$
Piden:	$\underbrace{666\ldots666}_{\text{50cif.}} \times \underbrace{333\ldots334}_{\text{50cif.}}$	$\longrightarrow 6 \times 50$

$$\text{Suma de cifras del resultado} = 300$$

PROBLEMA 4 En el siguiente arreglo, ¿de cuántas formas distintas se puede leer ESTUDIO, considerando igual distancia de una letra a otra en cada lectura?



Resolución:

E
S S
T T T
U U U U
D D D D D
I I I I I I
O O O O O O O

En líneas punteadas se muestran 2 de las formas de leer ESTUDIO, pero hay tantas que contarlas sin ningún criterio, a parte de resultar tedioso, nos puede llevar a una respuesta equivocada.

Es por eso que para hacer el conteo aplicaremos el razonamiento inductivo.

Caso 1: Vamos a leer "ES":

E
S S

Nº de formas de leer "ES" $= 2 = 2^{2-1}$ (Nº de letras de la palabra)

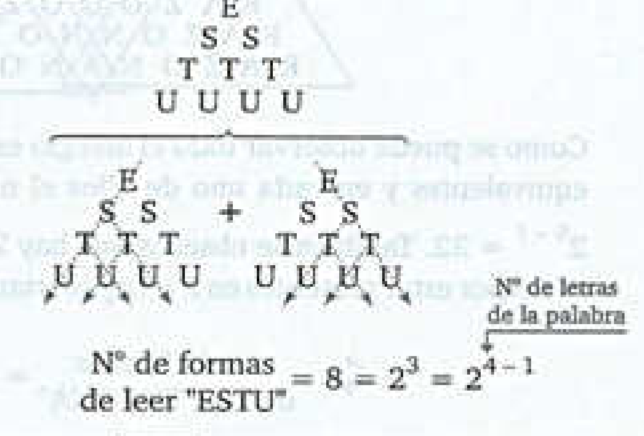
Caso 2: Vamos a leer "EST":

E
S S
T T T

Nº de formas de leer "EST" $= 4 = 2^2 = 2^{3-1}$ (Nº de letras de la palabra)

Caso 3: Vamos a leer "ESTU":

E
S S
T T T
U U U U



Nº de formas de leer "ESTU" $= 8 = 2^3 = 2^{4-1}$

De acuerdo a lo que observamos ya podemos dar respuesta a la pregunta.

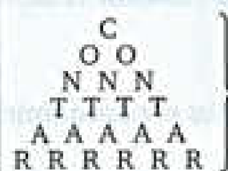
E
S S
T T T
U U U U
D D D D D
I I I I I I
O O O O O O O

como ESTUDIO tiene 7 letras:

$$\Rightarrow \begin{array}{c}\text{N° de formas}\\ \text{de leer "ESTUDIO"}\end{array} = 2^{7-1} = 64$$

Observación 1:

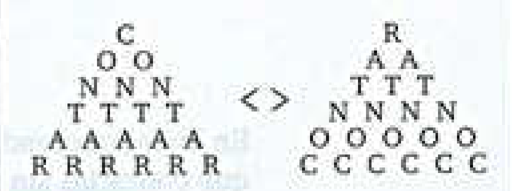
Este criterio para contar el número de formas de leer una palabra se puede generalizar para cualquier palabra con cuyas letras se forma un arreglo triangular como el mostrado en el problema. Veamos:



Como "CONTAR tiene 6 letras:

$$\begin{array}{c}\text{N° de formas}\\ \text{de leer "CONTAR"}\end{array}$$
$$2^{6-1} = 32$$

Observación 2:

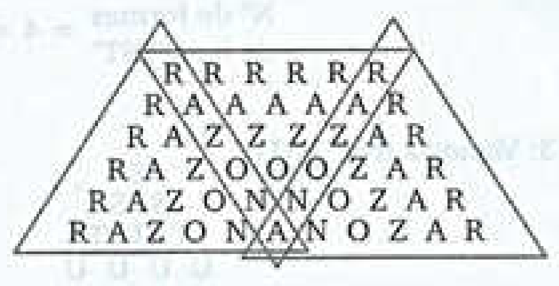


Estos dos arreglos son equivalentes, es decir que el número de formas de leer es el mismo.

PROBLEMA 5 En el siguiente arreglo, ¿de cuántas formas distintas se puede leer RAZONA, considerando igual distancia de una letra a otra en cada lectura?

R R R R R R
R A A A A A A R
R A Z Z Z Z Z A R
R A Z O O O O Z A R
R A Z O N N N O Z A R
R A Z O N A N O Z A R

Resolución:



Como se puede observar todo el arreglo está formado por 3 arreglos triangulares equivalentes y en cada uno de ellos el número de formas de leer RAZONA es $2^{6-1} = 32$. También se observa que hay 2 palabras RAZONA que se han leído 2 veces por estar presentes en 2 arreglos triangulares.

$$\Rightarrow \begin{array}{c}\text{N° de formas}\\ \text{de leer "RAZONA"}\end{array} = 3(3^5) - 2 = 94$$

PROBLEMA 6 Calcular la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$A = \sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{100\text{ CFS}} + \underbrace{444\ldots44}_{50\text{ CFS}} + 1}$$

Resolución:

Suma de cifras del resultado

Caso 1: $\sqrt{\underbrace{11}_{2cif.} + \underbrace{4}_{1cif.} + 1} = \sqrt{16} = \underbrace{4}_{1cif.} \rightarrow 4 = 3(1) + 1$

Caso 2: $\sqrt{\underbrace{1111}_{4cif.} + \underbrace{44}_{2cif.} + 1} = \sqrt{1156} = \underbrace{34}_{2cif.} \rightarrow 7 = 3(2) + 1$

Caso 3: $\sqrt{\underbrace{111111}_{6cif.} + \underbrace{444}_{3cif.} + 1} = \sqrt{111556} = \underbrace{334}_{3cif.} \rightarrow 10 = 3(3) + 1$

De acuerdo a los resultados obtenidos en cada caso:

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{100cif.} + \underbrace{444\ldots44}_{50cif.} + 1} = \underbrace{333\ldots34}_{50cif.} \rightarrow 3(50) + 1$$

$\therefore$ Suma de cifras del resultado $= 151$

PROBLEMA 7 Calcular la suma de todos los números del siguiente arreglo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 20 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 21 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 22 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & 23 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 20 & 21 & 22 & 23 & \ldots & 39 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Caso 1: $\begin{bmatrix} 1 & ② \\ ② & 3 \end{bmatrix}$ Suma $= 8 = 2^3$

Caso 2: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & ③ \\ 2 & 3 & 4 \\ ③ & 4 & 5 \end{bmatrix}$ Suma $= 27 = 3^3$

Caso 3: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & ④ \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ ④ & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ Suma $= 64 = 4^3$

De acuerdo a los resultados obtenidos en cada caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 20 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 21 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 22 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 23 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 20 & 21 & 22 & 23 & \dots & 39 \end{bmatrix} \quad \text{Suma} = 20^3 = 8000$$

PROBLEMA 8 Si: $\sqrt{\overline{a4}\times\overline{a5}\times\overline{a6}\times\overline{a7}+1} = 54\times\overline{a7}+1$

Calcule: $\underbrace{a+\overline{aa}+\overline{aaa}+\dots}_{a \text{ sumandos}}$

Resolución: Veamos tres casos particulares teniendo en cuenta la forma del problema

- $\sqrt{1\times2\times3\times4+1} = \sqrt{25} = 5 = 1\times4+1$
- $\sqrt{2\times3\times4\times5+1} = \sqrt{121} = 11 = 2\times5+1$
- $\sqrt{3\times4\times5\times6+1} = \sqrt{361} = 19 = 3\times6+1$

$\vdots$

NOTA "S"
Si el problema tiene esta forma inductiva de los 4 factores consecutivos, se toma el menor de ellos se multiplica por el mayor y se le suma 1.

Luego: $\sqrt{\overline{a4}\times\overline{a5}\times\overline{a6}\times\overline{a7}+1} = 54\times\overline{a7}+1$

$$\overline{a4}\times\overline{a7}+1 = 54\times\overline{a7}+1$$

$$\overline{a4}\times\overline{a7} = 54\times\overline{a7}$$

$$\overline{a4} = 54$$

$$a = 5$$

Nos piden: $\underbrace{a+\overline{aa}+\overline{aaa}+\dots}_{a \text{ sumandos}} = \underbrace{5+55+555+\dots}_{5 \text{ sumandos}}$

$$\begin{array}{r} 5\ + \\ 55 \\ 555 \\ 5555 \\ 55555 \\ \hline \therefore\ 61725 \end{array}$$

PROBLEMA 9 Calcule el valor de la siguiente expresión:

$$A=\frac{\overbrace{(1\times3+3\times5+5\times7+...)}^{\text{n sumandos}}+n}{\underbrace{1^2+2^2+3^2+...}_{\text{n sumandos}}}$$

Resolución: Para n = 1 → $A=\frac{\overbrace{(1\times3)}^{\text{1 sumando}}+1}{\underbrace{1^2}_{\text{1 sumando}}}=4$

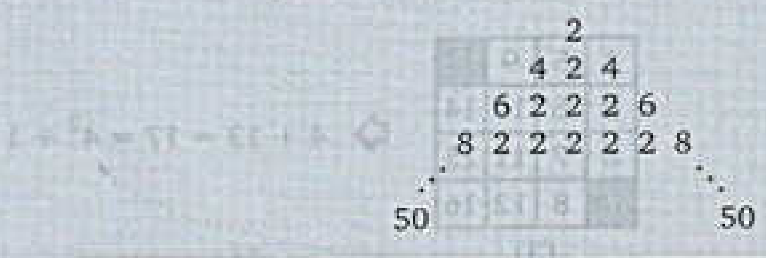
Para n = 2 → $A=\frac{\overbrace{(1\times3+3\times5)}^{\text{2 sumandos}}+2}{\underbrace{1^2+2^2}_{\text{2 sumandos}}}=4$

Para n = 3 → $A=\frac{\overbrace{(1\times3+3\times5+5\times7)}^{\text{3 sumandos}}+3}{\underbrace{1^2+2^2+3^2}_{\text{3 sumandos}}}=4$

De acuerdo a los resultados obtenidos:

$$A=\frac{\overbrace{(1\times3+3\times5+5\times7+...)}^{\text{n sumandos}}+n}{\underbrace{1^2+2^2+3^2+...}_{\text{n sumandos}}}=4$$

PROBLEMA 10 Calcule la suma de todos los números en el siguiente arreglo numérico.



```
            2
          4 2 4
        6 2 2 2 6
      8 2 2 2 2 2 8
    .               .
  50                 50
```

Resolución: Caso 1:

```
  2
4 2 4
```

⇨ Suma = 12 = 4 × 3

Caso 2:

```
    2
  4 2 4
6 2 2 2 6
```

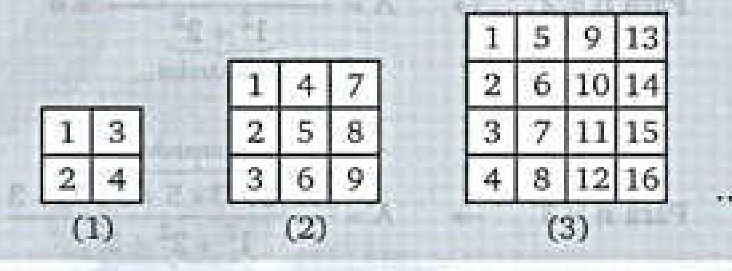
⇨ Suma = 30 = 6 × 5

Caso 3:

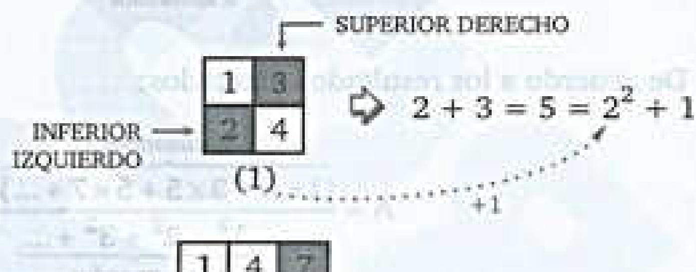
2
4 2 4
6 2 2 2 6
8 2 2 2 2 2 8 ⇨ Suma = 56 = 8 × 7

De acuerdo a los resultados obtenidos:

PROBLEMA 11 En la siguiente secuencia de cuadrados, calcule la suma de los números que irán en los casilleros inferior izquierdo y superior derecho en el cuadrado número (40)



Resolución:



1	4	7
2	5	8
3	6	9

(2) ⇨ $3 + 7 = 10 = 3^2 + 1$ (+1)

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

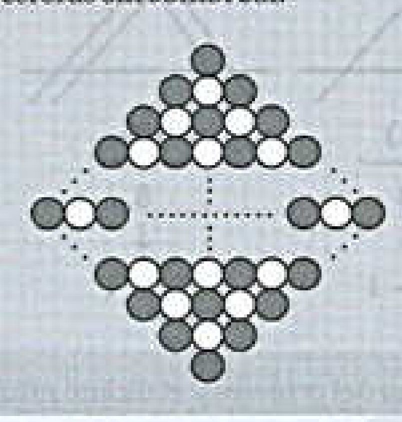
(3) ⇨ $4 + 13 = 17 = 4^2 + 1$ (+1)

⋮

			⋯	y
⋮				⋮
x			⋯	

(40) ⇨ $x + y = 41^2 + 1 = 1682$

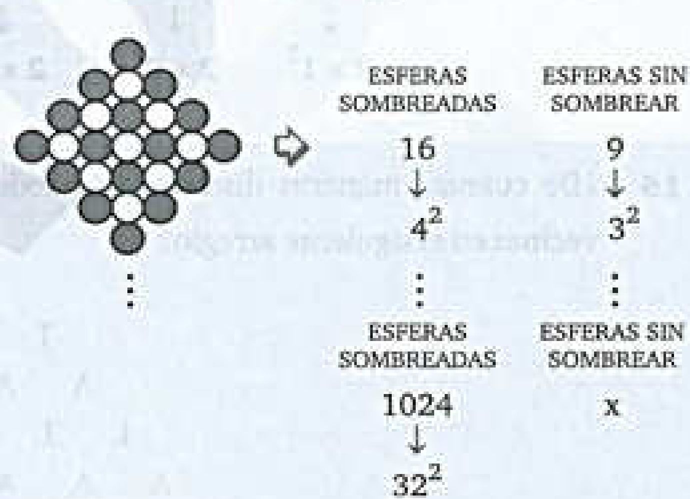
PROBLEMA 12 En la siguiente figura se han contado, en total, 1024 esferas sombreadas. Calcule el número total de esferas sin sombrear.



Resolución: Caso 1:

Caso 2:

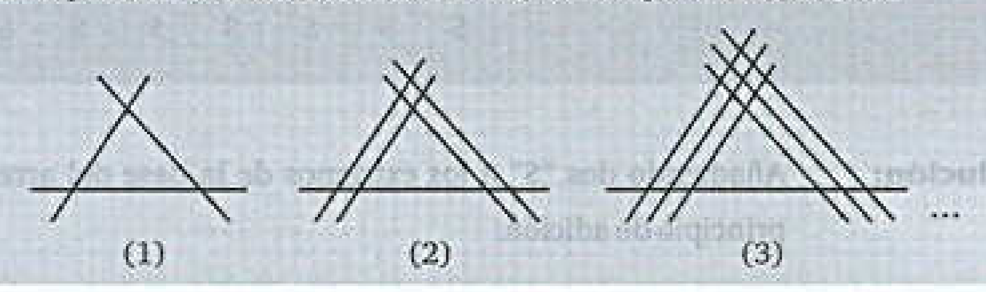
Caso 3:



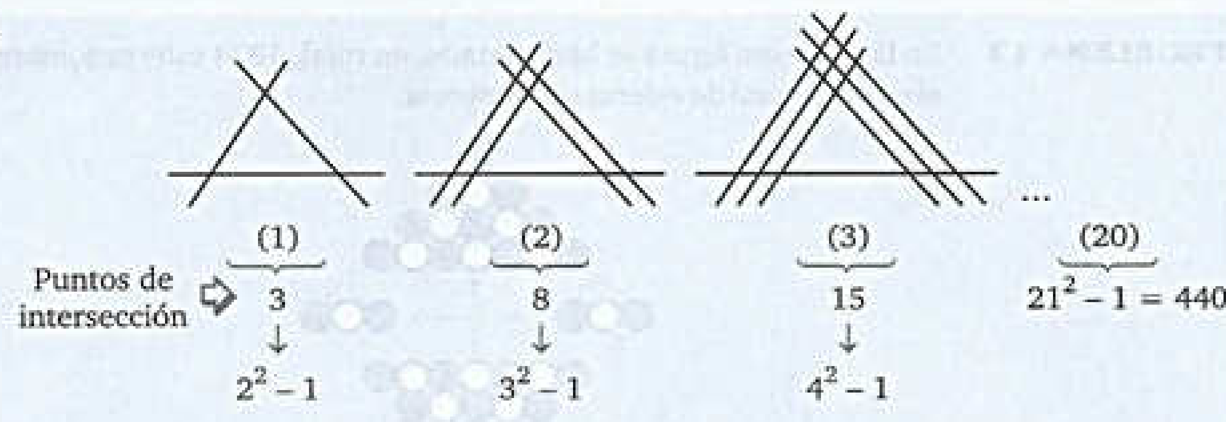
De acuerdo a los 3 primeros casos:

$$x = 31^2 = 961$$

PROBLEMA 13 ¿Cuántos puntos de intersección se contarán en la figura número (20)?



Resolución:



PROBLEMA 14 Calcule la suma del primero y el último número en F_{25}

F_1 : 1
F_2 : 3 5
F_3 : 7 9 11
F_4 : 13 15 17 19
⋮

Resolución:

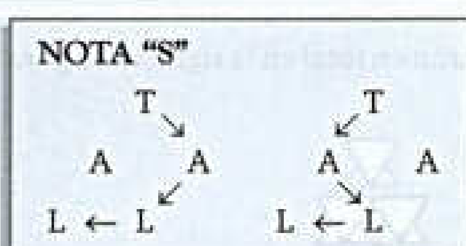
SUMA DEL PRIMERO Y EL ÚLTIMO ⇨

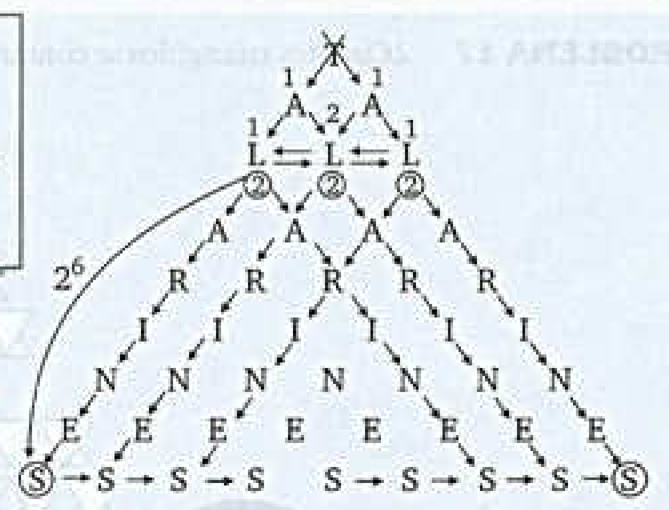
	F_1	F_2	F_3	F_4	...	F_{25}
	$1 + 1$	$3 + 5$	$7 + 11$	$13 + 19$		
	2	8	18	32		$2 \times 25^2 = 1250$
	↓	↓	↓	↓		
	2×1^2	2×2^2	2×3^2	2×4^2		

PROBLEMA 15 ¿De cuántas maneras distintas se puede leer TALLARINES uniendo letras vecinas en el siguiente arreglo?

T
A A
L L L
A A A A
R R R R R
I I I I I I
N N N N N N N
E E E E E E E E
S S S S S S S

Resolución: Añadiendo dos "S" a los extremos de la base del arreglo y luego aplicando principio de adición:





N° total de maneras de leer tallarines $= (2 \times 2^6) \times 3 - 2$

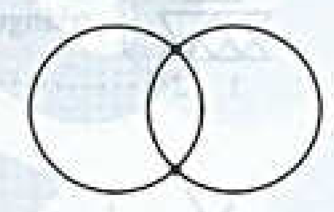
N° de arreglos triangulares que inician en L

Lecturas de la palabra tallarines por las dos "S" que se agrega

PROBLEMA 16 ¿Cuántos puntos de intersección se contarán como máximo al intersectarse 20 circunferencias?

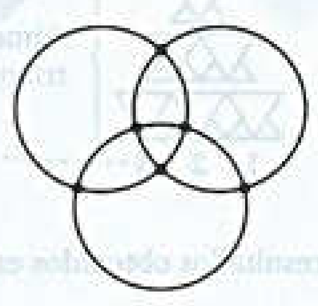
Resolución:

- Para 2 circunferencias



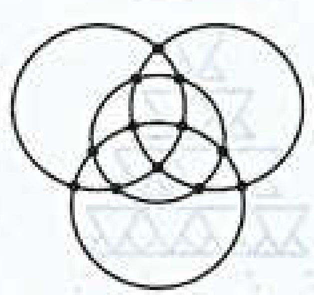
⇨ N° de puntos de intersección $= 2 = 2 \times 1$

- Para 3 circunferencias



⇨ N° de puntos de intersección $= 6 = 3 \times 2$

- Para 4 circunferencias

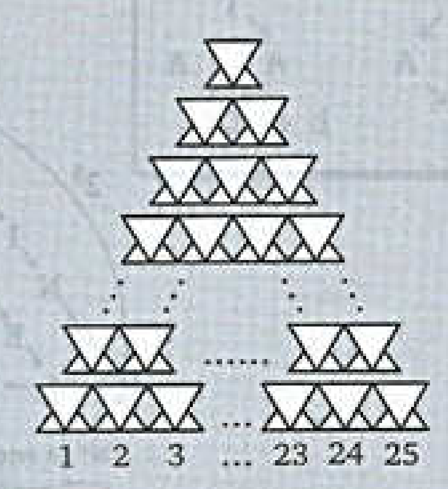


⇨ N° de puntos de intersección $= 12 = 4 \times 3$

De acuerdo a los resultados obtenidos en cada caso:

- Para 20 circunferencias ⇨ N° de puntos de intersección $= 20 \times 19 = 380$

PROBLEMA 17 ¿Cuántos triángulos se contarán en total en la siguiente figura?



Resolución: Caso 1:

1 } Número de triángulos $= 3 = \frac{2\times 3}{2}$ (1 ×2 → 2)

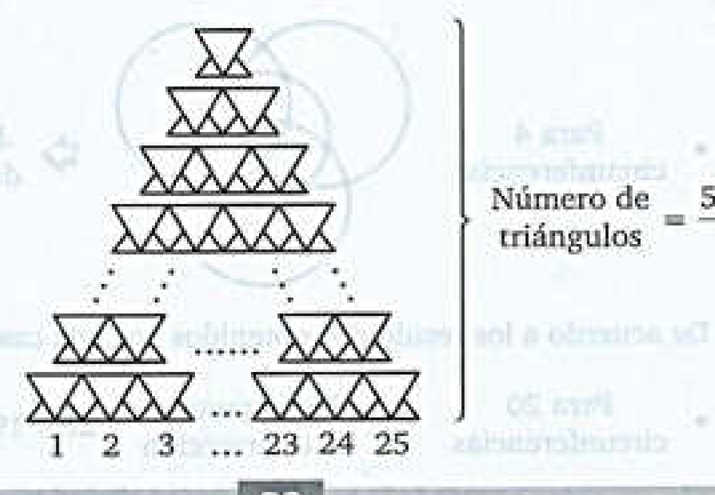
Caso 2:

1 2 } Número de triángulos $= 10 = \frac{4\times 5}{2}$ (2 ×2 → 4)

Caso 3:

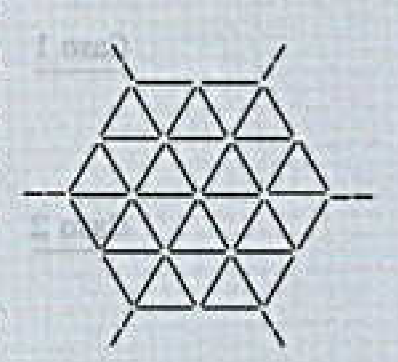
1 2 3 } Número de triángulos $= 21 = \frac{6\times 7}{2}$ (3 ×2 → 6)

De acuerdo a los resultados obtenidos en cada caso:

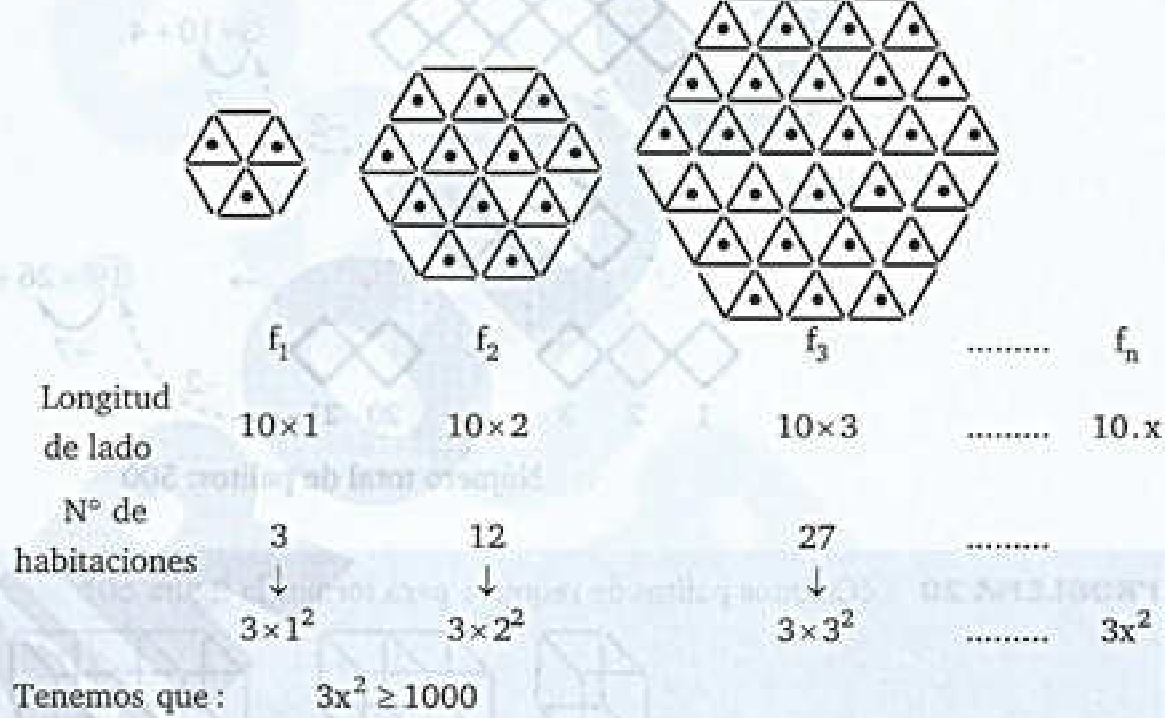


Número de triángulos $= \frac{50\times 51}{2} = 1275$

PROBLEMA 18 En la figura se muestra la vista superior de un particular complejo habitacional hexagonal con habitaciones que tienen la forma de triángulos equiláteros de 10 cm de lado. En las habitaciones habrá uno o ningún habitante y se pudo contar un total de 1000 habitantes.
Si ninguna habitación ocupada comparte un lado en común con otra. ¿Cuánto mide como mínimo el lado de la ciudad?



Resolución:

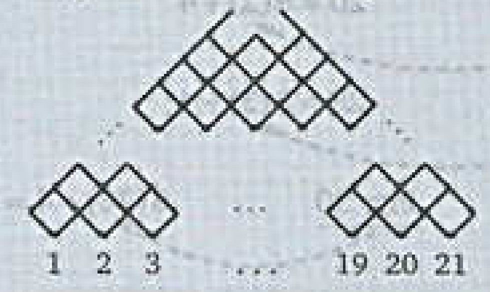


	f_1	f_2	f_3	....	f_n
Longitud de lado	10×1	10×2	10×3	....	$10.x$
N° de habitaciones	3 ↓ 3×1^2	12 ↓ 3×2^2	27 ↓ 3×3^2	....	$3x^2$

Tenemos que: $3x^2 \geq 1000$
$x \geq 18,......$
$x_{mín.} = 19$

$\therefore$ Longitud mínima de lado $= 190$

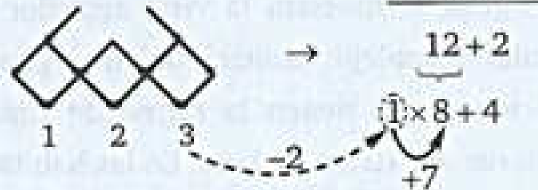
PROBLEMA 19 ¿Cuántos cerillos hay en total en el arreglo mostrado?



Resolución:

N° de palitos

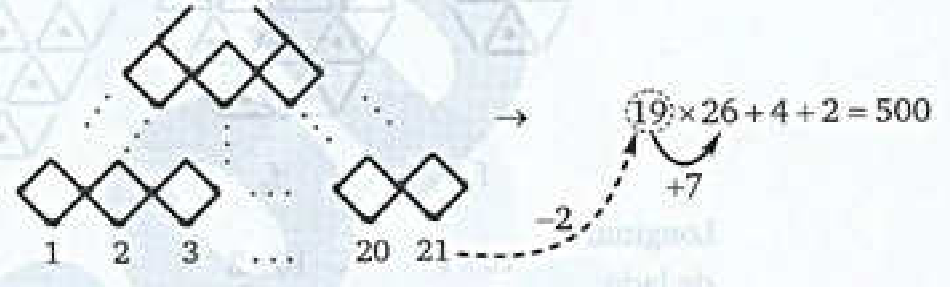
Caso 1



Caso 2

Caso 3

Piden :



∴ Número total de palitos: 500

PROBLEMA 20 ¿Cuántos palitos de requiere para formar la figura 60?

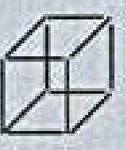


Fig. 1

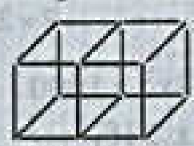


Fig. 2

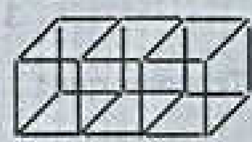


Fig. 3

Resolución:

N° de palitos

Fig. 1 → $12 = 8(1) + 4$

Fig. 2 → $20 = 8(2) + 4$

Fig. 3 → $28 = 8(3) + 4$

Piden : Fig. 30 → $8(30) + 4 = 244$

PROBLEMA 21 ¿En cuántos triángulos queda dividido un polígono regular de 20 lados al trazarse las diagonales desde un solo vértice?

Resolución:

Polígono	Nro. de lados		Nro. de triángulos
	4	$\xrightarrow{-2}$	2
	5	$\xrightarrow{-2}$	3
	6	$\xrightarrow{-2}$	4
⋮	⋮		
	20	$\xrightarrow{-2}$	18

$\therefore$ Nro. de triángulos = 18

PROBLEMA 22 Cercar un área de 1 m^2 cuesta 40 soles. Hacer lo mismo con un área de 4 m^2 requiere de 120 soles; con un área de 9 m^2, 240 soles; y con un área de 16 m^2, 400 soles. ¿Cuánto costará cercar 36 m^2? **ADMISIÓN UNMSM 2016 - II**

Resolución: De la información se tiene; figuras cuadradas:

	1 m^2	4 m^2	9 m^2	16 m^2	25 m^2	36 m^2
Longitud Lado:	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m
Costo:	S/.40	S/.120	S/.240	S/.400	S/.600	S/.x

El cociente entre el costo y la longitud de lado es: 40 ; 60 ; 80 ; 100 ; 120 ; 140

$\therefore$ x = S/.840

PROBLEMA 23 Hallar el valor de n de modo que:

$$\sum_{r=0}^{n}(2r+1)\binom{n}{r}=2^{n+4}$$

Resolución:

$$\sum_{r=0}^{n}(2r+1)\binom{n}{r}=2^{n+4}$$

$$\underbrace{\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+5\binom{n}{2}+7\binom{n}{3}+\ldots\ldots+(2n+1)\binom{n}{n}}_{S}=2^{n+4}$$

Para n = 1: $\binom{1}{0}+3\binom{1}{1}=4=2\times 2^1$

Para n = 2: $\binom{2}{0}+3\binom{2}{1}+5\binom{2}{2}=12=3\times 2^2$

Para n = 3: $\binom{3}{0}+3\binom{3}{1}+5\binom{3}{2}+7\binom{3}{3}=32=4\times 2^3$

Luego: $S=(n+1)2^n=2^{n+4}$

$(n+1)2^n=2^n\times 2^4$

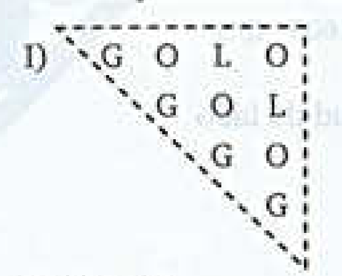
$\therefore\ n=15$

PROBLEMA 24 ¿De cuántas maneras diferentes; a igual distancia mínima entre letras y sin repetir la misma letra, se puede leer la palabra GOLOSO?

```
G O L O S O
  G O L O S
    G O L O
      G O L
        G O
          G
```

Resolución: Nótese que al leer: GOLOSO = GOLO × OSO

I)



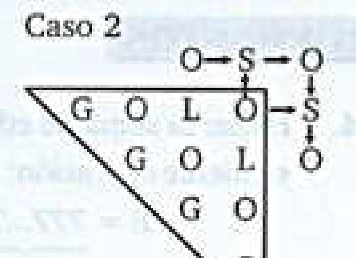
N° de maneras distintas de leer GOLO $=2^3=8$

II) Caso 1

```
G O L O - - S - - O →
  G O L     O
    G O     ↓
      G
```

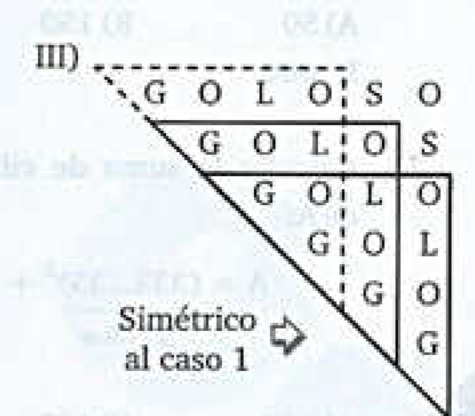
N° de maneras de leer OSO = 2

N° de maneras de leer GOLOSO $=8\times 2=16$



N° de maneras de leer OSO $= 4$

N° demaneras de leer GOLOSO $= 8 \times 4 = 32$



N° total de maneras de leer GOLOSO $= 16 + 32 + 16 = 64$

PROBLEMA 25 Determine el valor de la suma.

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

Resolución:

Caso 1 — Resultado

$$\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}}_{\text{1 sumando}}=\frac{3}{2}=\frac{2^2-1}{2}$$

Caso 2 — Resultado

$$\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}}_{\text{2 sumandos}}=\frac{8}{3}=\frac{3^2-1}{3}$$

Caso 3 — R — Resultado

$$\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}}_{\text{3 sumandos}}=\frac{15}{4}=\frac{4^2-1}{4}$$

Piden : — Resultado

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}=\frac{2014^2-1}{2014}=\frac{4056195}{2014}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule la suma de cifras del resultado de la siguiente operación?

$$\underbrace{666...667}_{61\text{ cifras}} \times \underbrace{333...335}_{61\text{ cifras}}$$

A) 300 B) 305 C) 360
D) 368 E) 540

2. Calcule la suma de cifras del resultado de la siguiente operación.

$$\underbrace{666...666}_{50\text{ cifras}} \times \underbrace{333...334}_{50\text{ cifras}}$$

A) 100 B) 150 C) 200
D) 250 E) 300

3. Calcule la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$\underbrace{333...333}_{90\text{ cifras}} \times \underbrace{333...335}_{90\text{ cifras}}$$

A) 900 B) 270 C) 360
D) 540 E) 810

4. Calcular la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$A = \underbrace{111...111}_{100\text{ cifras}} \times \underbrace{1000...001}_{101\text{ cifras}}$$

A) 100 B) 101 C) 200
D) 201 E) 202

5. Hallar la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$A = \underbrace{999...999}_{50\text{ cifras}}{}^2$$

A) 100 B) 300 C) 450
D) 900 E) 540

6. Hallar la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$E = \underbrace{777...77}_{50\text{ cifras}} \times \underbrace{999...99}_{50\text{ cifras}}$$

A) 50 B) 150 C) 200
D) 300 E) 450

7. Calcular la suma de cifras del resultado de A:

$$A = (\underbrace{333...33}_{21\text{ cifras}})^2 + (\underbrace{999...99}_{21\text{ cifras}})^2$$

A) 180 B) 183 C) 186
D) 189 E) 190

8. Hallar la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$A = \sqrt{\underbrace{111...111}_{50\text{ cifras}} + \underbrace{444...444}_{25\text{ cifras}} + 1}$$

A) 74 B) 75 C) 76
D) 77 E) 78

9. Calcule la suma de cifras de n:

$$n^2 = \underbrace{111...111}_{100\text{ cifras}}\underbrace{222...222}_{100\text{ cifras}}25$$

A) 300 B) 305 C) 310
D) 330 E) 500

10. Calcule la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$\sqrt{\underbrace{444...444}_{100\text{ cifras}} - \underbrace{888...888}_{50\text{ cifras}}}$$

A) 50 B) 100 C) 120
D) 270 E) 300

11. Calcular el valor de E:

$$E=\frac{\overbrace{1+3+5+7+\ldots\ldots}^{100\text{ términos}}}{\underbrace{2+4+6+8+\ldots\ldots}_{100\text{ términos}}}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 100/101 E) 50/51

12. Calcular la suma de cifras del resultado de la siguiente operación.

$$A=\sqrt{997\times998\times999\times1000+1}$$

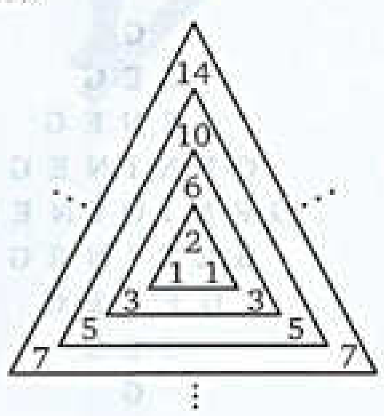
A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

13. Calcular la suma de todos los números del siguiente arreglo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 20 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 22 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 20 & 22 & 24 & 26 & \ldots & 38 \end{bmatrix}$$

A) 1000 B) 1500 C) 2500
D) 900 E) 2000

14. En el siguiente arreglo numérico, calcule la suma de todos los números si se cuentan 20 triángulos.



A) 1200 B) 1525 C) 1600
D) 1625 E) 2000

15. Si :

$$\sqrt{\overline{a5}\times\overline{a6}\times\overline{a7}\times\overline{a8}+1}=2161$$

Calcular:

$$A=\underbrace{a+\overline{aa}+\overline{aaa}+\ldots}_{a\text{ sumandos}}$$

A) 4930 B) 4932 C) 4934
D) 4936 E) 4940

16. Calcular la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$E=\sqrt{\underbrace{111\ldots111}_{50\text{ cifras}}-\underbrace{222\ldots222}_{25\text{ cifras}}}$$

A) 50 B) 100 C) 75
D) 150 E) 175

17. Calcule el valor de S:

$$S=\frac{\overbrace{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\ldots}^{2n-1\text{términos}}}{\underbrace{1^2+3^2+5^2+\ldots}_{n\text{ términos}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

18. Dado el siguiente arreglo numérico

$$n\text{ filas}\begin{cases} & & & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 2 & 4 & & & \\ & & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & & \\ & 8 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 8 & \\ \iddots & & & & & & & & \ddots \end{cases}$$

Calcule el valor de "n", si la suma de todos los números es 2450.

A) 20 B) 25 C) 30
D) 45 E) 50

19. ¿De cuántas formas diferentes se puede leer GENIO, teniendo en cuenta igual distancia de una letra a otra?

```
O   O   O   O   O
  I   I   I   I
O   N   N   N   O
  I   E   E   I
O   N   G   N   O
  I   E   E   I
O   N       N   O
  I           I
O               O
```

A) 32 B) 64 C) 46
D) 128 E) 94

20. ¿De cuántas formas diferentes se puede leer la palabra INGRESO, esto es uniendo letras consecutivas?

```
            O
           S O
          E S O
         R E S O
        G R E S O
       N G R E S O
      I N G R E S O
       I N G R E S O
        I N G R E S O
```

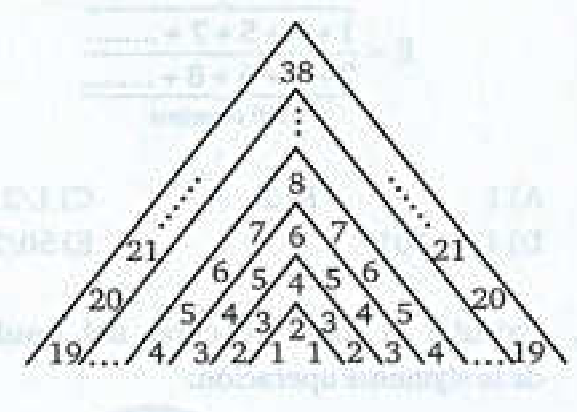
A) 64 B) 128 C) 192
D) 189 E) 384

21. ¿De cuántas formas diferentes se puede leer la palabra SABER, esto es uniendo letras vecinas?

```
              S
            S A S
          S A B A S
        S A B E B A S
      S A B E R E B A S
    S A B E R   R E B A S
  S A B E R       R E B A S
```

A) 192 B) 191 C) 96
D) 95 E) 185

22. Calcule la suma de todos los números en el siguiente arreglo



A) 4000 B) 8000 C) 7600
D) 6400 E) 3800

23. Los números enteros del 1 al 1000, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente. Luego, se borran los que ocupan los lugares impares. En la nueva lista se borran los números que están en los lugares impares. Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

A) 500 B) 512 C) 516
D) 520 E) 524

24. ¿De cuántas formas diferentes se puede leer GENIO, teniendo en cuenta igual distancia de una letra a otra?

```
        G
      G E G
    G E N E G
  G E N I N E G
G E N I O I N E G
  G E N I N E G
    G E N E G
      G E G
        G
```

A) 64 B) 62 C) 60
D) 128 E) 124

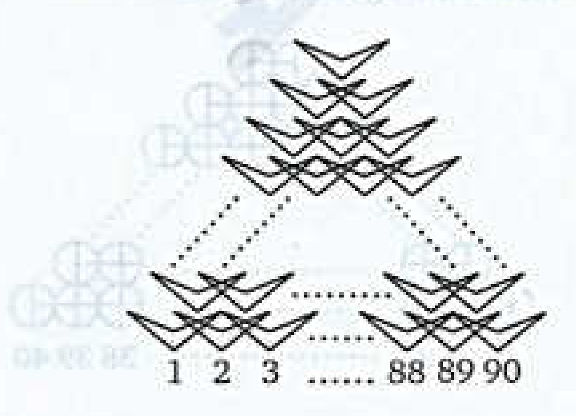
25. Calcular la suma de las 25 primeras filas del siguiente triángulo numérico:

A) 105625 B) 105500 C) 105600
D) 105620 E) 105525

26. En el siguiente arreglo, ¿de cuántas formas distintas se puede leer SABER considerando igual distancia de una letra a otra en cada lectura?

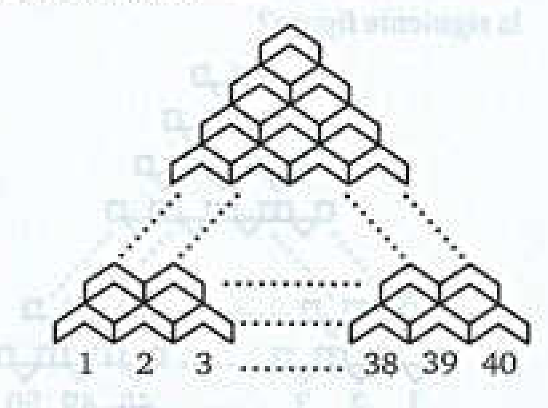
A) 64 B) 60 C) 128
D) 124 E) 63

27. ¿Cuántos cuadriláteros cóncavos se pueden contar en la siguiente figura?



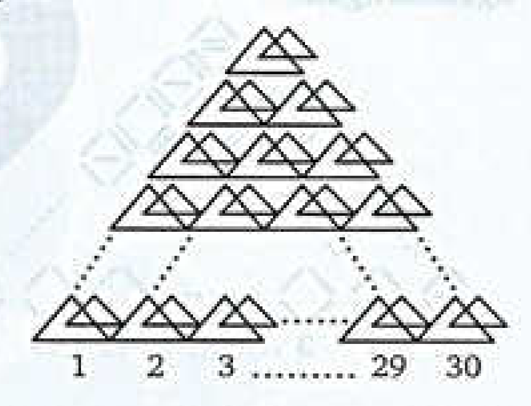
A) 8100 B) 8900 C) 7200
D) 9000 E) 9321

28. ¿Cuántos hexágonos se pueden contar en la siguiente figura?



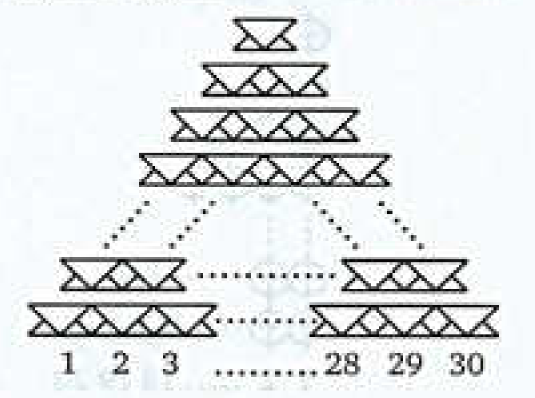
A) 400 B) 900 C) 1600
D) 1225 E) 1681

29. Calcule el total de triángulos en la siguiente figura:



A) 2025 B) 1800 C) 1900
D) 1830 E) 1500

30. ¿Cuántos triángulos se cuentan en total en la siguiente figura?



A) 1830 B) 1800 C) 1900
D) 1756 E) 1789

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

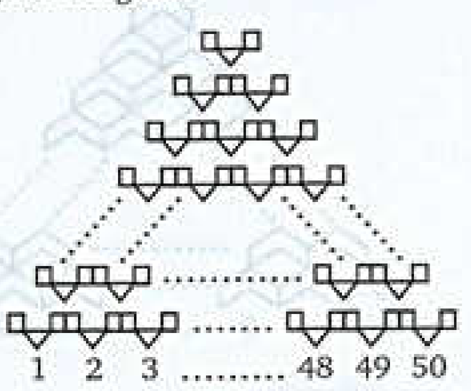
Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

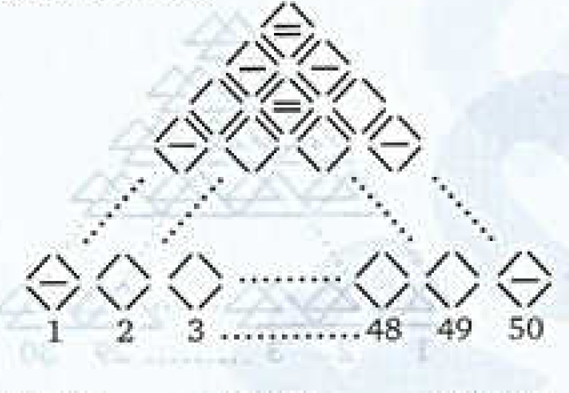
03 de setiembre del 2020

31. ¿Cuál es la diferencia entre el número de cuadriláteros y el número de triángulos en la siguiente figura?



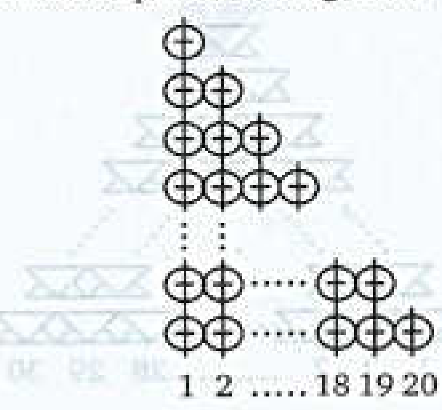
A) 2500 B) 2550 C) 1250
D) 2601 E) 2625

32. ¿Con cuántos palitos se ha construido la siguiente figura?



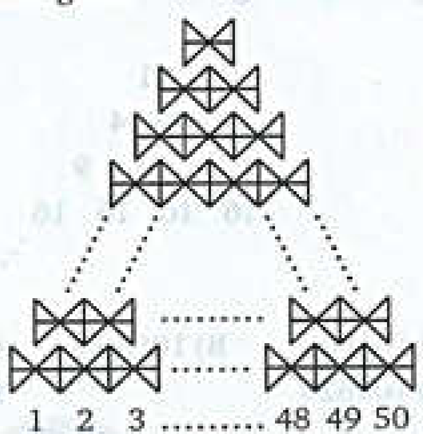
A) 5200 B) 5000 C) 4400
D) 5500 E) 5625

33. En la siguiente figura, calcule la suma del número de puntos de intersección y el número de puntos de tangencia.



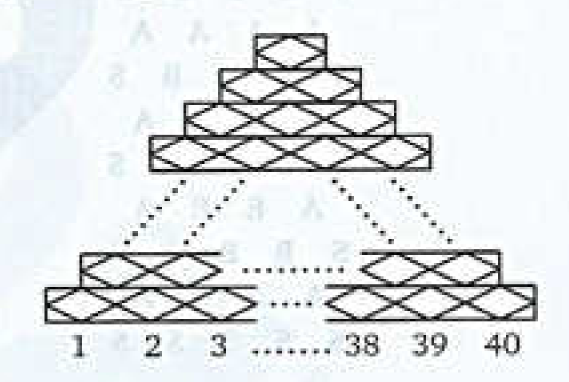
A) 800 B) 820 C) 900
D) 930 E) 400

34. ¿Cuántos triángulos se cuentan en la siguiente figura?



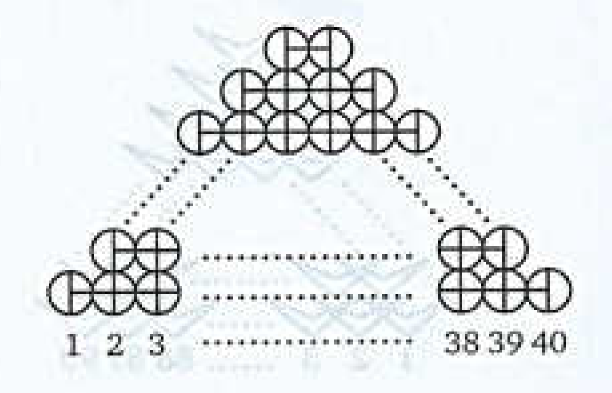
A) 2550 B) 5050 C) 10100
D) 10000 E) 5100

35. ¿Cuántos triángulos se cuentan en la siguiente figura?



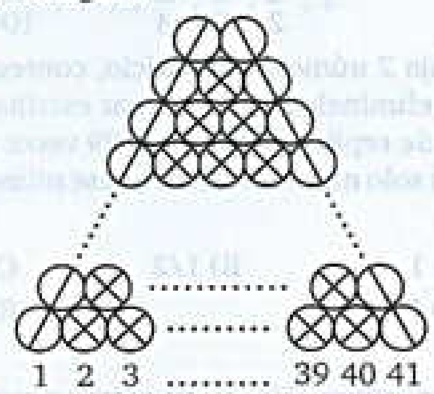
A) 3200 B) 3202 C) 3620
D) 3625 E) 3525

36. ¿Cuántos cuadrantes circulares se cuentan en total en la siguiente figura?



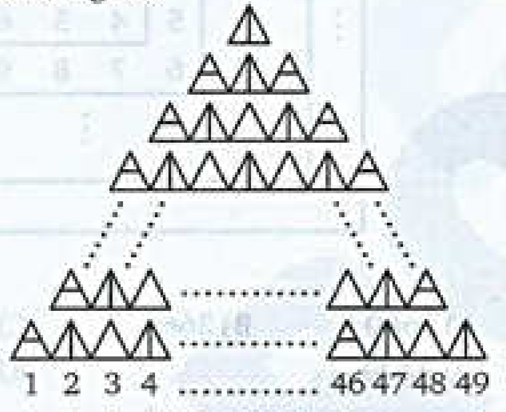
A) 1200 B) 1600 C) 1640
D) 1680 E) 1722

37. Calcule el total de semicircunferencias en la siguiente figura.



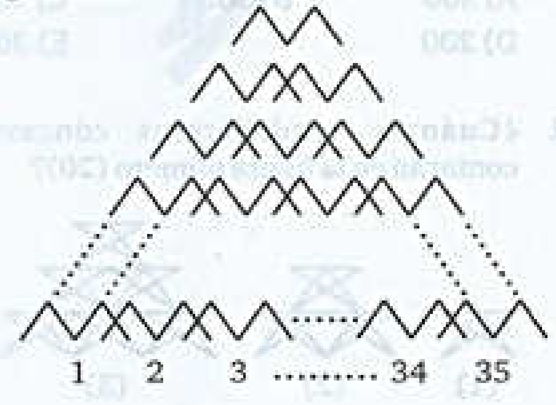
A) 3200 B) 3240 C) 3260
D) 3280 E) 3600

38. ¿Cuántos triángulos se cuentan en la siguiente figura?



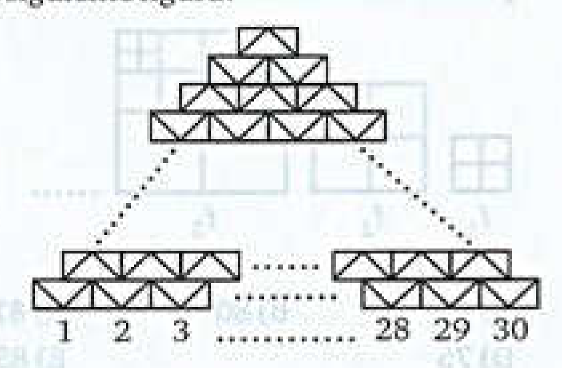
A) 1200 B) 1250 C) 1275
D) 1500 E) 1525

39. En la siguiente figura, calcule el total de segmentos.



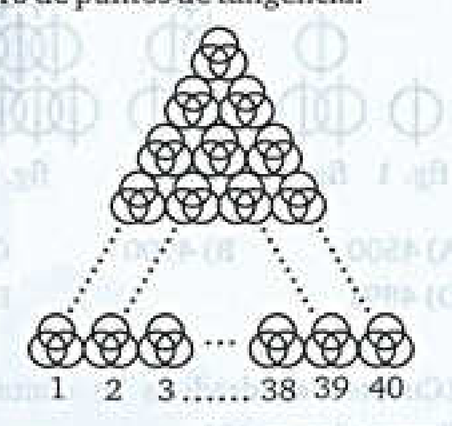
A) 4225 B) 5000 C) 4896
D) 3600 E) 4900

40. ¿Cuántos triángulos se cuentan en total en la siguiente figura?



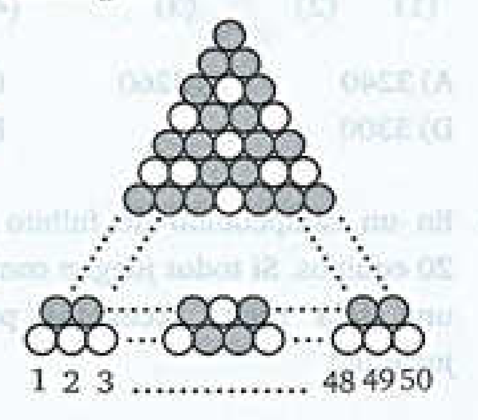
A) 1800 B) 1810 C) 1820
D) 1830 E) 1860

41. En la siguiente figura, calcule la suma del número de puntos de intersección con el número de puntos de tangencia.



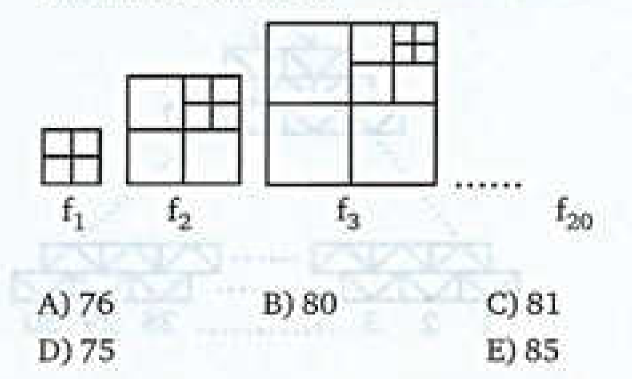
A) 6400 B) 7200 C) 7260
D) 8000 E) 8400

42. ¿Cuántas bolitas sombreadas se cuentan en la siguiente figura?



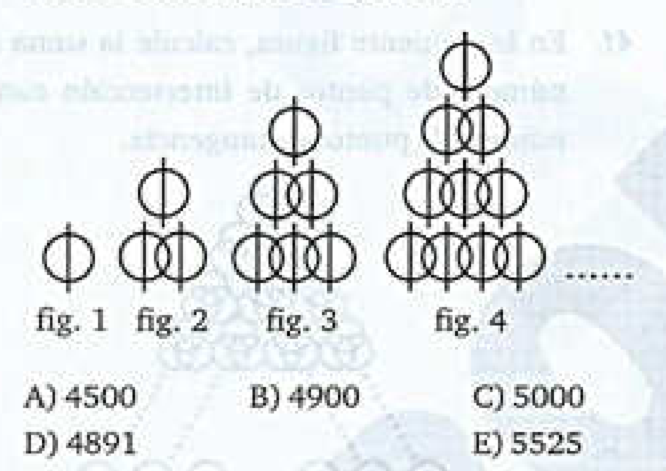
A) 625 B) 650 C) 651
D) 600 E) 601

43. ¿Cuántos cuadrados se contaran en la posición número 20?



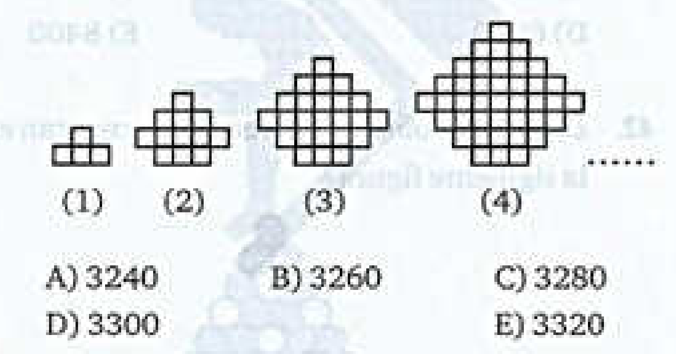
A) 76 B) 80 C) 81
D) 75 E) 85

44. ¿Cuántos puntos de intersección se cuentan en total en la figura 50 (fig. 50)?



A) 4500 B) 4900 C) 5000
D) 4891 E) 5525

45. ¿Cuántos cuadraditos se contarán en la figura número 40?



A) 3240 B) 3260 C) 3280
D) 3300 E) 3320

46. En un campeonato de fulbito participan 20 equipos. Si todos juegan contra todos a una sola rueda, ¿cuántos partidos se jugarán?

A) 200 B) 190 C) 210
D) 220 E) 195

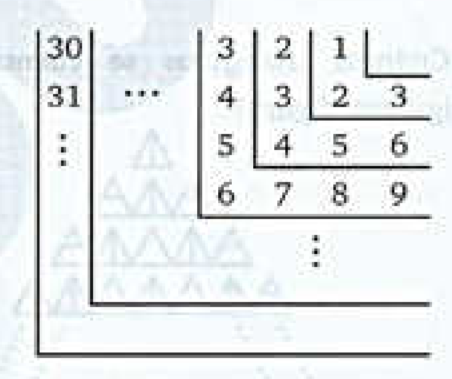
47. En el siguiente conjunto de números:

$$1\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{4}\,;\ \ldots\,;\ \frac{1}{100}$$

Elija 2 números del inicio, consecutivos a y b, elimínelos y en su lugar escriba ab + a + b. Se repite este proceso 99 veces y quedará un solo número. ¿Cuál es ese número?

A) 1 B) 1/2 C) 2
D) 100 E) 101

48. A continuación se muestra un conjunto de números distribuidos en "PASAJES" en forma de ele (L). Calcule la suma de los números en el último "PASAJE".



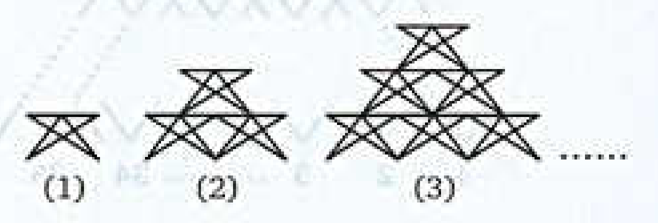
A) 3600 B) 3660 C) 3200
D) 4200 E) 4500

49. Calcule la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$A = \sqrt{\underbrace{444\ldots44}_{100\ \text{CFS}} + 16(\underbrace{111\ldots11}_{50\ \text{CFS}}) + 4}$$

A) 300 B) 302 C) 150
D) 200 E) 360

50. ¿Cuántos cuadriláteros cóncavos se contarán en la figura número (20)?



A) 800 B) 820 C) 840
D) 860 E) 400

Capítulo 4 Razonamiento Deductivo

CAPACIDADES

- Desarrollar el interés por la resolución de problemas que aparentemente sean difíciles.
- Conocer y utilizar los métodos razonativos como parte de la investigación científica.
- Desarrollar la capacidad lógica-deductiva.
- Dar a conocer la importancia de la deducción matemática como método de demostración matemática.

SUDOKU

En el siglo XVIII el matemático Leonhard Euler definió los cuadrados latinos, que consistían en colocar en colocar en una cuadrícula tantos números como casillas tiene el lado del cuadrado con la única condición de que en cada fila y en cada columna no haya ninguno repetido.

Realizar un cuadrado de estas características es una tarea sencilla; sin embargo, convertido en pasatiempo es algo más complicado. Al parecer, Walter Macey tuvo la idea en 1970 y la publicó con el título del Number Place en la revista Math Puzzles and Logic Problem, especializada en entretenimientos lógicos.

Pero fue la editorial japonesa Nikoli, especializada en pasatiempos la que en abril de 1984 publicó este juego con el nombre de Suji Wa dokushin ni kagiru en el periódico de Amonthly Nikolist. Ese nombre poco después se simplificó y pasó a llamarse sudoku (SU = número: DOKU = solo).

En 1986 Nikoli introdujo dos condiciones en el diseño de los Sudokus que elevaron su popularidad:

1. El número de cifras iniciales debe ser como máximo de 30.
2. Las casillas iniciales deben ser rotacionalmente simétricas.

Debido a su popularidad en todo el planeta ya se considera el cubo de Rubick del siglo XXI y algunos lo llaman el rompecabezas más rápido del mundo.

La dificultad de los Sudokus varía en función de los números iniciales y normalmente cuando menos números, más difícil es.

El más conocido es el Sudoku 9 × 9, pero los hay de muchos tamaños e, incluso de letras, colores, símbolos..., aunque sin llegar, ni mucho menos, a los mismos niveles de popularidad que el original.

				6		3	5	
6	4						2	
1		9			8	7		
		2	9		7			
9								5
			1		2	8		
		6	5			1		9
	2						7	4
	9	8		7				

INSTRUCCIONES

Cada pasatiempo consta de 81 casillas (9 × 9) divididas en 9 regiones de 3 × 3 casillas cada una, según puedes ver en el siguiente ejemplo.

Las reglas para rellenar las casillas vacías son simples:

1. En cada casilla debe haber un número del 1 al 9.
2. En cada fila, columna y región 3 × 3 deben estar los 9 números sin repetir ninguno de ellos.

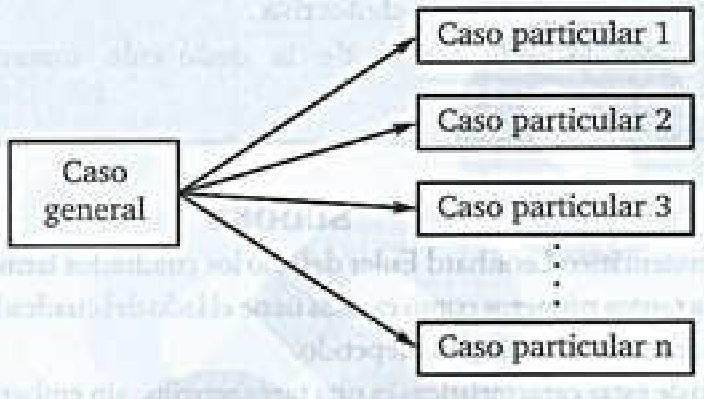
LÓGICA DEDUCTIVA

La lógica deductiva implica razonar partiendo de una regla o criterio general y aplicarlo a un caso particular.

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

El razonamiento deductivo caracterizó el desarrollo y enfoque de las matemáticas griegas como se ve en los trabajos de Euclides, Pitágoras, Arquímedes y otros.

El razonamiento deductivo se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.



CONCEPTO

Es aquel proceso que a partir de una o más informaciones (premisas) se extrae una nueva información (conclusión) la cual es necesariamente correcta.

Ejemplo: Calcular (a + b) si: $\overline{1a} + \overline{2a} + \overline{3a} + \ldots + \overline{7a} = \overline{bb6}$

Resolución: Observando la primera cifra de cada número se deduce que son 7 sumandos, luego ordenando en columna se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{1a} \; + \\ \overline{2a} \\ \vdots \\ \overline{7a} \end{array}\right\} \text{Son 7 sumandos}$$
$$\overline{bb6}$$

- En las unidades: $\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{7\text{ veces}} = \ldots 6$ $\qquad \left.\begin{array}{c} 7a = \ldots 6 \\ \downarrow \\ 7 \times 8 = 56 \end{array}\right\} a = 8$

  Llevamos 5 a la siguiente columna

- En las decenas: $5+1+2+3+\ldots+7 = \overline{bb}$

  ↓ Lo que llevamos de las unidades

  $33 = \overline{bb}$

  $b = 3$

$\therefore \quad a + b = 8+3 = 11$

CIFRAS TERMINALES

Para ello nos ayudaremos del concepto de números circulares, los números circulares son aquellos números que multiplicados repetidamente por sí mismos reaparecen a la derecha de todos los productos.

De una cifra tenemos el 1, 5 y 6, este concepto se puede generalizar en lo siguiente.

$$(....1)^n = ...1; \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$(....5)^n = ...5$$

$$(....6)^n = ...6$$

De dos cifras se tiene el 25 y 76. Veamos que:

$$25^2 = 6\underline{25} \qquad 76^2 = 57\underline{76}$$

$$25^3 = 156\underline{25} \qquad 76^3 = 4389\underline{76}$$

$$25^4 = 3906\underline{25} \qquad 76^4 = 333621\underline{76}$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

De tres cifras se conoce el 376, comprobamos algunos casos.

$$376^2 = 141\underline{376}$$

$$376^3 = 53157\underline{376}$$

$$376^4 = 19987173\underline{376}$$

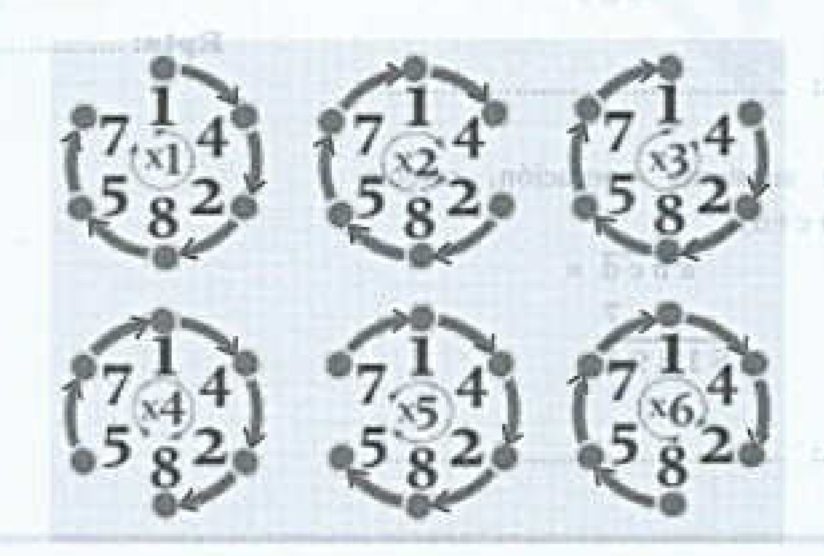
$$\vdots \quad \vdots$$

NÚMERO CÍCLICO

Se dice que un número entero es cíclico si verifica la siguiente propiedad:

Al multiplicarlo por todos los números existentes entre uno y su número de cifras, ambos inclusive, produce todas las permutaciones cíclicas de las mismas.

El menor número cíclico es 142857.



EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Dadas las premisas:

* Todos los arquitectos son creativos.
* Mijael es arquitecto.

Se deduce que:

Rpta.: ....

2. Dadas las siguientes informaciones:

* Un abogado y un ingeniero conversan.
* Uno de ellos se llama Mijael.
* El abogado es mayor que Mijael.

Se deduce que:

Rpta.: ....

3. En la siguiente operación, calcule (a+b+c+d).

$$\begin{array}{r} \overline{a3c4}\,+ \\ \overline{4b2d} \\ \hline 13129 \end{array}$$

Rpta.: ....

4. En la siguiente operación, calcule (a+b+c).

$$\begin{array}{r} \overline{abc000}\,- \\ \overline{abc} \\ \hline ***469 \end{array}$$

Rpta.: ....

5. En la siguiente operación, calcule (a+b+c+d).

$$\begin{array}{r} \overline{abcd}\,\times \\ 7 \\ \hline 51891 \end{array}$$

Rpta.: ....

6. Se tiene que:

$$\overline{1n} + \overline{2n} + \ldots\ldots + \overline{7n} = \overline{mm6}$$

Entonces $m + n - mn$ es:

Rpta.: ....

7. Halle la suma de cifras del resultado de:

$$A = \frac{74}{24} + \frac{7474}{2424} + \frac{747474}{242424} + \ldots + \frac{\overbrace{7474\ldots\ldots74}^{240\text{ cifras}}}{\underbrace{2424\ldots\ldots24}_{240\text{ cifras}}}$$

Rpta.: ....

8. Si: $(a+b+c)^2 = \overline{2b5}$

Hallar el valor de "b"

Rpta: ....

9. Si: $a^a = \overline{bc25}$

Calcular: $a + b + c$

Rpta: ....

10. Se cumple que:

$\overline{abcd} \times n = 8928$

$\overline{abcd} \times m = 15624$

$\overline{abcd} \times p = 11160$

Calcule el resultado: $\overline{abcd} \times \overline{mnp}$

Rpta: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Halle el menor número que multiplicado por 77 da un producto cuyas cifras son todas 9. Dar como respuesta la suma de cifras de dicho número.

Resolución: Sea N el número: $N \times 77 = 999...9$

$$\Rightarrow N = \frac{999...9}{77}$$

$\Rightarrow$ 999... ÷ 77 = N

```
999... |77
77      N = 12
229
154
 75
```

Ten en cuenta que la división debe ser exacta así que seguiremos bajando los 9 hasta que el residuo sea 0.

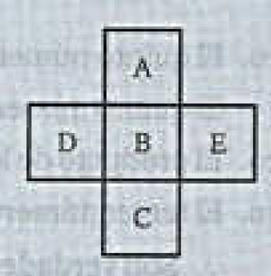
```
999...   |77
77        N = 12987
229
154
 759
 693
  669
  616
   539
   539
   ---
```

$N = 12987$

$\therefore$ Suma de cifras $= 1 + 2 + 9 + 8 + 7 = 27$

PROBLEMA 2 En la figura adjunta, reemplace las letras por los números enteros del 1 al 5, sin repetirlos, de manera que la suma horizontal y la suma vertical de tres números sea siempre la misma y la máxima posible. Halle dicha suma.

ADMISIÓN UNMSM 2017 - I



Resolución: Nos piden la suma constante y que sea máxima. Primero veamos los valores a colocar: 1; 2; 3; 4; 5. Luego, para que la suma sea máxima, debemos colocar el número 5 en la intersección y finalmente completamos para que la suma sea constante.

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

	2	
1	5	4
	3	

∴ Suma constante = 10

PROBLEMA 3 La suma de 6 números enteros es un número par. De estos números, el producto de los 4 primeros es impar y el sexto es par. De acuerdo con estos datos, elija la alternativa que contenga enunciados verdaderos.

I. El quinto número es par.
II. El quinto número es impar.
III. El producto de los 6 números es par.
IV. El tercer número es impar.

Resolución: Datos:

1. La suma de 6 números enteros es un número par.
2. El producto de los 4 primeros es impar.
3. El sexto número es par.

$$\underbrace{\overset{1°}{\text{impar}} + \overset{2°}{\text{impar}} + \overset{3°}{\text{impar}} + \overset{4°}{\text{impar}}}_{\text{(dato 2) Se deduce que los 4 números son impares}} + \overset{5°}{\text{par}} + \underbrace{\overset{6°}{\text{par}}}_{\text{(dato 3)}} = \text{par (dato 1)}$$

Luego, de los datos se deduce que el quinto número es par.

Entonces:

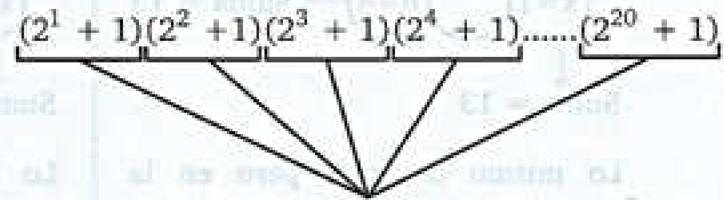
I. Verdadero. El quinto número es par.
II. Falso. El quinto número no es impar.
III. Verdadero. El producto de los 6 números es par.
IV. Verdadero. El tercer número es impar.

∴ Son verdaderos: I, III y IV

PROBLEMA 4 Calcule la última cifra de: $(2^1+1)(2^2+1)(2^3+1)(2^4+1)......(2^{20}+1)$

Resolución: Nos piden la última cifra del producto:

$$(2^1+1)(2^2+1)(2^3+1)(2^4+1)......(2^{20}+1)$$



Cada uno de los factores tiene la forma 2^n+1

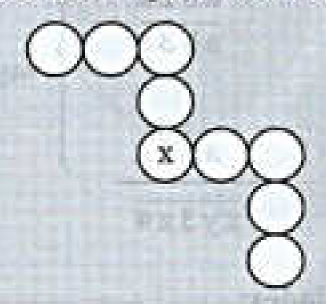
De lo que notamos que cada uno de los factores es impar, pero de esos impares prestamos atención a $2^2+1=5$ entonces la expresión quedaría.

(N° impar)(5)(N° impar)(N° impar)....(N° impar)

Recordando que (....5)(N° impar) = ...5

Entonces, la última cifra del producto es 5.

PROBLEMA 5 Distribuya los números del 1 al 9 en los círculos de la siguiente figura, de tal manera que la suma de los 3 números que están en una misma línea sea igual a 13. Dar como respuesta el valor correspondiente a x.



Resolución: 1, 2, 3, ..., 8, 9

a → Suma = 13

x b → Suma = 13

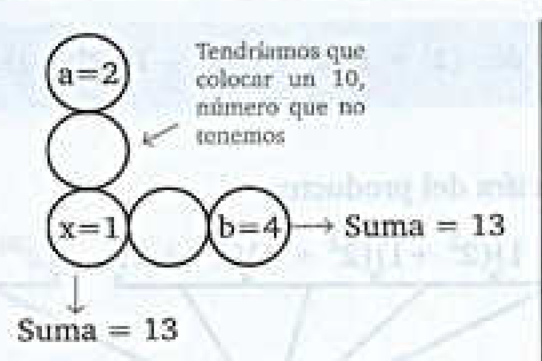
Suma = 13

Suma = 13

$$13+13+13+13=1+2+3+...+9+a+x+b$$

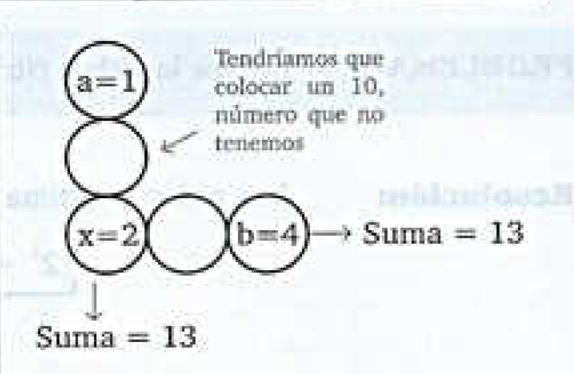
$$\underbrace{a+x+b}_{1,\,2\ \text{y}\ 4}=7$$

⇨ x puede ser 1, 2 ó 4



Lo mismo ocurriría pero en la horizontal para $a = 4$ y $b = 2$

$\Rightarrow x \neq 1$



Lo mismo ocurriría pero en la horizontal para $a = 4$ y $b = 1$

$\Rightarrow x \neq 2$

$$\therefore \quad x = 4$$

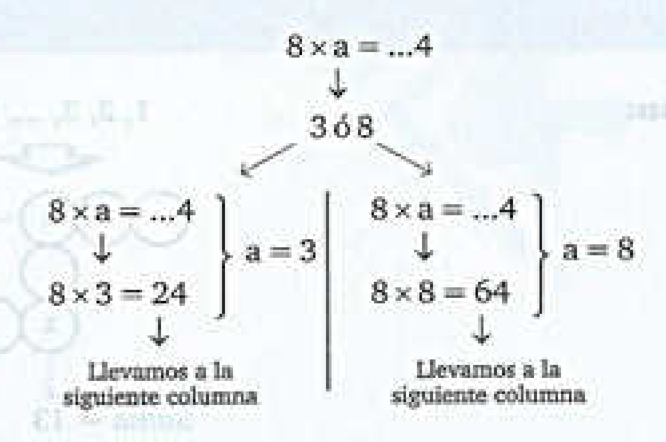
PROBLEMA 6 Calcular: $x + y + z + a + b$

Si: $\overline{ab1a} + \overline{ab2a} + \overline{ab3a} + \ldots + \overline{ab8a} = \overline{xy3z4}$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{ab1a} \; + \\ \overline{ab2a} \\ \overline{ab3a} \\ \vdots \\ \overline{ab8a} \end{array}\right\} \text{8 sumandos}$$
$$\overline{xy3z4}$$

- En las unidades: $8 \times a = \ldots 4$



- En las decenas:

$2+1+2+3+\ldots+8 = \ldots z$; $38 = \ldots z$ → $z = 8$ (↑ Lo que llevamos; ↓ Llevamos a la siguiente columna)

$6+1+2+3+\ldots+8 = \ldots z$; $42 = \ldots z$ → $z = 2$ (↑ Lo que llevamos; ↓ Llevamos a la siguiente columna)

- En las centenas: $3 + 8 \times b = ...3$ → $3 + 8 \times 5 = 43$ (Lo que llevamos) ⟹ $b = 5$ (Llevamos a la siguiente columna) | $4 + 8 \times b = ...3$ ¡No hay valor para b!

- En los millares: $4 + 8 \times a = \overline{xy}$ → $4 + 8 \times 3 = 28$ (Lo que llevamos) ⟹ $x = 2$, $y = 8$

Luego: $x + y + z + a + b = 2 + 8 + 8 + 3 + 5$

$\therefore\ x + y + z + a + b = 26$

PROBLEMA 7 Sabiendo que:

$$\overline{bd} + \overline{np} + \overline{yw} = 160$$
$$\overline{ac} + \overline{mp} + \overline{xz} = 127$$
$$\overline{ab} + \overline{mn} + \overline{xy} = 124$$

Calcule: $\overline{abcd} + \overline{mnpp} + \overline{xyzw}$

Resolución:

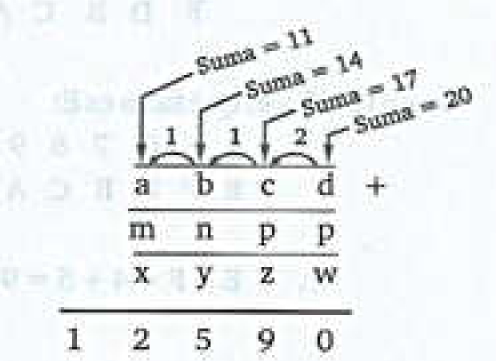
Se deduce que $b + n + y = 14$

(I)	(II)	(III)
$\overline{bd}$ +	$\overline{ac}$ +	$\overline{ab}$ +
$\overline{np}$	$\overline{mp}$	$\overline{mn}$
$\overline{yw}$	$\overline{xz}$	$\overline{xy}$
160	127	124

Si: $b + n + y = 14$ ⇨ en (I): $d + p + w = 20$
y en (III): $a + m + x = 11$

Si: $a + m + x = 11$ ⇨ en (II): $c + p + z = 17$

Luego:



PROBLEMA 8 Las letras A, B, C, D, E, F y G representan, no necesariamente en ese orden, siete números consecutivos entre 4 y 10 inclusive. Se sabe que:

- A es mayor que D en 3 unidades
- B es el término central.
- B es mayor que F y C es mayor que D
- G es mayor que E
- La diferencia entre B y F es igual a la diferencia entre C y D.

¿Cuál es el valor de (E + F)?

Resolución:

A, B, C, D, E, F, G

4 5 6 7 8 9 10

- B es el término central y A es mayor que D en 3 unidades.

CASO 1

4	5	6	7	8	9	10
	D		B	A		

Uno de estos es F (B > F) [4 ó 6]; Uno de estos es C (C > B) [9 ó 10]

- $B - F = C - D$

Evaluamos F = 4: $\underbrace{B}_{7} - \underbrace{F}_{4} = C - \underbrace{D}_{5}$

C tendría que ser 8, pero A ya es 8

$\therefore \; F \neq 4$

Evaluamos F = 6: $\underbrace{B}_{7} - \underbrace{F}_{6} = C - \underbrace{D}_{5}$

C tendía que se 6, pero F ya es 6

$\therefore \; F \neq 6$

CASO 2

4	5	6	7	8	9	10
		D	B		A	

Uno de estos es F (B > F) [4 ó 5]; Uno de estos es C (C > B) [8 ó 10]

- $B - F = C - D$

Evaluamos F = 4: $\underbrace{B}_{7} - \underbrace{F}_{4} = C - \underbrace{D}_{6}$

C tendría que ser 9, pero A ya es 9

$\therefore \; F \neq 4$

Evaluamos F = 5: $\underbrace{B}_{7} - \underbrace{F}_{5} = C - \underbrace{D}_{6}$

C debe ser 8

$\therefore \; F = 5$

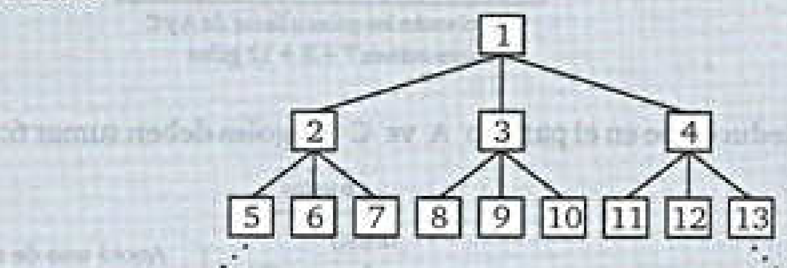
4	5	6	7	8	9	10
	F	D	B	C	A	

- Como G > F y el que falta es E:

4	5	6	7	8	9	10
E	F	D	B	C	A	G

$\therefore \; E + F = 4 + 5 = 9$

PROBLEMA 9 La figura muestra un "Árbol genealógico" muy curioso, de tal manera que 1 es el padre de 2, de 3 y 4; 2 es el padre de 5, de 6 y de 7; 3 es el padre de 8, de 9 y de 10; 4 es el padre de 11, de 12 y de 13 y así sucesivamente. ¿Qué número tiene el padre de 1996?



Resolución: Se observa que cada padre tiene 3 hijos que son números consecutivos y el hijo del medio es el triple de su padre.

Sea "x" el padre de 1996:

$3x - 1 = 1996 \rightarrow x = 665{,}6$

$3x = 1996 \rightarrow x = 665{,}3$

$3x + 1 = 1996 \rightarrow x = 665$

PROBLEMA 10 Tres equipos de fútbol A, B y C, después de jugar todos contra todos tienen anotados los siguientes goles a favor (GF) y goles en contra (GC).

	GF	GC
A	7	3
B	4	6
C	5	7

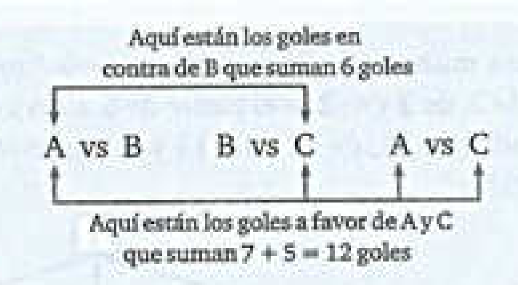
¿Cuál fue el resultado del partido entre A y C, si A ganó y C anotó uno de sus goles de penal?

Resolución:

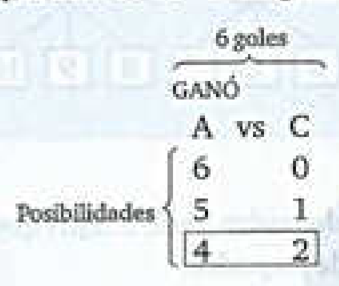
	GF	GC
A	7	3
B	4	6
C	5	7

Los partidos que se jugaron son:

A vs B B vs C A vs C



Se deduce que en el partido A vs C los goles deben sumar 6:



(Anotó uno de sus goles de penal o sea anotó más de 1 gol)

$\therefore$ El resultado fue 4 a 2

PROBLEMA 11 Si: $N = ...125$; Calcule: $x + y + z$ en:

$$N + N^2 + N^3 + N^4 + ... + N^{30} = \overline{...xyz}$$

Resolución: Coloquemos la suma en forma vertical:

$$\begin{array}{r} N \;+ \\ N^2 \\ N^3 \\ N^4 \\ \vdots \\ N^{30} \\ \hline \overline{...xyz} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} N = ...125 \;+ \\ N^2 = (...125)^2 = ...625 \\ N^3 = (...125)^3 = ...125 \\ N^4 = (...125)^4 = ...625 \\ \vdots \\ N^{30} = \qquad\qquad \\ \hline \overline{...xyz} \end{array}\right\} \text{30 sumandos}$$

- En las unidades: $30 \times 5 = \overline{..z}$

  $150 = ..z \rightarrow z = 0$

  (1 → llevan a las decenas: 15)

- En las decenas: $15 + 30 \times 2 = \overline{..y}$

  $75 = ..y \rightarrow y = 5$

  (7 → llevamos a las centenas)

- En las centenas: $7 + 15 \times 1 + 15 \times 6 = \overline{..x}$

  $112 = ..x \rightarrow x = 2$

$\therefore \; x + y + z = 2 + 5 + 0 = 7$

PROBLEMA 12 Si: $\overline{...3658} \div 9999 = \overline{abcd}$

Calcular: $\dfrac{5(abcd)}{a+b+c+d}$

Resolución: $\overline{...3658} \div 9999 = \overline{abcd}$

$$\frac{\overline{...3658}}{9999} = \overline{abcd}$$

$$\overline{abcd} \times 9999 = \overline{...3658}$$
$$\overline{abcd}\,(10000-1) = \overline{...3658}$$
$$\overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{...3658}$$

Coloquemos la sustracción en forma vertical:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd0000} - \\ \overline{abcd} \\ \hline \overline{..........3658} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = 2 \\ c = 4 \\ b = 3 \\ a = 6 \end{array} \right.$$

Luego: $\dfrac{5(abcd)}{a+b+c+d} = \dfrac{5(6\times 3\times 4\times 2)}{6+3+4+2} = 48$

MÉTODO "S"

Por complemento aritmético.

$\overline{....3658} = 9999 \times \overline{abcd}$

↓↓↓↓

99910

$\rightarrow d = 10-8 = 2$

$c = 9-5 = 4$

$b = 9-6 = 3$

$a = 9-3 = 6$

PROBLEMA 13 Si:

$$N \times 12 = \overline{...688}$$
$$N \times 23 = \overline{...652}$$

Calcular las 3 últimas cifras de $N \times 105$

Resolución:

$$\begin{array}{r} N \times 12 = \overline{...688} \; + \\ N \times 23 = \overline{...652} \\ \hline N \times 35 = \overline{...340} \end{array}$$

$\times 3 \left(\quad \right) \times 3$

$$N \times 105 = \overline{...020}$$

∴ Las 3 últimas cifras son: 020

PROBLEMA 14 Hallar: R_{20}:

$R_1 = 1-1\times 2-3$

$R_2 = 4+3+5-6$

$R_3 = 9\times 6\times 10-9$

$R_4 = 16-10+17-12$

$R_5 = 25+25\times 26-15$

⋮

Resolución:

PROBLEMA 15 Si:

$$\overline{abc} \times a = 3888$$
$$\overline{abc} \times b = 2592$$
$$\overline{abc} \times c = 5184$$

Calcular $(\overline{abc})^2$. Dar como respuesta la suma de cifras del resultado.

Resolución: Primero recordemos el esquema de una multiplicación:

```
         3 2 1 ×
         5 4 7
      ---------
       2 2 4 7   ←  7×321 ⎫
     1 2 8 4     ←  4×321 ⎬ PRODUCTOS PARCIALES
   1 6 0 5       ←  5×321 ⎭
   -----------
   1 7 5 5 8 7   ←  PRODUCTO TOTAL
```

Volvamos al problema: $\overline{abc} \times a = 3888$; $\overline{abc} \times b = 2592$; $\overline{abc} \times c = 5184$

$(\overline{abc})^2 = \overline{abc} \times \overline{abc}$ ⇨

```
         a b c ×
         a b c
      ---------
       5 1 8 4   ←  c×abc
     2 5 9 2     ←  b×abc
   3 8 8 8       ←  a×abc
   -----------
   4 1 9 9 0 4
```

Suma de cifras: $4+1+9+9+0+4=27$

PROBLEMA 16 Calcular: a + b

$$(\underbrace{1\times3\times5\times7\times...}_{30\ factores})^4=\overline{...ab}$$

Resolución: Para resolver el problema debemos tener en cuenta lo siguiente:

$$5\times(\#\ impar)=\overline{...5}$$
$$5\times(\#\ par)=\overline{...0}$$
$$(\overline{...5})^n=\overline{...25}\ ;\ \forall\ n\ par$$

Son #s impares

$$(1\times3\times5\times7\times...)^4=\overline{...ab}$$
$$(\overline{...5})^4=\overline{...ab}$$
$$\overline{...25}=\overline{...ab}$$
$$a=2\ ;\ b=5$$
$$\therefore\quad a+b=7$$

PROBLEMA 17 Calcule la última cifra de P. $P=322^{40}+124^{53}$

Resolución: Hay que recordar que si queremos conocer la última cifra, entonces nos centramos en la última de cada sumando. $P=(.....2)^{40}+(.....4)^{53}$

Pero como tanto 2 como 4 no es un número circular.

Entonces debemos partir de la inducción para encontrar algún patrón para cada uno de estos números.

$2^1=2$	$2^5=32$	$2^9=512$
$2^2=4$	$2^6=64$	$2^{10}=1024$
$2^3=8$	$2^7=128$	$2^{11}=2048$
$2^4=16$	$2^8=256$	$2^{12}=4096$

Al analizar la última cifra de los casos, vemos que hay 4 resultados posibles, entonces podemos agruparlos de la siguiente forma:

$$2^{\overset{o}{4}+1}=......2$$
$$2^{\overset{o}{4}+2}=......4$$
$$2^{\overset{o}{4}+3}=......8$$
$$2^{\overset{o}{4}}=......6$$

Luego, $(....2)^{40=\overset{o}{4}} = ...6$

Realizamos un desarrollo similar para el 4.

$4^1 = 4$	$4^3 = 64$	$4^5 = 1024$
$4^2 = 16$	$4^4 = 256$	$4^6 = 4096$

Al analizar la última cifra de los casos, vemos que hay 4 resultados posibles, entonces podemos agruparlos de la siguiente forma:

$$4^{N^\circ\ par} = ...6$$
$$4^{N^\circ\ impar} = ...4$$

Luego, $(....4)^{53=N^\circ\ impar} = ...4$

Reemplazando en lo que nos pedían:

$$M = (.....2)^{40} + (.....4)^{53}$$
$$M = ...6 + ...4 = ...0$$

$\therefore$ La última cifra es cero.

PROBLEMA 18 Se cumple que: $36^{x+2} + 49^x + 54^{x+1} = \overline{......x}$

Calcule: $\overline{x(x+1)(x+2)}^2 - \overline{x(x+1)(x+1)}^2$

Resolución: $\underbrace{36^{x+2}}_{PAR} + \underbrace{49^x}_{IMPAR} + \underbrace{54^{x+1}}_{PAR} = \overline{......x}$

PAR + IMPAR → IMPAR; IMPAR + PAR → IMPAR

NOTA "S"

PAR + PAR = PAR

PAR + IMPAR = IMPAR

IMPAR + IMPAR = PAR

Si x es impar entonces x+1 es par y x+2 es par

$$36^{PAR} + 49^{IMPAR} + 54^{PAR}$$
$$= \overline{.....6} + \overline{......9} + \overline{.....6} = \overline{......1}$$
$$x = 1$$

NOTA "S"

$\overline{......6}^n = \overline{......6}$

$\overline{......4}^{PAR} = \overline{......6}$

$\overline{......4}^{IMPAR} = \overline{......4}$

$\overline{......9}^{PAR} = \overline{......1}$

$\overline{......9}^{IMPAR} = \overline{......9}$

Al reemplazar:

$$123^2 - 122^2 = 123 + 122 = 245$$

NOTA "S"

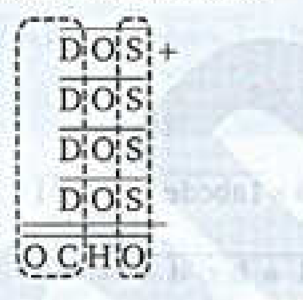
Si x e y son consecutivos:

$$x^2 - y^2 = x + y$$

siendo $x > y$

PROBLEMA 19 En la adición: $\overline{DOS} + \overline{DOS} + \overline{DOS} + \overline{DOS} = \overline{OCHO}$.
Cada letra diferente representa una cifra diferente. Calcule C + O + D + O si se sabe que D + O + S es máximo.

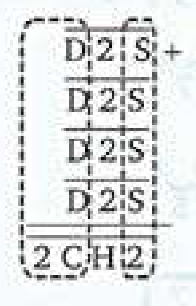
Resolución: Escribimos la adición en columnas:



* En la primera columna tenemos que S+S+S+S=....O → 4S=.....O, de donde se deduce que O es par.

* De la última columna si D fuera 9 entonces D+D+D+D sería 36, entonces el máximo valor que podría ser O es 3.

* De la condición anterior se tiene que O = 2.
Reemplazando en la adición:



* En la primera columna 4S = ...2, entonces S = 3 o S = 8, como D+O+S es máximo, entonces S = 8

* Reemplazando S = 8, se deduce luego que H = 1.
Ahora se tiene:

$$\begin{array}{r} ^{1\ 3} \\ D\,2\ 8\ + \\ D\,2\ 8 \\ D\,2\ 8 \\ D\,2\ 8 \\ \hline 2C\,1\ 2 \end{array}$$

* En la última columna se tiene que $4D+1=2C$, entonces D puede ser 5, 6 o 7 como tiene que ser máximo D es 7 y C es 9.

Finalmente $C+O+D+O$ es :

$$\therefore\ 9+2+7+2=20$$

PROBLEMA 20 Si: $N=\overline{1abcde}$ y $3N=\overline{abcd1}$

Calcule $a+b+c+d+e$

Resolución: Si: $3\times\overline{1abcde}=\overline{abcd1}$

$$\begin{array}{r} \overline{1\,a\,b\,c\,d\,e}\ \times \\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,1 \end{array} \qquad 3\times e=\ldots 1 \qquad \boxed{e=7}$$

$$\begin{array}{r} \overline{1\,a\,b\,c\,d\,7}\ \times \\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,7\,1 \end{array} \qquad 3\times d+2=\ldots 7 \qquad \boxed{d=5}$$

$$\begin{array}{r} \overline{1\,a\,b\,c\,5\,7}\ \times \\ 3 \\ \hline a\,b\,c\,5\,7\,1 \end{array} \qquad 3\times c+1=\ldots 5 \qquad \boxed{c=8}$$

$$\begin{array}{r} \overline{1\,a\,b\,8\,5\,7}\ \times \\ 3 \\ \hline a\,b\,8\,5\,7\,1 \end{array} \qquad 3\times b+2=\ldots 8 \qquad \boxed{b=2}$$

$$\begin{array}{r} \overline{1\,a\,2\,8\,5\,7}\ \times \\ 3 \\ \hline a\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array} \qquad 3\times a=\ldots 2 \qquad \boxed{a=4}$$

$$\therefore\ a+b+c+d+e=4+2+8+5+7=26$$

PROBLEMA 21 Reconstruya la siguiente adición donde cada letra diferente representa una cifra diferente y calcule a + b + c.

$$\overline{abc} + \overline{abc} + \overline{abc} = \overline{bbb}$$

Resolución: Se sabe que: $\overline{abc} + \overline{abc} + \overline{abc} = 3\,\overline{abc}$

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c}\,\times \\ 3 \\ \hline \overline{b\,b\,b} \end{array}$$

Veamos primero algunos posibles valores, de la multiplicación el valor de a puede ser 1, 2 o 3, de ello el valor de $b \geq 3$

Si $b = 3 \rightarrow$ $(\overline{abc}) \times 3 = 333$

$\overline{abc} = 111$ (No puede ser puesto que b debe ser 3)

$b = 4 \rightarrow$ $(\overline{abc}) \times 3 = 444$

$\overline{abc} = 148$ (Cumple la condición del problema)

Entonces : $a = 1$; $b = 4$; $c = 8$

$\therefore$ $a + b + c = 13$

PROBLEMA 22 ¿Cuántas cifras tiene la siguiente expresión?

$$1\,2\,3\,4 \cdots 100$$

Resolución: Piden las cifras de la expresión mostrada entonces:

$$\text{del } \underbrace{1 \text{ al } 9}_{9 \text{ cif.}}$$

$$\text{del } \underbrace{10 \text{ al } 99}_{180 \text{ cif.}}$$

$$\text{en } \underbrace{100}_{3 \text{ cif.}}$$

$\therefore$ Total de cifras : $9 + 180 + 3 = 192$

PROBLEMA 23 Reconstruya la siguiente multiplicación, donde cada asterisco (*) representa una cifra; dé como respuesta la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} 6\ *\ 5\ \times \\ *\ *\ \ \\ \hline 4\ *\ 4\ *\ \ \\ *\ *\ 7\ *\ \ \ \ \\ \hline 1\ *\ *\ *\ 5\ \ \end{array}$$

Resolución: En la multiplicación, analizamos el primer producto parcial

$$\begin{array}{r} 6\ *\ 5\ \times \\ *\ *\ \ \\ \hline 4\ *\ 4\ *\ \ \\ *\ *\ 7\ *\ \ \ \ \\ \hline 1\ *\ *\ *\ 5\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ *\ 5\ \times \\ *\ a \\ \hline 4\ *\ 4\ 5 \end{array} \ \ a \rightarrow \text{impar}$$

6

a

c

Luego:

$$\begin{array}{r} \overset{3}{6\ b}\ 5\ \times \\ *\ 7\ \ \\ \hline 4\ *\ 4\ 5\ \ \\ *\ *\ 7\ *\ \ \ \ \\ \hline 1\ *\ *\ *\ 5\ \ \end{array}$$

En el primer producto parcial

$7b + 3 = ...4$

$7b = ...1$

$b = 3$

Entonces:

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 5\ \times \\ c\ 7\ \ \\ \hline 4\ 4\ 4\ 5\ \ \\ *\ *\ 7\ *\ \ \ \ \\ \hline 1\ *\ *\ *\ 5\ \ \end{array}$$

En el segundo producto parcial

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 5\ \times \\ c \\ \hline 1\ *\ 7\ * \end{array} \ \ c \rightarrow 2 \text{ o } 3$$

Reemplazando se tiene c = 2

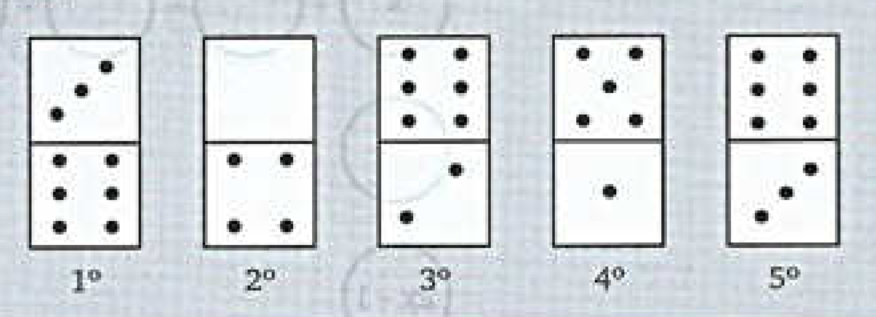
Finalmente:

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 5\ \times \\ 2\ 7\ \ \\ \hline 4\ 4\ 4\ 5\ \ \\ 1\ 2\ 7\ 0\ \ \ \ \\ \hline 1\ 7\ 1\ 4\ 5\ \ \end{array}$$

∴ La suma de cifras del producto es:

$1 + 7 + 1 + 4 + 5 = 18$

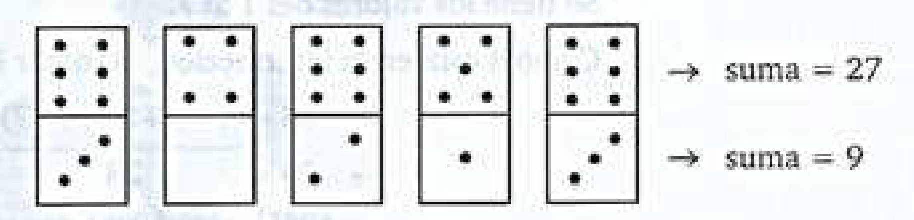
PROBLEMA 24 La figura muestra cinco fichas de dominó. ¿Cuáles deben ser invertidas para que la suma de los puntos de la parte superior sea el triple de la suma de los puntos de la parte inferior?



Resolución: La suma de todos los puntos es 36, según dato:

$$\underbrace{\text{suma arriba}}_{27} = 3\underbrace{(\text{suma abajo})}_{9} \quad 27 + 9 = 36$$

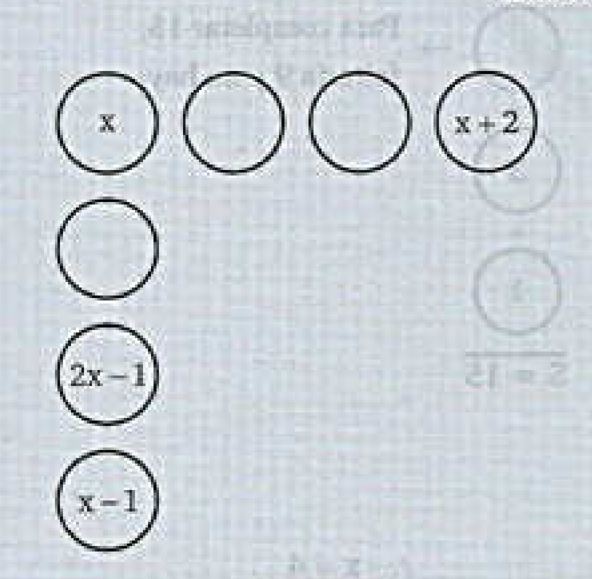
Entonces se deben invertir las fichas 1° y 2°



∴ Hay que invertir la 1° y la 2°

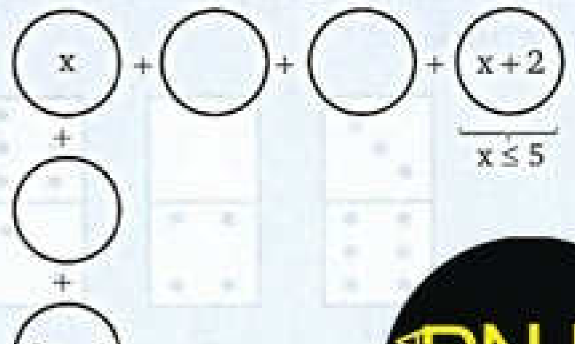
PROBLEMA 25 En la gráfica adjunta, escriba en cada círculo los dígitos del 1 al 7, sin repetirlos, de modo que la suma de los cuatro números escritos en fila o columna, formada por cuatro círculos, sea la misma. Halle el valor de x.

ADMISIÓN UNMSM 2017 - I



Resolución: Nos piden el valor de x.

Primero, veamos los valores colocados y la suma constante.



$$x + \bigcirc + \bigcirc + (x+2) = S \qquad x \le 5$$

$$x + \bigcirc + (2x-1) + (x-1) = S$$

Se tiene los valores del 1 al 7.

Como x está en la intersección, al tomar las dos sumas, x se repite. Entonces:

$$2S = \underbrace{(1+2+3+...+7)}_{} + x$$

$$\rightarrow \underset{(par)}{2S} = \underset{(par)}{28} + x$$

$x \downarrow$: $2 \rightarrow S = 15$; $4 \rightarrow S = 16$

Analizamos los casos x = 2 y x = 4

* Caso x = 2

$$2 + \bigcirc + \bigcirc + 4$$

Columna: $2 + \bigcirc + 3 + 1$ → Para completar 15, faltaría 9 y no hay

$\overline{S = 15}$

* Caso x = 4

$$4 + 1 + 5 + 6 = 16$$

Columna: $4 + 2 + 7 + 3$

$\overline{S = 16}$

Se completa con éxito

$\therefore \ x = 4$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule a + b + c + d + e; si:

$\overline{abcde} \times 999999 = ...23457$

A) 20 B) 21 C) 23
D) 24 E) 25

2. Se conoce que:

$\underbrace{276 + 376^2 + 476^3 + 576^4 + ...}_{20\ \text{sumandos}} = \overline{.....abc}$

Calcule $(a + b + c)^c$.

A) 7 B) 1 C) 4
D) 9 E) 16

3. Tatiana va al mercado y por un plátano paga 21 céntimos, por una tuna 12 céntimos y por una sandía 18 céntimos. ¿Cuánto gastará al comprara un mamey, un melocotón y una naranja?

A) 60 cent. B) 63 cent. C) 72 cent.
D) 80 cent. E) 96 cent.

4. Se sabe que:

$m = \sqrt{13} - \sqrt{11}$

$n = \sqrt{7} - \sqrt{13}$

$p = \sqrt{11} - \sqrt{7}$

Calcule $\left(\frac{m^2}{np} + \frac{n^2}{mp} + \frac{p^2}{mn}\right)^4$

A) 16 B) 1 C) 81
D) 256 E) 625

5. Un caracol inicia el ascenso por la pared de un pozo de 4m de profundidad. Su objetivo es salir a la superficie. Durante el día el caracol asciende 40cm pero por la noche mientras descansa, resbala 30cm. ¿Cuántos días tardará en salir del pozo?

A) 40 B) 39 C) 38
D) 37 E) 36

6. Una academia organizó un campeonato de ajedrez. Se enfrentaron dos equipos, uno formado por José, Julia, Juana y Janet y el otro por Luis, Lidia, Leonardo y Lorena. Los integrantes de un equipo jugaron sólo una vez con cada integrante del otro equipo. Cada día se jugaron 4 partidas. El segundo día jugaron José con Lidia y Janet con Lorena. El tercer día jugaron Juana con Leonardo y Julia con Lidia. El cuarto día Leonardo con José y Luis con Julia. ¿Con quién jugó Leonardo el primer día?

A) José B) Julia C) Juana
D) Janet E) Lorena

7. Dado: $\overline{xyz} = 5 . x . y . z$

Calcule $(x + y + z)^2$

A) 49 B) 169 C) 361
D) 121 E) 289

8. Calcule la última cifra de $(999)^{\overline{RM}}$, si se sabe que:

$2(3316^{\overline{CESAR}}) + 1111^{\overline{DE}} + 3(25^{\overline{RONALD}}) = \overline{.....M}$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 5

9. En las dos sumas siguientes, cada letra representa un dígito diferente.

$$\begin{array}{r} AAA+ \\ BBB \\ CCC \\ \hline FGHI \end{array} \qquad \begin{array}{r} AAA+ \\ DDD \\ EEE \\ \hline FGHI \end{array}$$

Calcule: A + B + C + D + E

A) 19 B) 23 C) 27
D) 30 E) 24

10. Si:

$$\overline{m1m}+\overline{m2m}+\overline{m3m}+...+\overline{m9m}=\overline{abc4}$$

Hallar (a + b + c)

A) 11 B) 15 C) 13
D) 17 E) 14

11. Halle el menor número que multiplicado por 33 da un producto cuyas cifras son todas 7. De cómo respuesta la suma de cifras de dicho número.

A) 21 B) 23 C) 25
D) 30 E) 18

12. Si

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{\overline{aa}}{\overline{bb}}+\frac{\overline{aaa}}{\overline{bbb}}+...+\frac{\overbrace{\overline{aaa.....aa}}^{25\text{ cifras}}}{\underbrace{\overline{bbb.....bb}}_{25\text{ cifras}}}\right)^{\frac{a}{b}}=2500$$

Además a + b = 12; calcule a – b

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 2

13. Calcular (a + b + x)

$$a+\overline{ba}+\overline{aba}+\overline{baba}+...+\underbrace{\overline{aba...aba}}_{29\text{ cifras}}=...\overline{x0a}$$

b < 7

A) 9 B) 8 C) 6
D) 11 E) 12

14. Si :

$$(a+b+c)^2=\overline{a25}$$

Calcular :

$$A=\overline{ab3}+\overline{c2b}+\overline{4ac}+\overline{bca}$$

A) 2088 B) 2078 C) 1988
D) 2080 E) 1908

15. Hallar: a + b + c

$$\overline{a1b}+\overline{a2b}+\overline{a3b}+...+\overline{a9b}=\overline{a2cb}$$

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 15

16. Si se cumple que:

$$b+\overline{ab}+\overline{bab}+\overline{abab}+...+\underbrace{\overline{bab...bab}}_{23\text{ cifras}}=...498$$

Calcular: a + b

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

17. Si:

$$\overline{abcde}+\overline{edcba}=\overline{876mn}$$

Y además: a < b < c < d < e

Calcular:

$$E=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

A) 88 B) 87 C) 86
D) 85 E) 80

18. Si se cumple que:

$$\overline{UNMSM}\times 99999=...78647$$

Calcular: U + N + M + S

A) 10 B) 11 C) 15
D) 16 E) 19

19. Si : $N\times 375=.....625$
$N\times 427=.....021$

Halle las tres últimas cifras de $N\times 156$

A) 088 B) 178 C) 978
D) 188 E) 168

20. Si: $\overline{abc}\times a = 428$
$\overline{abc}\times b = 214$
$\overline{abc}\times c = 856$

Calcular: $(\overline{abc})^2$

A) 45790 B) 45796 C) 44790
D) 44796 E) 45786

21. Hallar el resultado de la siguiente operación:

$$A = \frac{6}{7}+\frac{66}{77}+\frac{666}{777}+\frac{6666}{7777}+\ldots+\frac{\overbrace{666\ldots66}^{28\text{ cifras}}}{\underbrace{777\ldots77}_{28\text{ cifras}}}$$

A) 12 B) 18 C) 30
D) 6 E) 24

22. Si: $\sqrt[n]{\overline{UNMS}} = n$

Halle: U + N + M + S + n

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

23. Si se cumple que:

$$\begin{array}{r} \overline{ABCD}\ \times \\ 4 \\ \hline \overline{DCBA} \end{array}$$

Calcular el valor de: A + B + C + D

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 20

24. Si se cumple que: $\overline{abc}\times 111\times 999 = \ldots 376$

Calcular: a + b + c

A) 10 B) 12 C) 14
D) 11 E) 15

25. Si $A^E = A\times B$, además

$\overline{PAPA}+\overline{MAMA}=\overline{BEBE}$

(Letras diferentes son cifras diferentes)

Calcule $\overline{BEBE}$.

A) 49 B) 169 C) 361
D) 121 E) 289

26. Si: $F_1 = 4\times 1+1$
$F_2 = 8\times 4+8$
$F_3 = 12\times 9+27$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Hallar: "x"; si:

$$F_x = 4\times 10^4$$

A) 18 B) 20 C) 25
D) 22 E) 24

27. Calcular: m + n + p

$$(\overline{\ldots mnp6})^2 = \overline{\ldots mnp6}$$

A) B) C)
D) E)

28. Reconstruir la siguiente multiplicación y dar como respuesta la suma de cifras del producto

$$\begin{array}{r} 5 * 4\ \times \\ * 5 \\ \hline 2 * * * \\ * 1 * 6\ \ \\ \hline * * 5 3 * \end{array}$$

A) B) C)
D) E)

29. Calcular: x + y

$$\overline{ab5}^{\,2}+\overline{ab5}^{\,4}+\overline{ab5}^{\,6}+\ldots+\overline{ab5}^{\,70}=\overline{\ldots xy}$$

A) 7 B) 10 C) 12
D) 13 E) 9

30. Si:

$$N = \ldots 376$$

Calcular: "a + b + c" en:

$$N^3+N^6+N^9+\ldots+N^{90}=\overline{\ldots abc}$$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

31. Calcular la suma de cifras del décimo término en la siguiente sucesión :

1 , 22 , 333 , 4444 , 55555 , ...

A) 100 B) 10 C) 20
D) 50 E) 5

32. Calcular la suma de las 3 últimas cifras del resultado de la siguiente operación:

$$A = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + ... + 5^{20}$$

A) 11 B) 13 C) 15
D) 17 E) 19

33. Calcular: m + p

$$\underbrace{(2^1+3)(2^2+5)(2^3+7)(2^4+9)...}_{100\text{ factores}} = \sqrt{\overline{...mp}}$$

A) 5 B) 0 C) 15
D) 7 E) 19

34. Si $\overline{FELIZ} - \overline{DIA} = \overline{MAMA}$, además, $2 < I < L < 6$ y a letras difetrentes le corresponde cifras diferentes. Halle la suma de las cifras de $\overline{FIDELIDAD}$

A) 40 B) 38 C) 36
D) 42 E) 34

35. Calcule la suma de las cifras que faltan en el cociente:

```
* * * * * * * * | * *
* * *            ------
-----             * * 8 * *
_ _ _ * *
    * *
    ---
    _ * * *
      * * *
      -----
      _ _ _
```

A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 26

36. Calcule la última cifra del resultado de operar P.

$$P = (3^{2004}+2)(3^{2003}+2)(3^{2002}+2)(3^{2001}+2)....(3^{100}+2)$$

A) 5 B) 7 C) 4
D) 8 E) 6

37. Calcule a + b, donde se cumple que:

$$[(2+1)(2^2+3)(2^3+5)...(2^{100}+199)]^2 = \overline{....ab}$$

A) 8 B) 7 C) 10
D) 12 E) 3

38. Se tiene que:

$$1376 + 2376^2 + 3376^3 + ... + 20376^{20} = \overline{.....abc}$$

Calcule a + b + c

A) 12 B) 15 C) 13
D) 16 E) 21

39. Calcule la suma de las tres últimas cifras del resultado de:

$$\underbrace{9^2 + 99^2 + 999^2 + 9999^2 + ...}_{20\text{ sumandos}}$$

A) 10 B) 9 C) 11
D) 8 E) 12

40. Sea N, un número tal que

$N \times 425 = ...225$

$N \times 417 = ...489$

Calcule la suma de las tres últimas cifras de $N \times 56$

A) 9 B) 8 C) 10
D) 12 E) 7

41. Calcule la última cifra del resultado de efectuar la siguiente adición.

$13^{\overline{a001}}+23^{\overline{a002}}+33^{\overline{a003}}+43^{\overline{a004}}+....1743^{x}$

A) 2 B) 0 C) 9
D) 1 E) 8

42. Se conoce que:

$\frac{x+z}{2}=y$, además $x-z=2\sqrt[10]{3}$

Calcule el valor de A.

$A=(x-z)^{10}+(y-z)^{10}-(x-y)^{10}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

43. El banquero ha dejado olvidado el código de la caja fuerte dentro de ésta. Afortunadamente recuerda que dicho código consta de nueve cifras distintas, todas excepto el cero. Además, sabe que, a partir de la izquierda:

- El número formado por la primera y la segunda cifra es múltiplo de dos.
- El número formado por la segunda y la tercera cifra es múltiplo de tres.
- El número formado por la tercera y la cuarta cifra es múltiplo de cuatro.

....y así sucesivamente, hasta

- El número formado por la octava y la novena cifra que es múltiplo de nueve.

Con estos datos encuentra dos posibles números. Dar como respuesta la suma de las dos primeras cifras en el menor de ellos.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 15 E) 3

44. En el siguiente criptograma, a letras diferentes corresponden cifras diferentes.

$\overline{TRES}\times 4=\overline{DOCE}$

Siendo "S" una cifra impar y "O" igual cero, calcular el mayor valor de:

$(\overline{TRECE}+\overline{TRECE})$

A) 25352 B) 26462 C) 27750
D) 30584 E) 30694

45. ¿Cuál es el número de 5 cifras que multiplicado por 22 nos da un producto cuyas cifras son todas 8?

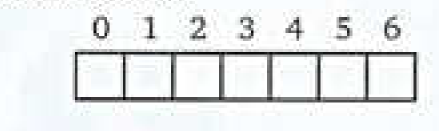
Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 12 B) 8 C) 16
D) 20 E) 6

46. Se sabe que $\overline{aab}-\overline{baa}=\overline{xy3}$, además b es par. Calcule $x+y+a+b$.

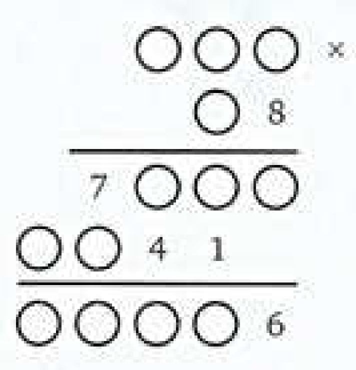
A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

47. En la siguiente figura escriba un número de 7 cifras (una cifra en cada casilla) de tal manera que la cifra de la casilla "0" exprese cuantos ceros tiene el número; la cifra de la casilla "1" exprese cuantos unos tiene el número y así sucesivamente hasta la casilla "6" que dirá cuantos seis tiene el número. ¿Cuál es el número?. Dar como respuesta la suma de sus cifras.



A) 7 B) 6 C) 5
D) 4 E) 8

48. Luego de reconstruir la siguiente multiplicación ubicando en cada círculo una cifra, calcule la suma de cifras del producto.



A) 31 B) 28 C) 30
D) 29 E) 32

49. La botonera de una caja fuerte tiene un aspecto extraño (ver figura). La caja sólo se abre pulsando los botones según una secuencia determinada. Cada botón tiene una letra y un número. Por ejemplo, el botón 2s de la esquina superior derecha nos dice que el próximo botón que debe apretarse está a dos botones en dirección sur (el que tiene escrito 2o). ¿Cuál es el primer botón que debe apretarse, si se conoce el último y hay dos botones "mentirosos" cuya misión es confundir a los ladrones?

1e	2s	4s	1o	2s
4e	3s	1e	2s	3s
1n	1o	1s	2s	2o
3e	2n	1o	1e	3n
4n	último	3n	4n	1o

A) 4n B) 3n C) 1o
D) 2s E) 2e

50. La tabla representa parcialmente el desarrollo de un torneo entre cuatro equipos, A, B, C y D, que jugaron todos contra todos a una vuelta:

	PJ	PG	PP	PE	GF	GC
A		2			2	
B			0	0	4	1
C					5	3
D	3					

¿Cuál fue el resultado del partido que jugaron C y D?

A) 3 a 0 B) 4 a 1 C) 5 a 0
D) 5 a 1 E) 3 a 1

Interpretación de Enunciados

CAPACIDADES

- Desarrollar la capacidad de traducción (textual algebraica).
- Potenciar el uso de ecuaciones de primer grado, de segundo grado, sistema de ecuaciones, ecuaciones diofánticas, etc.
- Vincular el tema con la realidad cotidiana, a partir de aplicaciones en la vida diaria.

DECODIFICACIÓN

Decodificar

Proceso a través del cual se interpreta adecuadamente la información contenida en un texto determinado

1. Contextualización

- Momento en el que se identifica el entorno y el conjunto de elementos en los cuales se enmarca un texto, a fin de obtener una mejor comprensión del mismo.
- En este momento también se hace un ejercicio de identificación y definición de las palabras desconocidas.

2. Ubicación de la información

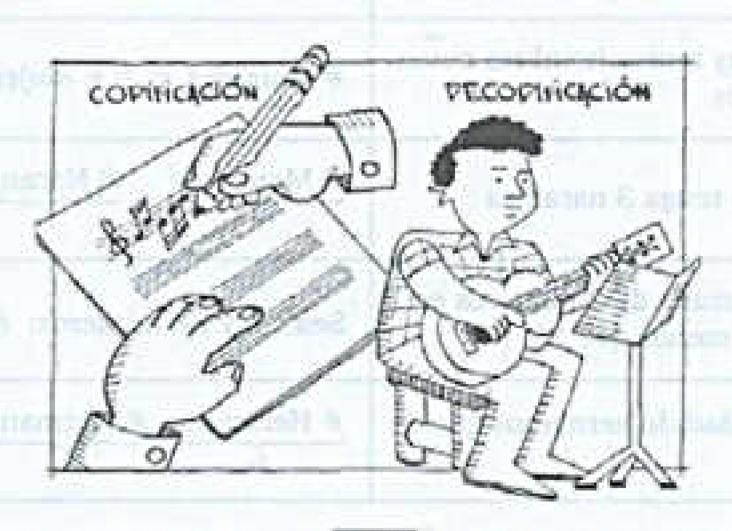
Momento en el que se identifica la información fundamental que propone un texto particular. Esta información se divide en:

a) la que corresponde al propósito del autor en el texto

b) la que se determina en la ruta de desarrollo, que también establece el autor

c) la que da cuenta de las relaciones que se dan entre propósito y ruta de desarrollo.

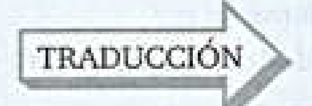
3. Representación global

Momento final del proceso en el que se da cuenta de la aprehensión total del texto, a través de un organizador gráfico en el que se presenta la información más relevante propuesta por el autor y las relaciones que hallamos en el momento anterior. ubicar información.

INTRODUCCIÓN

Cuando la tierra gira alrededor del sol, cuando recibes una llamada en tu teléfono celular, cuando un tigre persigue a un jabalí o cuando un trasbordador vuela rumbo al espacio y en múltiples situaciones de la vida diaria, aunque no lo parezca, se ven involucradas expresiones matemáticas que implican el uso de ecuaciones.

Veamos a continuación algunos pequeños enunciados, que pueden ser parte de su problema, y su respectiva interpretación simbólica.

Lenguaje Castellano
(Enunciado de un problema)



Lenguaje Simbólico
(Ecuaciones)

	LENGUAJE CASTELLANO	LENGUAJE SIMBÓLICO
1	"A" tiene S/.5 más que "B" "A" excede a "B" en S/.5	$A = B + 5$; $A - B = 5$; $\underbrace{A}_{S/.x+5}$ $\underbrace{B}_{S/.x}$
2	"A" tiene S/.5 menos que "B" "A" es excedido por "B" en S/.5	$A = B - 5$; $B - A = 5$; $\underbrace{A}_{S/.x-5}$ $\underbrace{B}_{S/.x}$
3	El exceso de "x" sobre "y" es 15	$x - y = 15$
4	El triple de un número, disminuido en 5	Sea "x" el número: $3x - 5$
5	El triple, de un número disminuido en 5	Sea "x" el número: $3(x - 5)$
6	Tengo tantos litros como cuadernos	#Libros = #Cuadernos; $\underbrace{\#Libros}_{x}$ $\underbrace{\#Cuadernos}_{x}$
7	En una reunión hay tantos hombres como el doble de mujeres	# Hombres = 2(# Mujeres) ; Hombres : 2x Mujeres : x
8	Por cada manzana tenga 3 naranjas	$\underbrace{\#\ Manzanas}_{x}$ $\underbrace{\#\ Naranjas}_{3x}$
9	El cuadrado de la suma de 2 números es mayor que 8 pero menor que 15	Sea x e y los números: $8 < (x + y)^2 < 15$
10	Tengo doble cantidad de hermanos que de hermanas	$\underbrace{\#\ Hermanos}_{2x}$ $\underbrace{\#\ Hermanas}_{x}$

Ejemplo: De una canasta de frutas, la tercera parte son manzanas y la cuarta parte son naranjas. Si entre manzanas y naranjas se cuentan 28 frutas, ¿Cuántas frutas hay en la canasta?

Resolución: Sea "x" el número de frutas de la canasta:

- La tercera parte son manzanas y la cuarta parte son naranjas $\underbrace{\#\text{Manzanas}}_{\frac{x}{3}}$ $\underbrace{\#\text{Naranjas}}_{\frac{x}{4}}$

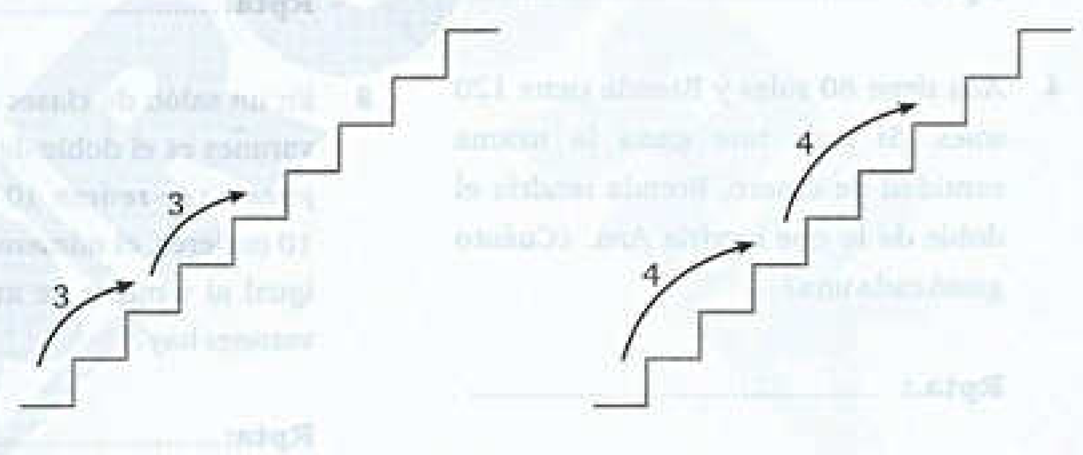
- Entre manzanas y naranjas se cuentan 28 $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=28$

Resolviendo: $x = 48$

$\therefore$ En la canasta hay 48 frutas

Ejemplo: Si subo una escalera de 3 en 3 escalones doy 10 pasos más que si subiera de 4 en 4 escalones. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

Resolución: Sea "x" el número de escalones de la escalera.



"x" escalones — "x" escalones

\# pasos que doy: $\frac{x}{3}$ — \# pasos que doy: $\frac{x}{4}$

(Aquí se dan 10 pasos más)

$\Rightarrow \frac{x}{3}-\frac{x}{4}=10$

Resolviendo: $x = 120$

$\therefore$ La escalera tiene 120 escalones

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. La suma de 3 números consecutivos es 120, ¿cuál es el mayor de los números?

   Rpta.: ....

2. Tú tienes el doble de lo que yo tengo y él tiene el triple de lo que tu tienes. Si entre los tres tenemos 180 soles, ¿cuánto tengo yo?

   Rpta.: ....

3. De las frutas que hay en una canasta, la tercera parte son naranjas y la cuarta parte son manzanas. Si las naranjas y manzanas suman 28, ¿cuántas frutas hay en la canasta?

   Rpta.: ....

4. Ana tiene 80 soles y Brenda tiene 120 soles. Si cada una gasta la misma cantidad de dinero, Brenda tendría el doble de lo que tendría Ana. ¿Cuánto gastó cada una?

   Rpta.: ....

5. Coquito tiene 94 soles en monedas de dos y cinco soles. Si el número de monedas de dos soles excede al de cinco soles es 12, ¿cuántas monedas tiene en total?

   Rpta.: ....

6. Lo que tienen Ángel y Betty suman S/. 120. Si Ángel tiene S/. 30 más que Betty, ¿cuánto tiene Ángel?

   Rpta.: ....

7. Coquito y Pepito tienen igual cantidad de canicas. Si Pepito le diera 10 canicas a Coquito, éste tendría el doble de lo que le quedaría a Pepito. ¿Cuánto tiene cada uno?

   Rpta.: ....

8. Ana tiene S/. 10 más que Beto. El doble de lo que tiene Ana y el triple de lo que tiene Beto suman S/. 170. ¿Cuánto tienen entre los dos?

   Rpta: ....

9. En un salón de clases el número de los varones es el doble del número de mujeres. Si se retiran 10 varones y llegan 10 mujeres, el número de varones sería igual al número de mujeres. ¿Cuántos varones hay?

   Rpta: ....

10. Una bolsa de caramelos se va a repartir entre un grupo de niños, tocándole a cada uno 10 caramelos. Si se retira un niño, cada uno de los restantes recibirá 12 caramelos. ¿Cuántos niños son?

    Rpta: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Leslie tiene palomas, canarios y loros. Sin contar las palomas tiene 32 aves, sin contar los canarios tiene 35 aves y sin contar los loros tiene 27 aves. ¿Cuántos loros tiene?

Resolución:

n° de palomas = x
n° de canarios = y
n° de loros = z

- Sin contar las palomas: $y + z = 32$
- Sin contar los canarios: $x + z = 35$ (+)
- Sin contar los loros: $x + y = 27$

$$2x + 2y + 2z = 94$$

$$\Rightarrow \underbrace{x + y}_{27} + z = 37$$

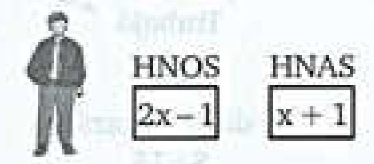
$$z = 10$$

$\therefore$ Tiene 10 loros

PROBLEMA 2 En una familia se cuentan varios niños y niñas. Alguien les pregunta ¿Cuántos son? y la niña mayor contestó que tenía tantos hermanos como 2 veces el número de hermanas; pero el niño mayor dijo que sus hermanos exceden a sus hermanas en 1. ¿Cuántos niños y niñas son en total?

Resolución:

Ahora habla el niño mayor, pero ten en cuenta que él es uno de los hermanos de la niña que habló antes, entonces:



El dijo: "Que sus hermanos exceden a sus hermanas en 1"

$$\Rightarrow 2x - 1 - (x + 1) = 1$$

Resolviendo: $x = 3$

$\therefore$ TOTAL = $3(3) + 1 = 10$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

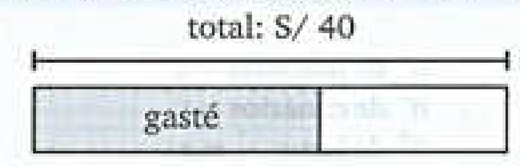
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

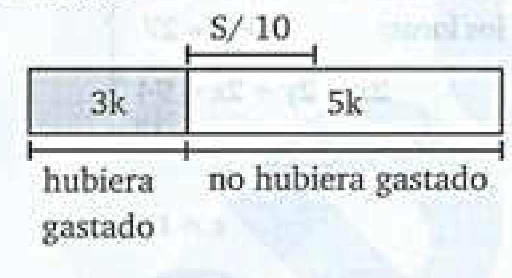
03 de setiembre del 2020

PROBLEMA 3 Al preguntarle a mi hermano cuanto había gastado de los S/ 40 que le dí, él respondió: Si no hubiese comprado ese producto de S/ 10, tan solo hubiera gastado los 3/5 de lo que no hubiera gastado. ¿Cuánto gastó?

Resolución: El dinero inicial es de S/ 40, nos preguntan cuánto se gastó de ese dinero.



En el supuesto: si no hubiese comprado un producto de S/ 10 entonces el gasto sería S/ 10 menor.



Luego : $3k + 5k = 40$

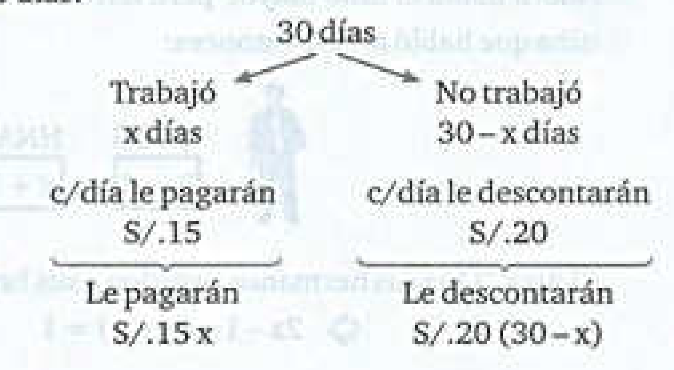
$\rightarrow k = 5$

Lo que hubiese gastado sería S/ 15, pero es S/ 10 menor que el gasto real.

$\therefore$ El gasto es: $15 + 10 =$ S/ 25

PROBLEMA 4 Una fábrica contrata a un obrero con la siguiente condición: por cada día que trabaje le pagarán S/.15 y por cada día que no trabaje le descontarán S/.20. Si luego de 30 días, el obrero solo recibió S/.170, ¿cuántos días trabajó?

Resolución: Han trascurrido 30 días:



Al final lo que recibe es:

$$15x - 20(30 - x) = 170$$

Resolviendo: $x = 22$

$\therefore$ Trabajó 22 días

PROBLEMA 5 Una señora duda entre comprar 360 cuadernos o por el mismo precio 45 borradores y 45 lapiceros. al final por el mismo precio decide comprar la misma cantidad de cada artículo. ¿Cuántos artículos compró en total?

Resolución: Por el mismo precio: $360C$ ó $45B + 45L$ (En este caso el "o" lo entenderemos como igualdad)

$\Rightarrow 360C = 45B + 45L$

al final por el mismo precio compró

$xC + xB + xL$

$\Rightarrow 360C = 45B + 45L$

$360C = xC + xB + xL$

i) $360C = 45B + 45L$

Simplificando:

$8C = B + L$

ii) $360C = xC + xB + xL$

$360C = x(C + \underbrace{B + L}_{8C})$

$360C = x(9C)$

$x = 40$

Entonces compró: 40C; 40B y 40L

$\therefore$ En total compró 120 artículos

PROBLEMA 6 Juan vendió 1000 libros y le quedo más de la mitad de los que tenía al inicio. Luego vende 502 libros y le queda por vender menos de 500 libros. ¿Cuántos libros tenía Juan al inicio? **ADMISIÓN UNMSM 2009 - II**

Resolución: Del enunciado, sea x el número de libros que Juan tenía al inicio: x.

* Juan vende 1000 libros → quedan $(x - 1000)$ libros.

Por dato:

$$x-1000>\frac{x}{2} \rightarrow \text{ mitad del número de libros (I)}$$

* Luego vende 502 libros → quedan (x – 1502) libros.

Por dato: $x-1502<500$ (II)

De (I): $\underbrace{x>2000 \text{ y de (II): } x<2002}$

$$\rightarrow 2000<x<2002$$

∴ El número de libros es 2001.

PROBLEMA 7 Con todos los alumnos de un aula se formó un cuadrado compacto con "n" alumnos por lado. Pero si quisieran formar dos triángulos equiláteros compactos con "n" alumnos por lado, harían falta 9 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en el salón?

Resolución:

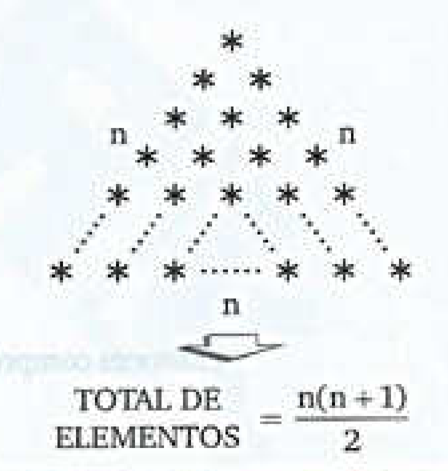
Observación:

Un cuadrado compacto es un cuadrado totalmente lleno, veamos:

```
    * * * * ··· *
    * * * * ··· *
    * * * * ··· *
n   * * * * ··· *
    ⋮ ⋮ ⋮ ⋮  ⋱  ⋮
    * * * * ··· *
          n
```

TOTAL DE ELEMENTOS $= n^2$

Un triángulo equilátero compacto es un triangulo totalmente lleno, veamos:



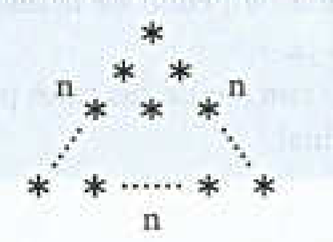
TOTAL DE ELEMENTOS $= \frac{n(n+1)}{2}$

Con todos los alumnos se formó un cuadrado compacto:

```
  * * * ··· *
  * * * ··· *
n * * * ··· *
  ⋮ ⋮ ⋮  ⋱  ⋮
  * * * ··· *
      n
```

⇨ TOTAL DE ALUMNOS $= n^2 = ?$

Para formar 2 triángulos equiláteros compactos:



$$\text{\# DE ALUMNOS} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{\# DE ALUMNOS} = \frac{n(n+1)}{2}$$

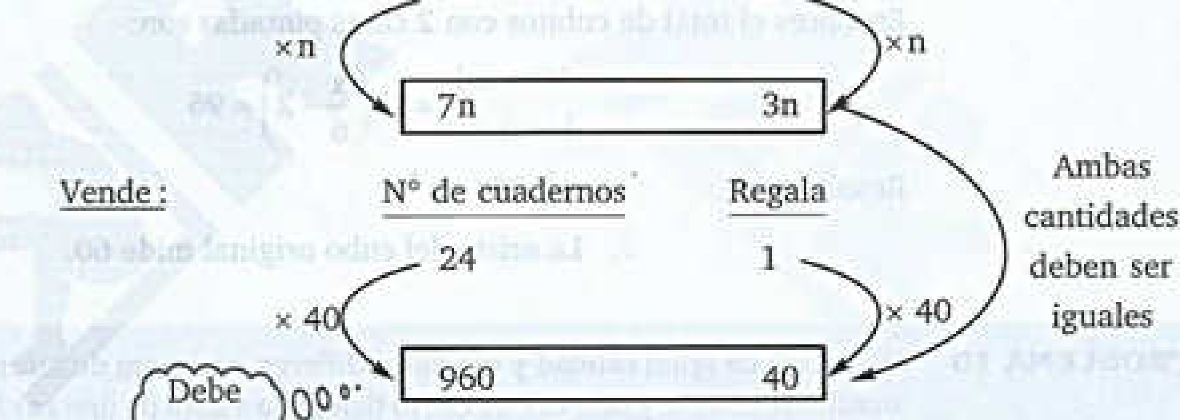
Harán falta 9 alumnos: $n^2 + 9 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$

Resolviendo: $n = 9$

$\therefore$ TOTAL DE ALUMNOS $= 9^2 = 81$

PROBLEMA 8 A un comerciante por cada 7 cuadernos que compra le regalan 3 y cuando los pone a la venta, por cada 2 docenas que vende regala 1. ¿cuántos cuadernos deberá comprar para que pueda vender 960 y no sobren cuadernos?

Resolución:



entonces : $10n = 1000$

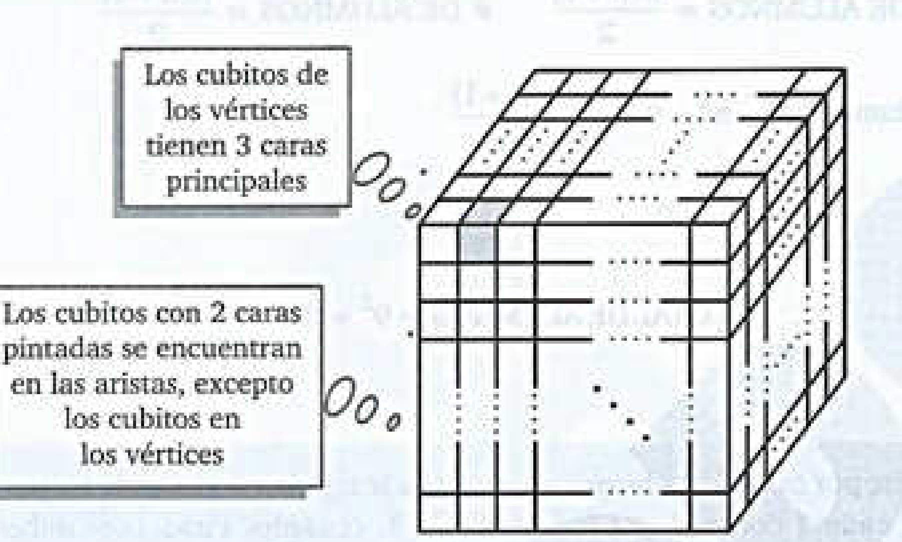
$n = 100$

$\therefore$ Debe comprar 7n

$7(100) = 700$

PROBLEMA 9 Se pinta la superficie de un cubo de madera compacto, luego se divide en cubitos de 6 cm de arista.
Si el número de cubos con dos de sus caras pintadas es 96. Halle la medida de la arista del cubo original.

Resolución: Veamos el gráfico



$$\text{N° de cubitos c/arista} = \frac{x}{6}$$

Luego el número de cubitos que se encuentra en cada arista y que tienen dos caras pintadas son: $\frac{x}{6} - 2$ (Los 2 cubitos de los vértices)

Entonces el total de cubitos con 2 caras pintadas son:

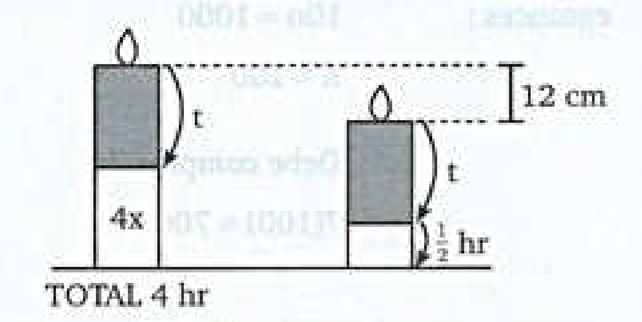
$$\text{N° total de aristas} = 12\left(\frac{x}{6} - 2\right) = 96$$

Resolviendo: $x = 60$

$\therefore$ La arista del cubo original mide 60.

PROBLEMA 10 Dos cirios de igual calidad y diámetro difieren en 12 cm de altura. Se encienden simultáneamente y después de cierto tiempo la altura de uno es el cuádruplo de la del otro, y media hora después se termina el más pequeño. Si el más grande duró en total 4 horas, su altura era:

Resolución:



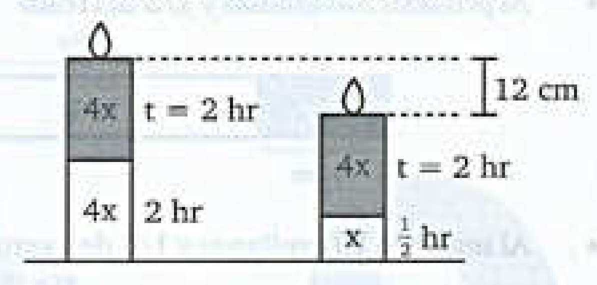
Si "x" se consume en 1/2 hr

⇨ 4x se consume en 2 hr

Si "4x" se consume en 2 hr

⇨ t = 2 hr (ya que el cirio grande duró en total 4 hr)

Si t = 2 hr ⇨ Lo consumido en ese tiempo es "4x"



Altura del grande: 8x

Altura del pequeño: 5x

$8x - 5x = 12\text{ cm}$

$x = 4\text{ cm}$

∴ Altura del grande: 8(4) = 32 cm

PROBLEMA 11 Si por S/.200 dieran 6 libros más de los que dan, entonces la docena de libros costaría S/.90 menos. ¿Cuántos libros dan por s/.200?

Resolución:

Por S/.200	Si por S/.300
dan "x" libros	dieran "x + 6" libros
c/libro cuesta	c/libro costaría
$\frac{S/.200}{x}$	$\frac{S/.200}{x+6}$

La docena cuesta	La docena costaría
$S/12\times\frac{200}{x}$	$S/12\times\frac{200}{x+6}$

La docena costaría S/ 90 menos

$$12\times\frac{200}{x}-12\times\frac{200}{x+6}=90$$

Simplificando: $\frac{80}{x}-\frac{80}{x+6}=3$

Resolviendo: $x = 10$

∴ Por S/200 dan 10 libros

MÉTODO "S"

Copia y pega M

$x\ (x+6) = 6\times 200$

$\boxed{\frac{90}{12}}$ → diferencia de precios unitarios

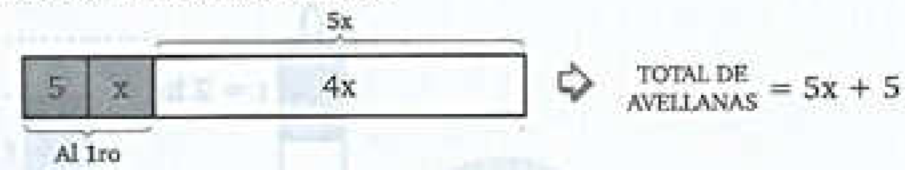
$x\ (x+6) = 160 = 10\times 16$

∴ $x = 10$

PROBLEMA 12 Una señora distribuye entre sus hijos cierto número de avellanas. al primero le da 5 avellanas y 1/5 del resto; al segundo, 10 avellanas más 1/5 del resto; al tercero 15 avellanas más 1/5 del resto, y así sucesivamente. ¿Cuál era el número de hijos y cuántas avellanas tocaron a cada uno, si todos recibieron el mismo número de avellanas?

Resolución:

- Al primero 5 avellanas y 1/5 del resto



- Al segundo 10 avellanas y 1/5 del resto

No es necesario continuar con el reparto ya que el problema nos dice que todos recibieron el mismo número de avellanas. Esto quiere decir que lo recibido por el 1ro y el 2do son iguales.

$$5 + x = 10 + \frac{4x - 10}{5}$$

Resolviendo: $x = 15$

Total de avellanas: $5(15) + 5 = 80$

Y al 1ro le toco: $5 + 15 = 20$ avellanas

Entonces a cada hijo le tocaron 20 avellanas.

$$\therefore \text{N° de hijos: } \frac{80}{20} = 4$$

MÉTODO "S"

Observe que la fracción $\frac{1}{5}$ se repite en todo el enunciado del problema, entonces el número de personas es el denominador disminuido en 1.

En el problema : $5 - 1 = 4$

$\therefore$ N° de hijos = 4

PROBLEMA 13 Aracelly tiene 20 monedas en su cartera; algunas son de S/ 0,10, otras de S/ 0,20 y el resto de S/ 0,50. Si el total de dinero que ella tiene en su cartera es S/ 5 y tiene más monedas de S/ 0,50 que de S/ 0,10, ¿cuántas monedas de S/ 0,20 tiene?

ADMISIÓN UNMSM 2007 - II

Resolución: De los datos:

Aracelly tiene S/ 5 en un total de 20 monedas. Sea:

N° monedas de S / 0,10 → a

N° monedas de S / 0,20 → b

N° monedas de S / 0,50 → c

Además: $a < c$ (condición de problema).

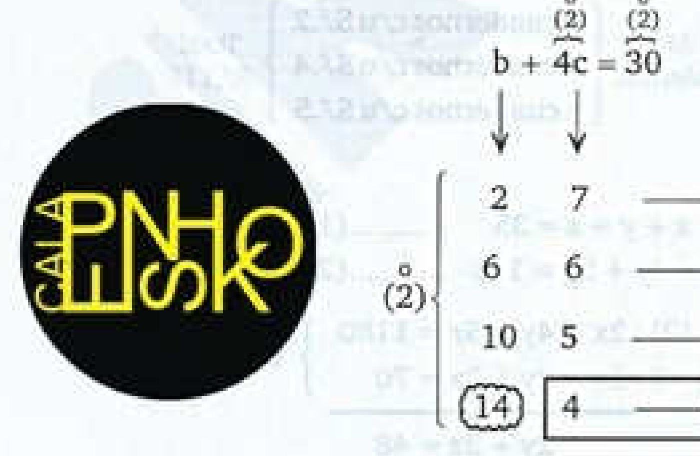
Nos piden la cantidad de monedas de S/ 0,20

N° monedas : $a + b + c = 20$ (I)

Monto (S /) : $0{,}10a + 0{,}20b + 0{,}50c = 5$ (II)

A la ecuación (I) la multiplicamos por 10 y le restamos la ecuación (I); entonces, tenemos:

$$\underbrace{b}_{} + \overset{\overset{\circ}{2}}{4c} = \overset{\overset{\circ}{2}}{30}$$



b ($\overset{\circ}{2}$)	c	a
2	7	11
6	6	8
10	5	5
(14)	4	2

se cumple $a < c$

∴ Entonces, el número de monedas de S/ 0,20 es 14.

PROBLEMA 14 Un ómnibus sale de Lima y llega al Callao con una recaudación de S/.460. el precio del pasaje es S/.5. En el trayecto cada vez que bajaban 2 pasajeros subían 5. Si el ómnibus llegó al Callao con 62 pasajeros, ¿Cuántos pasajeros tenía el ómnibus al salir de Lima?

Resolución: Recaudación: S/.460
Pasaje: S/.5

$$\text{Viajaron: } \frac{460}{5} = 92 \text{ pasajeros}$$

Debemos tener en cuenta que los pasajeros que han viajado son los que subieron en Lima más los que subieron en el trayecto o los que se bajaron en el trayecto más los que llegaron al Callao.

TRAYECTO

LIMA	SUBEN	BAJAN	CALLAO
¿ ?	5k	2k	62

LIMA + SUBEN = 92; BAJAN + CALLAO = 92

$$2k + 62 = 92$$
$$k = 15$$

¿ ?	75		

LIMA + SUBEN = 92

$\therefore$ En Lima subieron $92 - 75 = 17$ pasajeros

PROBLEMA 15 Alejandro adquirió cuadernos de tres tipos distintos que cuestan S/.2, S/.4 y S/.5 cada uno. Si en total compró 35 cuadernos y gastó S/.118 en total, halle el máximo número de cuadernos de S/.5 que pudo comprar.

Resolución:

35 cuadernos $\begin{cases} x \text{ cuadernos c/u S/.2} \\ y \text{ cuadernos c/u S/.4} \\ z \text{ cuadernos c/u S/.5} \end{cases}$ Total S/.118

Debemos hallar $z_{máx}$:

$$x + y + z = 35 \quad \text{...........(1)}$$
$$2x + 4y + 5z = 118 \quad \text{...........(2)}$$

$$\left.\begin{array}{r} (2): 2x + 4y + 5z = 1180 \\ (1)\times 2: 2x + 2y + 2z = 70 \end{array}\right\} (-)$$
$$2y + 3z = 48$$

Como nos piden $z_{máx}$ evaluemos para encontrar su valor:

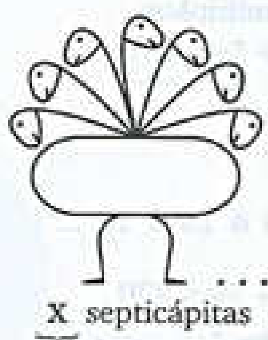
$$2y + 3z = 48$$

y	z	
0	16	(¡No! porque adquirió de los 3 tipos)
1,5	15	(¡No! porque un número de cuadernos debe ser entero)
3	14	(sí)

$\therefore \quad z_{máx} = 14$

PROBLEMA 16 En un lejano planeta de otra galaxia hay dos formas de vida mutuamente hostiles: los septicápitas, que tienen 7 cabezas y 2 patas y los pentápodos, que tienen 2 cabezas y 5 patas. Un día, un número par de septicápitas se encuentran con un número par de pentápodos y se organiza una gran pelea; un observador contó 210, entre cabezas y patas. ¿Cuántos ejemplares de cada clase intervinieron en la pelea?

Resolución:



$\underbrace{x}_{\text{PAR}}$ septicápitas $\qquad$ $\underbrace{y}_{\text{PAR}}$ pentápodos

de cabezas = $7x + 2y$
de patas = $2x + 5y$

Entre cabezas y patas: $9x + 7y = 210$

En este caso vamos a utilizar criterios de multiplicidad:

$$9x + \underbrace{7y}_{\overset{\circ}{7}} = \underbrace{210}_{\overset{\circ}{7}} \quad (\overset{\circ}{7} \text{ se lee múltiplo de 7})$$

➩ 9x debe ser $\overset{\circ}{7}$: $\quad x = 7$ ó 14 ó 21 ....

Pero recuerda que "x" es par:

$$\begin{array}{c} 9x + 7y = 210 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 14 \quad 12 \\ \not{28} \text{ (porque excede a 210)} \end{array}$$

$\therefore \quad x = 14 ; \ y = 12$

PROBLEMA 17 Iván cobra en un banco S/.2700 y le pide al cajero que se lo entregue de la siguiente forma: cierta cantidad en billetes de S/.10, 20 veces esa cantidad en billetes de S/.20 y el resto en billetes de S/.50. ¿Cuántos billetes en total recibió Iván?

Resolución:

Total de billetes = $21x + y = ?$

Calculamos el total de dinero que hay multiplicando el valor del billete por el número de billetes.

$$10x + 20(20x) + 50(y) = 2700$$

$$410x + 50y = 2700$$

$$41x + 5y = 270$$

Utilizaremos criterios de múltiplos:

$$41x + \underbrace{5y}_{\overset{o}{5}} = \underbrace{270}_{\overset{o}{5}}$$

➪ $41x = \overset{o}{5}$: $x = 5$ ó 10 ó 15 ...

$$41x + 5y = 270$$

$\downarrow$ 5 → $\downarrow$ 13

~~10~~ (porque excede a 270)

Entonces: $x = 5 ;\ y = 13$

$\therefore$ TOTAL DE BILLETES $= 21(5) + 13 = 118$

PROBLEMA 18 María y Juana tienen cierto número entero de soles cada una. Si al doble de lo que tiene María se le suma el cuádruplo de lo que tiene Juana, tendría más de S/.40; en cambio si al triple de lo que tiene María se le resta el doble de lo que tiene Juana, tendría menos de S/.20. Hallar la mínima cantidad de soles que pueden tener entre las dos.

Resolución:

María tiene: S/.x
Juana tiene: S/.y

$2x + 4y > 40$ .... (1)
$3x - 2y < 20$ .... (2)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\times 3:\ 6x + 12y > 120\\ (2)\times 2:\ 6x - 4y < 40\end{array}\right\}(-)$$

$$16y > 80$$

$y > 5$ ➪ $y_{min} = 6$

Reemplazando en (1): $2x + 4(6) > 40$

$$2x > 16$$
$$x > 8 \Rightarrow x_{min} = 9$$

$$\therefore \quad (x+y)_{min} = 9 + 6 = 15$$

PROBLEMA 19 El costo de producir "x" artículos es 25 veces el número de artículos más S/.1900. Si cada artículos se vende a S/.37, ¿cuántos artículos como mínimo se deberá producir y vender para obtener una ganancia de al menos S/.2000?

Resolución: Se han producido "x" artículos:

$$\text{Costo total} = 25x + 1900$$

> NOTA "S"
> Ganancia = Venta – Costo

Se vende cada artículo a S/.37

$$\text{Venta total} = 37x$$
$$\text{Ganancia} = 37x - (25x + 1900)$$
$$\text{Ganancia} = 12x - 1900$$

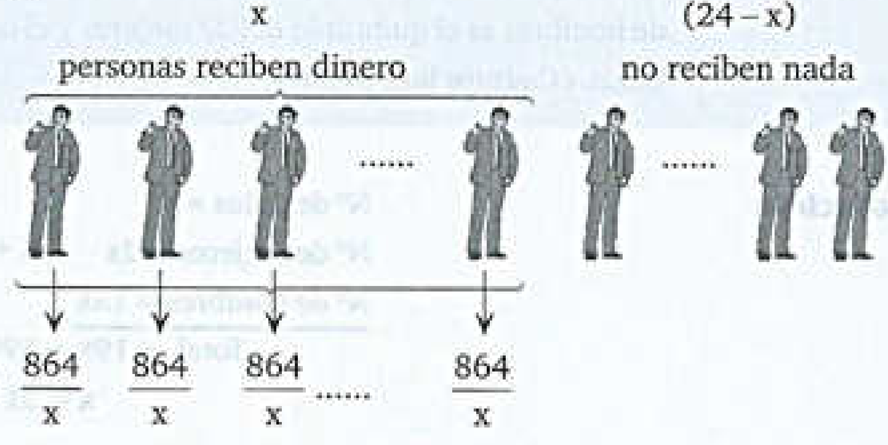
La ganancia debe ser del al menos S/.2000

$$12x - 1900 \geq 2000$$
$$12x \geq 3900$$
$$x \geq 325$$

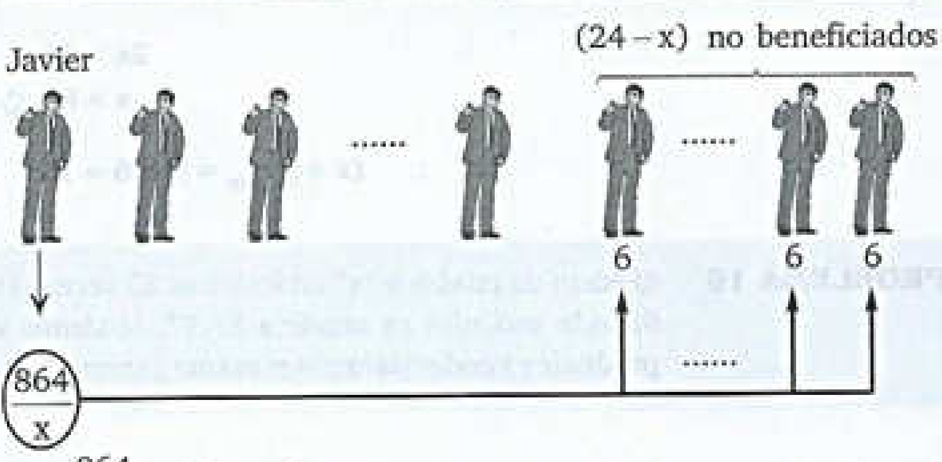
$$\therefore \quad x_{min} = 325$$

PROBLEMA 20 En un mal reparto de S/ 864 entre 24 personas, algunas reciben la misma suma y otras nada; entonces, Javier dona su parte a los que no fueron beneficiados, tocándole S/ 6 a cada uno de estos. ¿A cuántos no se les dio nada inicialmente?

Resolución: Se realizó un mal reparto de S/ 864 entre 24 personas, donde algunos no recibieron nada.



Javier dona su parte a los que no fueron beneficiados tocándole S/ 6 a cada uno.



$$\frac{864}{x} = 6(24 - x)$$

$$144 = x(24 - x)$$

$$\downarrow$$

$$12$$

∴ Los no beneficiados son: $24 - x = 12$ personas.

PROBLEMA 21 Con el dinero que Julio tiene puede comprar ocho boletos de una rifa y le sobran S/. 30, pero si desea comprar doce boletos le faltan S/. 24. ¿Cuánto dinero tiene Julio?

Resolución: Sea N soles el dinero que tiene y X soles el precio de cada boleto.

$$N = 8x + 30 \;\ldots\ldots (1)$$

$$N = 12x - 24 \;\ldots\ldots (2)$$

(1) × 3: $3N = 24x + 90$

(2) × 2: $2N = 24x - 48$ (–)

$$N = 138$$

∴ Julio tiene S/. 138

PROBLEMA 22 A una iglesia asisten 399 personas entre hombres, mujeres y niños . Si el número de hombres es el quíntuplo del de mujeres y el de mujeres es el triple que el de los niños. ¿Cuántos hombres hay?

Resolución:

Nº de niños = x

Nº de mujeres = 3x

Nº de hombres = 15x (+)

Total = 19x = 399

x = 21

∴ Nº de hombres = 15(21) = 315

PROBLEMA 23 Los nietos de don Julio deciden comprarle un obsequio. Si no colaborasen cinco de ellos, a cada uno de los restantes le correspondería S/. 4 más y si no colaborasen tres, a cada uno de los otros le correspondería S/. 2 más. ¿Cuántos nietos tiene don Julio?

Resolución: Sea x el número de nietos y sea N el precio del obsequio.

Entonces a cada uno le corresponde: $\dfrac{N}{x}$

Luego:

$$\frac{N}{x-5}=\frac{N}{x}+4 \rightarrow \frac{N}{x-5}-\frac{N}{x}=4 \rightarrow N=\frac{4x(x-5)}{5}$$

$$\frac{N}{x-3}=\frac{N}{x}+2 \rightarrow \frac{N}{x-3}-\frac{N}{x}=2 \rightarrow N=\frac{2x(x-3)}{3}$$

$$\frac{4x(x-5)}{5}=\frac{2x(x-3)}{3}$$

$$\therefore \quad x=15$$

PROBLEMA 24 Lucas lanzó un dado 24 veces y el puntaje total que obtuvo fue 98. Si el puntaje que obtuvo en cada lanzamiento no es menor que tres ni mayor que cinco y además en 4 lanzamientos obtuvo el menor puntaje, ¿en cuántos lanzamientos obtuvo un puntaje par?

Resolución:

24 lanzamientos $\begin{cases} \text{4 lanzamientos de 3 puntos} \\ \text{x lanzamientos de 4 puntos} \\ \text{y lanzamientos de 5 puntos} \end{cases}$

puntaje total = 98

$x + y = 20$ .... (1)

$4 \times 3 + 4x + 5y = 98$

$4x + 5y = 86$

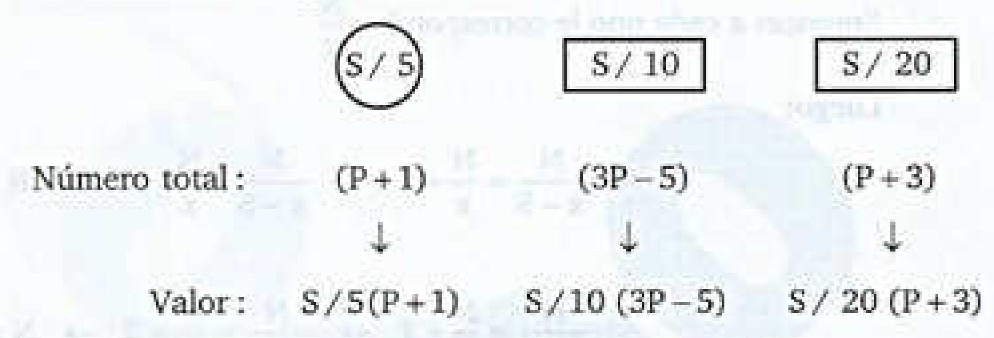
(1) × 5: $5x + 5y = 100$ (–)

$x = 14$

$\therefore$ Obtiene puntaje par en 14 lanzamientos

PROBLEMA 25 Los ahorros de Jorgito constan de P + 1 monedas de S/ 5; 3P – 5 billetes de S/ 10 y P + 3 billetes de S/ 20. ¿A cuánto asciende el total de sus ahorros inicialmente si al comprar un artículo entregué la misma cantidad de monedas que billetes de cada valor, quedándome sin monedas y cuatro veces la cantidad de billetes de S/ 20 en billetes de S/ 10?

Resolución: Los ahorros de Jorgito constan de:



Al comprar un artículo entregó la misma cantidad de monedas que billetes de cada valor, quedándose sin monedas.

	Monedas de S/ 5	Billetes de S/ 10	Billetes de S/ 20
Inicio	(P + 1)	(3P – 5)	(P + 3)
Utilizó	(P + 1)	(P + 1)	(P + 1)
Quedó	0	2P – 6	2

Quedo al final cuatro veces la cantidad de billetes de S/ 20 en billetes de S/ 10

$$2P - 6 = 4(2)$$

$$P = 7$$

Al inicio sus ahorros constan de:

$$5(P+1) + 10(3P-5) + 20(P+3)$$

$$\text{Ahorro} = 5(8) + 10(16) + 20(10)$$

$$\therefore \ \text{Ahorro} = S/\ 400$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. A Paola le falta S/.23 para tener 5 veces lo que tiene Judith. Si ambas tienen en total S/.121, ¿cuánto más tiene Paola que Judith?

A) S/.69 B) S/.70 C) S/.71
D) S/.72 E) S/.73

2. Un número entero es tal que la suma de él con el doble del mismo resulta igual a lo que le falta para ser el mayor número de 4 cifras diferentes. Hallar este número y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

3. La profesora de un colegio organiza la fiesta por fin de año. El dueño del salón de baile cobra S/.1560 de alquiler y, además, por cada persona, S/.5 por la comida. Si cada persona que va a la fiesta paga S/.13, ¿cuántas personas tiene que ir para cubrir con todos los gastos?

A) 180 B) 185 C) 190
D) 195 E) 200

4. Si repartiera 12 caramelos a cada uno de mis hijos me sobraría 4 caramelos; pero para que cada uno reciba 14 caramelos, me faltaría 14 caramelos. Hallar la diferencia entre el número de caramelos y el número de hijos que tengo.

A) 103 B) 100 C) 105
D) 104 E) 102

5. En una partida de ajedrez hay 180 jugadores; si cada uno jugó solo una vez, resultando igual el número de ganadores con los que empataron. ¿Cuántas partidas terminaron empatadas?

A) 24 B) 56 C) 48
D) 45 E) 30

6. Un empleado gana diariamente 50 soles, y por cada día que falta le descuentan 40 soles. Si al cabo de 36 días no recibió nada, ¿cuántos días trabajó el empleado?

A) 24 B) 12 C) 16
D) 18 E) 20

7. En una canasta pueden entrar 8 manzanas junto con 10 peras ó 12 manzanas junto con 8 peras. ¿Cuántas manzanas solamente pueden entrar en la canasta?

A) 20 B) 24 C) 28
D) 26 E) 30

8. Cuatro amigos tienen entre todos 450 soles, si el dinero del primero es aumentado en 20 soles, el del segundo es reducido en 20 soles, se duplica el del tercero y el del cuarto se reduce a la mitad, todos los amigos tendrían la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene el que tiene más dinero?

A) S/.100 B) S/.120 C) S/.150
D) S/.180 E) S/.200

9. Un campesino estaba indeciso sobre si comprar 72 ovejas o con el mismo dinero comprar 9 vacas y 9 toros. Al final el dinero le alcanzó para comprar la misma cantidad de animales de las tres clases. ¿Cuántos animales compró en total?

A) 24 B) 27 C) 30
D) 33 E) 36

10. En una familia, el hermano mayor dice: "el número de mis hermanos varones es el triple de mis hermanas" y la hermana mayor dice: "tengo 8 hermanos varones más que hermanas". ¿Cuántos hermanos en total hay en la familia?

A) 10 B) 14 C) 9
D) 12 E) 13

11. Agustín y Bruno salieron de cacería y trajeron patos y conejos. Agustín mató el doble de patos de lo que mató en conejos. Bruno mató tantos conejos como Agustín. Ambos trajeron en total 45 animales con 130 patas. ¿Cuántos patos mató Bruno?

A) 3 B) 6 C) 4
D) 5 E) 9

12. Don José, el ferretero, por cada 40 tornillos que compra encuentra 4 defectuosos y los devuelve. Por cada 80 que vende regala 10. Si vendió 1600 tornillos y no le quedó ninguno, ¿cuántos tornillos había comprado Don José?

A) 1800 B) 1840 C) 2000
D) 2400 E) 2100

13. Un grupo de personas quiere ir todas juntas de excursión. Hay 2 agencias que hacen esa excursión: A y B. Las 2 agencias tienen el mismo número de automóviles. La agencia A tiene 5 autos de 6 asientos y el resto de 4 asientos. La agencia B tiene 5 autos de 4 asientos y el resto de 6 asientos. No pueden ir por la agencia A porque faltan asientos para 14 personas. Yendo por la agencia B viajan todos y llenan todos los asientos. ¿Cuántas personas forman el grupo?

A) 72 B) 77 C) 82
D) 87 E) 92

14. Un comerciante compra cuadernos a razón de 3 cuadernos por S/.12 y cuando los vende lo hace a razón de 10 cuadernos por S/.48. ¿Cuántos cuadernos debe vender para obtener una ganancia de S/.600?

A) 700 B) 720 C) 750
D) 600 E) 800

15. En la ruta que une A con B hay dos estaciones de servicio, "El Cruce" y "El Descanso", separadas entre sí por 3km. La distancia desde "El cruce" hasta A es igual a 3/4 de la distancia desde "El Cruce" hasta B. La distancia desde "El Descanso" hasta A es igual a 4/5 de la distancia desde "El Descanso hasta B. Calcular cuántos kilómetros tiene la ruta desde A hasta B.

A) 169Km B) 175Km C) 189Km
D) 190Km E) 185Km

16. Un frutero que llevaba naranjas al mercado decía: si vendo cada una a "R" soles compro una licuadora y me sobran "X" soles, pero si vendo cada una a "T" soles (R>T), compro la licuadora y me sobra "Y" soles. ¿Cuántas naranjas llevaba a vender?

A) $\frac{X-Y}{R-T}$ B) $\frac{X+Y}{R+T}$ C) $\frac{X-Y}{R+T}$
D) $\frac{X+Y}{R-T}$ E) $\frac{X+Y}{T-R}$

17. En una tribu india del Amazonas, donde todavía subsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio: Un collar y una lanza se cambian por un escudo. Una lanza se cambia por un collar y un cuchillo. Dos escudos se cambian por tres cuchillos. ¿A cuántos collares equivale una lanza?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

18. Un servicio de taxi para hacer un viaje cobra una suma fija más cierta cantidad por cada kilómetro recorrido. Ana pagó S/.51 por un viaje de 3Km. Pedro pagó S/.86 por un viaje de 8km. ¿Cuánto pagará laura por un viaje de 12Km?

A) S/.110 B) S/.112 C) S/.114
D) S/.116 E) S/.118

19. Ángel tiene cierta suma de dinero, compra una lámpara y una cafetera, entonces le quedan tantos soles como costó la lámpara. Si quisiera comprar una cafetera más le faltaría S/.10. ¿Cuánto costó la lámpara, sabiendo que si hubiera obtenido una rebaja de S/.10 en cada objeto sólo hubiera gastado S/.48?

A) S/. 38 B) S/. 30 C) S/. 29
D) S/. 28 E) S/. 39

20. En un grupo de personas se observó que el cuadrado del número de varones excede al cuadrado del número de mujeres en x, y la mitad de x excede al número de varones en 6. ¿Cuántas mujeres hay en dicho grupo?

A) 8 B) 6 C) 10
D) 12 E) 5

21. El barril A contiene una mezcla homogénea de jugo de uva y jugo de manzana en la proporción de 2 litros de uva por cada 5 litros de manzana. El barril B contiene una mezcla homogénea de jugo de uva y jugo de manzana en la proporción de 3 litros de uva por cada 5 litros de manzana. Se vierte el contenido de los dos barriles en uno más grande y se obtiene un total de 155 litros de jugo, en la proporción de 11 litros de uva por cada 20 litros de manzana. Determinar cuántos litros de jugo contenía el barril A.

A) 35 B) 40 C) 45
D) 50 E) 55

22. Alicia y Beatriz llevaban S/.50 cada una. Alicia compró 3Kg de helado y un postre. Para poder pagar tuvo que pedirle S/.4 prestados a Beatriz. Beatriz compró 1Kg de helado y un postre; después de pagar y prestarle a Alicia los S/.4, le quedaron S/.16. ¿Cuánto costaba el postre?

A) S/.12 B) S/.14 C) S/.16
D) S/.18 E) S/.20

23. Un bus que cubre la ruta Lima Huaral, llegó a Huaral con una de recaudación de S/.930 por los adultos y S/.360 por los niños. En el trayecto cuando subían 2 adultos bajaba 1 niño y cuando bajaba 1 adulto subían 3 niños. Si llegó a Huaral con 50 adultos y 30 niños, ¿con cuántos pasajeros partió de Lima, sabiendo que cada adulto paga S/.15 y cada niño S/.8?

A) 35 B) 37 C) 39
D) 41 E) 43

24. Tres ladrones A, B y C, se repartieron en partes iguales un botín. La primera noche, mientras C dormía, A y B le quitaron la mitad de lo que tenía, y se lo repartieron en partes iguales. La segunda noche, mientras A dormía, B y C le quitaron la mitad de lo que tenía y se lo repartieron en partes iguales. La tercera noche, mientras B dormía, A y C le quitaron la mitad de lo que tenía y se lo repartieron en partes iguales. A la mañana siguiente se separaron para siempre. Cuando B contó su dinero, tenía 10000 soles. Determinar cuánto dinero era el botín que se repartieron los 3 ladrones.

A) 42600 B) 44400 C) 36900
D) 38400 E) 45000

25. Un coleccionista de estampillas inició su colección en el año 2000. Tenía estampillas americanas y europeas. En el 2001, duplicó las americanas, duplicó las europeas y después vendió 8 europeas. En el 2002, duplicó las americanas, triplicó las europeas y después vendió 60 europeas, con lo cual tenía la misma cantidad de estampillas americanas que europeas. En el 2003, duplicó las americanas, cuadruplicó las europeas y después vendió 30 europeas, con lo cual tenía en total 618 estampillas. ¿con cuántas estampillas en total inició su colección en el año 2000?

A) 55 B) 56 C) 57
D) 58 E) 59

26. Un ladrón, un cesto de naranjas del mercado robó, y por entre los huertos escapó; al saltar una valla, la mitad más media perdió. Perseguido por un perro, la mitad (de las que le quedó) menos media abandonó. Tropezó en una cuerda y de las que llevaba, la mitad más media desparramó y las dejó. En su guarida, 2 docenas guardó. ¿Cuántas naranjas robó el ladrón?

A) 49 B) 97 C) 194
D) 195 E) 200

27. En la agencia de investigaciones de Matemáticas Aclaradas, han de resolver cierto número de misiones, pero disponemos de un número de agentes tal que; si encargamos una misión a cada agente sobran "x" misiones; pero si damos "x" misiones a cada agente, se quedan "x" agentes sin misión. Como los agentes y misiones suman menos de 15, indique cuántos agentes y misiones son.

A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 11

28. En una boutique se vendieron en un día pantalones por un total de 1395 soles, unos a 45 soles y otros a 60. Al día siguiente se vendieron de los más baratos, un tercio más que el día anterior, y de los más caros un tercio menos que el día anterior, por un total de 1380 soles. ¿Cuántos pantalones de 45 y de 60 soles se vendieron durante los 2 días?

A) 25 B) 35 C) 45
D) 55 E) 65

29. Una mandarina, una manzana y dos peras cuestan 5,1 soles. Dos peras y dos mandarinas cuestan 4,2 soles; y una manzana, una pera y dos mandarinas cuestan 4,4 soles. ¿Cuánto cuestan dos manzanas y dos mandarinas?

A) 4 B) 4,2 C) 4,4
D) 4,6 E) 4,8

30. En un baile se recaudó 475 soles, la tarjeta para cada pareja cuesta 15 soles y las tarjetas personales cuestan 10 soles por cada caballero y 6 soles por cada dama. Si se ha vendido un total de 55 tarjetas, halle cuántas de 6 soles se han vendido, si se sabe que en un determinado momento de baile, se observó que todos bailaban.

A) 30 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

31. En un hospital se atienden 1000 pacientes, los cuales son atendidos por doctores y doctoras 19 en total. Cada doctor atiende 30 pacientes más que cada doctora. Últimamente se decidió que cada doctora atienda a 8 pacientes más, reduciéndose así los pacientes de cada doctor. ¿A cuántos pacientes atiende ahora cada doctor?

A) 30 B) 50 C) 59
D) 60 E) 18

32. En fila india viajan 15 elefantes y sus pesos están expresados por números enteros de toneladas. El peso de cada elefante (salvo del que ocupa la primera posición) más el doble del que está delante de él es exactamente 15 toneladas. Determine el peso de cada elefante y dé como respuesta la suma de todos ellos.

A) 60 B) 75 C) 50
D) 90 E) 80

33. Se desea comprar caramelos gastando exactamente S/. 264. Los precios por unidad son S/.7 y S/.5. ¿Cuántos caramelos se pueden comprar? Dar el número de posibilidades.

A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

34. Al salir de compras, llevaba en el monedero aproximadamente unos 15 soles, en monedas de 1 sol y de 20 céntimos. Al regresar a casa, traía tantos soles como monedas de 20 céntimos tenía al comienzo; y tantas monedas de 20 céntimos como monedas de 1 sol tenía antes. En el monedero me quedaba un tercio del dinero que llevaba al salir de compras. ¿Cuánto dinero gasté en las compras?

A) 9,80 soles B) 9,40 soles C) 9,50 soles
D) 9,60 soles E) 9,70 soles

35. Tres cirios de diámetros diferentes y de longitudes 70, 65 y 60cm, están fijos a soportes de alturas desiguales, situados sobre el piso. Se encienden los cirios al mismo tiempo y se observó que cuando el más largo ha disminuido en 10cm, las tres llamas están a la misma altura. Sabiendo que estos tres cirios se consumen por completo en 28, 26 y 40 horas respectivamente, y que el soporte del cirio más largo mide 40cm de altura, hallar las alturas de los otros soportes.

A) 40cm y 41cm B) 41cm y 42cm C) 42cm y 43cm
D) 44cm y 45cm E) 45cm y 46cm

36. Rosita compró anillos de oro y plata, cada anillo a \$.40 y \$.35 respectivamente. Si en total gastó \$.1285, ¿cuántos anillos compró en total como máximo?

A) 35 B) 40 C) 36
D) 28 E) 42

37. Elsa gastó S/.320 en lácteos; llevó quesos, helados y flanes. Cada queso cuesta S/.16, cada helado cuesta S/.24 y cada flan cuesta S/.4. Si llevó 20 artículos, ¿cuántos artículos de cada clase pudo haber comprado?. Dar el número de soluciones posibles.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

38. En un colegio hay en total 999 alumnos, los cuales están distribuidos en salones que tienen capacidad para 37 y 21 alumnos solamente. Si todos los alumnos han sido ubicados en los salones, ¿cuántos salones en total tiene el colegio?

A) 40 B) 43 C) 55
D) 29 E) 65

39. Ángel ha comprado 59 libros entre libros de RM, RV y aritmética, gastando 415 nuevos soles en total. Los precios respectivamente son 8; 5 y 6 nuevos soles. Los libros de aritmética son mayores a 24. ¿Cuántos libros de RM compró?

A) 27 B) 28 C) 29
D) 30 E) 31

40. Se dispone de S/.100 para comprar 40 artículos de S/.1 , S/.4 y S/.12 por unidad, comprándose por lo menos uno de cada precio. ¿Cuántos artículos de S/.1 se han comprado?

A) 22 B) 24 C) 26
D) 28 E) 30

41. En el salón hay 180 personas distribuidas en mesas rectangulares, redondas y cuadradas. En cada mesa rectangular hay 6 personas, en cada mesa redonda hay 5 personas y en cada mesa cuadrada hay 4 personas. El número total de mesas es impar. Hay el doble de mesas rectangulares que redondas. ¿Cuántas mesas hay en total?

A) 35 B) 37 C) 39
D) 4 E) 43

42. En cierta fábrica 2 empleados se encargan de armar cajas. Ángel arma 13 cajas por día y Bruno arma 17 cajas por día. En los primeros 30 días hábiles del año armaron en total 771 cajas. ¿Cuántos días faltaron al trabajo, entre los dos, en ese lapso?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

43. En un baile se recaudó 475 soles, la tarjeta para una pareja vale 15 soles y las tarjetas sueltas, 10 soles para hombres y 6 soles para damas. ¿Cuántas personas asistieron al baile como máximo, si todos pueden bailar?.

A) 60 B) 62 C) 64
D) 66 E) 68

44. Una cierta mañana cada uno de los miembros de la familia de Ángela tomó una mezcla de 8 onzas de café con leche. Las cantidades de café y de leche variaban de taza en taza, pero ninguna era cero. Ángela se tomó una cuarta parte de la cantidad total de leche y una sexta parte de la cantidad total de café. ¿Cuántas personas hay en la familia?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

45. El camino entre el pueblo y el refugio en la montaña mide un número entero de kilómetros. Una mañana, 3 grupos de andinistas salen del pueblo hacia el refugio. El grupo A recorre la sexta parte del camino más 100Km, el grupo B la mitad del camino más 10Km y el grupo C la cuarta parte del camino más 78Km. y nadie llega al refugio. Si el grupo B ha recorrido en total, más distancia que el A, pero menos que el C, determinar cuánto mide el camino desde el pueblo hasta el refugio.

A) 269Km B) 270Km C) 271Km
D) 272Km E) 273Km

46. Veinte veces la cantidad que tiene Bruno menos el cuadrado de cantidad que tiene Bruno es menor en S/.10 de lo que tiene Ángel. ¿Cuánto tienen entre los dos, si Ángel tiene lo máximo posible?

A) S/.100 B) S/.110 C) S/.120
D) S/.130 E) S/.140

47. La asociación Vida Silvestre tiene 50 miembros. El sábado cada uno de los presentes plantó 17 árboles y el domingo cada uno de los presentes plantó 20 árboles. En total se plantaron 1545 árboles. ¿Cuántos miembros de la asociación faltaron el sábado y cuántos faltaron el domingo? Dar como respuesta la suma.

A) 11 B) 12 C) 14
D) 15 E) 16

48. La suma del número de caramelos que tiene Pedro y el doble de los que tiene Joaquín es menor que 51. La diferencia entre el triple de los caramelos de Pedro con los de Joaquín es mayor que 67. Si el número de caramelos de Pedro excede en uno al triple de los de Joaquín, ¿cuántos caramelos tiene Joaquín?

A) 28 B) 18 C) 14
D) 7 E) 9

49. Un alumno con S/ 186 compró lapiceros, cuadernos y correctores a S/ 3, S/ 5 y S/ 6, respectivamente, adquiriendo en total 50 artículos. ¿Cuántos correctores ha comprado si la cantidad de lapiceros es un número primo?

A) 10 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

50. Paola gastó su dinero de la siguiente manera: cada día la mitad de lo que tiene más 2 soles. Si gastó su dinero en 49 días, ¿cuánto tenía Paola?

A) S/.60 B) S/.120 C) S/.124
D) S/.62 E) S/.56

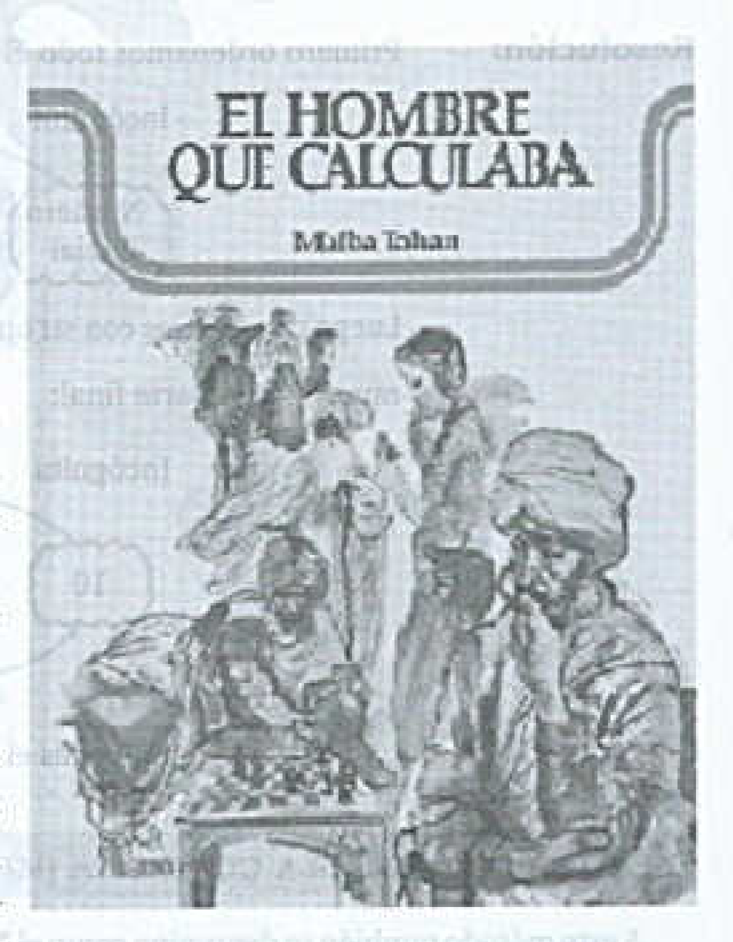
Cuatro Operaciones

CAPACIDADES

- Conoce y aplica métodos aritméticos en la resolución de problemas.
- Vincula el tema con situaciones de la vida real.
- Potencia el análisis aritmético en la interpretación de enunciados.

EL HOMBRE QUE CALCULABA

Su nombre es Julio César de Mello Souza más conocido como Malba Tahan. Escribió más de 50 libros bajo este seudónimo - incorporado más tarde a su tarjeta de identidad. Empleó historias orientales para enseñar matemáticas. Su libro más famoso, publicado por primera vez en 1938, estuvo recientemente en la lista de los más vendidos.



Desde la primera mitad del siglo XX, varias generaciones de brasileros se introdujeron en la cultura árabe gracias a la influencia del más árabe de los cariocas (nativos de la ciudad de Río de Janeiro), el profesor de matemáticas Julio César de Mello e Souza, más conocido como Malba Tahan.

Su libro más famoso, "O Homen que Calculava" (El hombre que Calculaba), trajo aventuras en escenarios Árabes típicos junto con atractivas soluciones de problemas de álgebra y aritmética, ha llegado ya a su edición número 63 de la casa de publicaciones Record de Brasil.

El libro ha alcanzado la hazaña de aparecer todavía en el quinto lugar en las listas de libros para chicos más vendidos publicada en el periódico O Globo, en mayo del año 2004.

CUATRO OPERACIONES

MÉTODO DE LAS OPERACIONES INVERSAS

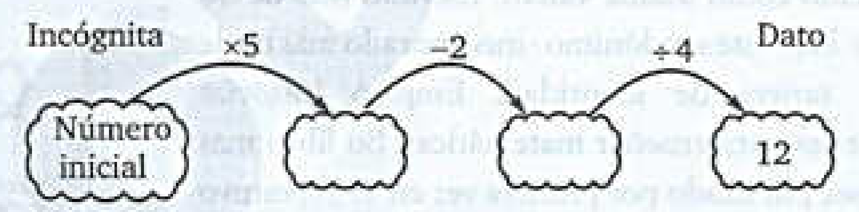
MÉTODO DEL CANGREJO

Este método nos permite resolver un problema en forma directa, para lo cual se realizan operaciones inversas en cada caso, empezando desde el final hacia el inicio.

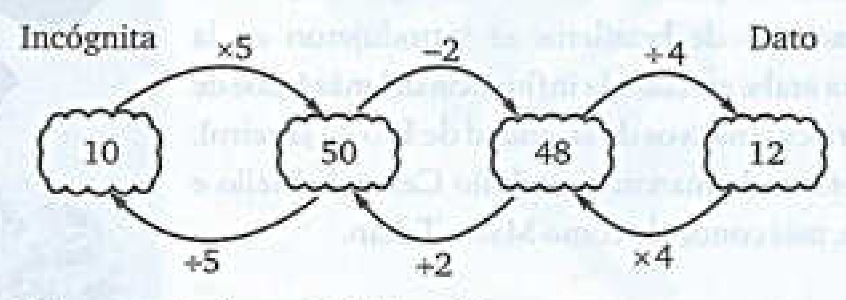
Esta clase de ejercicios se reconocen trabajando con operaciones sucesivas (se trabaja siempre con el nuevo resultado), y si se trata de fracciones, se trabaja con la cantidad, con la fracción que es "el complemento de la unidad".

PROBLEMA Multiplicando un número por 5, al producto le restamos 2, al resultado le dividimos entre 4 con lo cual obtenemos 12. ¿Cuál era el número inicial?

Resolución: Primero ordenamos todo el enunciado:



Luego cambiamos con su operación opuesta a cada operación y enseguida operamos por la parte final:



Entonces el número inicial = 10.

MÉTODO DE LA REGLA CONJUNTA (Método de las equivalencias)

A este método también se denomina como el "Método de las equivalencias".

Para resolver un problema utilizando el método de la regla de conjunta, uno debe reconocer que en el enunciado del problema se mencionan cantidades que son equivalentes.

Y luego se sigue el siguiente procedimiento:

- ✓ Se ordenan los datos verticalmente en una serie de equivalencia.
- ✓ En las equivalencias, las cantidades de una misma especie deben estar en miembros distintos.

- ✓ Se debe procurar que el primer miembro de la primera equivalencia y el segundo miembro de la última equivalencia deben ser siempre cantidades de la misma especie.
- ✓ Se multiplica miembro a miembro las igualdades, cancelando las unidades de medida.
- ✓ Resolviendo al final una igualdad, con la variable incógnita que se despejará.

A continuación con el siguiente problema se detallará mejor el procedimiento.

PROBLEMA Con tres desarmadores se obtiene un alicate, con tres alicates un martillo, ¿cuántos martillos se obtendrán con 117 desarmadores?

Resolución: Sea "x" la cantidad de martillos.

Del enunciado, agrupandolas en equivalencias:

$$3\,\text{desarmadores} = 1\,\text{alicate}$$
$$3\,\text{alicates} = 1\,\text{martillo}$$
$$x\,\text{martillos} = 117\,\text{desarmadores}$$
$$3\times3\times x = 1\times1\times117$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{117}{3\times3}\ \Rightarrow\ \boxed{x=13}$$

El número de martillos que se obtiene es: 13

MÉTODO DE LA FALSA SUPOSICIÓN

Se utiliza para aquellas situaciones donde hay un cierto número de elementos que presentan dos características diferentes y además se indica el total de estas características obtenidas a partir de los elementos.

Ejemplo 1: En una granja hay 20 animales; algunos chanchos y los otros pavos. Si al contar sus patas obtenemos 74. ¿Cuántos pavos hay?

Resolución: FALSA SUPOSICIÓN "TODOS SON CHANCHOS"

Obtenemos: Falso Total de Patas $= 20\times4 = 80$

Al comparar con el verdadero total hay un exceso de 6 patas.

¿Porqué?

Se debe a que los pavos se han considerado como si fueran chanchos

¡Tengo 2 patas más!

Entonces los pavos son 3 para acumular un error total de 6 patas

En resumen : $\begin{matrix}\text{Número}\\ \text{de pavos}\end{matrix} = \dfrac{(\text{Error total})}{(\text{Error unitario})} = \dfrac{\overset{\text{Falso Total}}{80}-\overset{\text{Verdadero Total}}{74}}{\underbrace{4-2}_{\text{Diferencia de patas}}} = 3$

MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS

Se aplica para aquellos problemas donde se reparte equitativamente cierta cantidad o se mencionan 2 casos donde sobra/falta.

También se aplican para aquellos problemas relacionados a ganancias y perdidas.

Ejemplo 1: Si a cada uno de mis sobrinos le doy S/5 me sobrará S/20, pero si a cada uno le diera S/7 me faltará S/10. ¿Cuántos sobrinos tengo?

Resolución: Sea "x" el número de sobrinos, luego:

5x	Me sobra S/20	
Mi dinero		Me falta S/10
7x		

* Si le entrega S/2 más a cada uno de mis sobrinos NO solo necesitaré los S/20 que me sobró sino S/10 adicional es decir S/30.

Del gráfico tenemos:

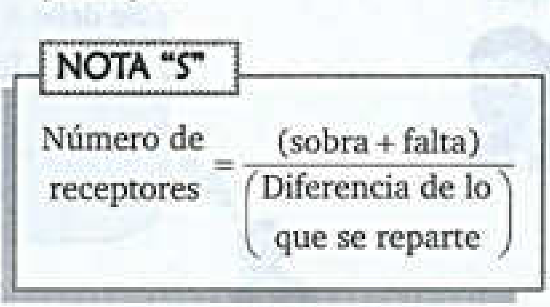
$$7x = 5x + 20 + 10$$

$$(7-5)x = 20 + 10$$

$$\rightarrow\ x = \frac{20+10}{\underbrace{7-5}_{\text{Diferencia de lo que se reparte}}} = 15$$

(20 ← sobra; 10 ← falta)

Conclusión:



NOTA "S"

$$\begin{matrix}\text{Número de}\\ \text{receptores}\end{matrix} = \frac{(\text{sobra} + \text{falta})}{\left(\begin{matrix}\text{Diferencia de lo}\\ \text{que se reparte}\end{matrix}\right)}$$

Ejemplo 2: En cierta avenida hay "X" postes; si en cada poste se posarán 4 aves quedarían 293 volando, pero si en cada poste se posaran 7 aves, 1 poste quedaría vacío. Halle x.

Resolución:

$$x = \frac{\overset{\text{sobra}}{293} + \overset{\text{falta}}{7}}{\underbrace{7-4}_{\substack{\text{Diferencia}\\ \text{de lo que}\\ \text{se reparte}}}} = 100$$

NOTA "S"

Si un poste queda vacío, faltaría 7 aves para que cada poste tenga la misma cantidad de aves.

NOTA "S"

Si en ambos casos sobran o faltan, tenemos:

I) $$\text{Número de receptores} = \frac{\left(\text{Suma de sobrantes}\right)}{\left(\text{Diferencia de lo que se reparte}\right)}$$

II) $$\text{Número de receptores} = \frac{\left(\text{Suma de faltantes}\right)}{\left(\text{Diferencia de lo que se reparte}\right)}$$

NOTA "S"

En el caso de ganancia y perdida:

$$\text{Número de Artículos} = \frac{(\text{Ganancia} + \text{Perdida})}{\left(\text{Diferencia deprecios}\right)}$$

Ejemplo:

Si vendo cada uno de mis libros a S/10 ganaré S/600 pero si vendo cada uno en S/6 perderé S/200.

¿Cuántos libros tengo?

Resolución:

$$\text{Número de libros} = \frac{600 + 200}{10 - 6} = 200$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. A un número se le multiplica por 2, al resultado se le suma 10, enseguida dividimos entre 5 y, finalmente, se le resta 6 para obtener como resultado 20. Hallar el número original.

   Rpta.: ....

2. Elías dispone su sueldo de la siguiente manera: la tercera parte en la academia; los 4/7 del resto en el vestido de su hija Trudy y los 2/5 del nuevo resto en el pago de su vivienda, si aún le queda S/. 90. ¿Cuál es el sueldo de Elías?

   Rpta.: ....

3. Mario cada día gasta la mitad de lo que tiene más . Si gastó todo en 4 días, su promedio de gasto por día fue:

   Rpta.: ....

4. Para pagar una deuda de S/. 130 empleo billetes de S/. 10 y S/.5, ¿cuántos billetes de los 25 con que pago dicha suma son de S/. 5?

   Rpta.: ....

5. Jorge propone resolver 12 problemas a Hernan con la condición de que por cada problema que resuelva recibirá 10 soles y por cada problema que no resuelva perderá 6 soles después de trabajar con los 12 problemas recibirá 72 soles. ¿Cuántos problemas resolvió?

   Rpta.: ....

6. Cuando Fernando va a la librería, observa que si compra 5 libros, le sobra 7 soles, pero si quiere comprar dos más le faltarían tres soles. ¿De cuánto dinero dispone Fernando?

   Rpta.: ....

7. Si pago 7 00 soles a cada uno de mis empleados me faltan 400 soles, pero si les pago 550 soles me sobran 5 600 soles. ¿Cuántos empleados tengo?

   Rpta.: ....

8. Un empleado es contratado por una empresa y le prometen pagar S/. 6 400 por un año de trabajo más un incentivo especial, al cabo de 8 meses abandona el trabajo y recibe S/. 2 400 más el incentivo especial. ¿A cuanto asciende el incentivo especial?

   Rpta.: ....

9. Para realizar el sorteo de un minicomponente se imprimieron 640 boletos pensando ganar $. 845, pero sólo vendieron 210 boletos, originandose una pérdida de $. 15. ¿Cuál es el precio del minicomponente?

   Rpta.: ....

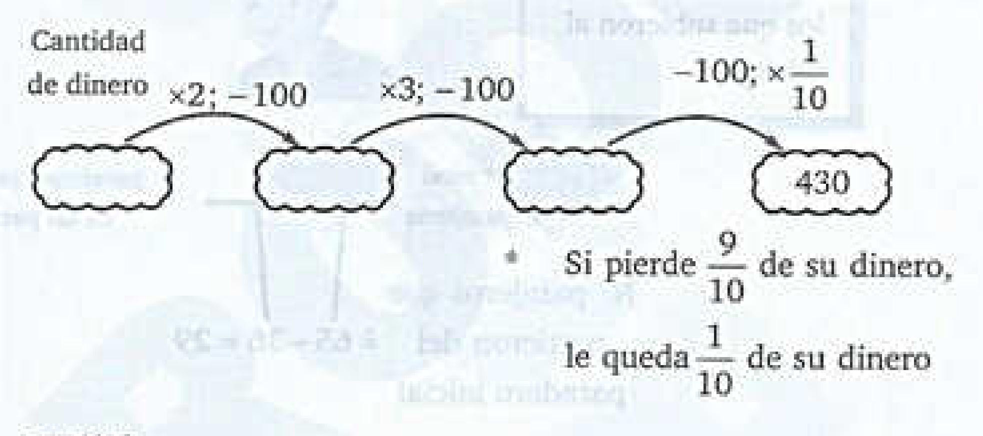
10. En una feria se puede canjear 5 teclados por 11 mouses, 2 monitores por 45 teclados, 3 monitores por una impresora, entonces ¿cuántos mouses se pueden canjear por 2 impresoras?

    Rpta.: ....

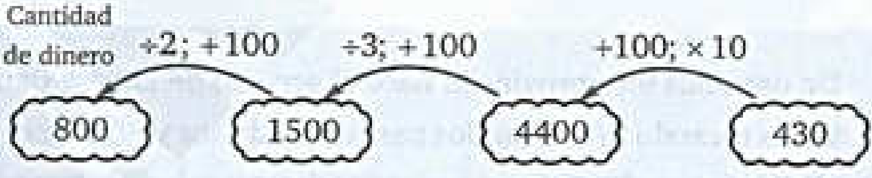
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Al recibir su pago correspondiente a las horas correspondientes la primera quincena de enero, el profesor Peter lo apuesta todo en un casino y consigue duplicar su dinero; al llegar a su casa deja S/100 a su esposa. Al día siguiente apuesta todo su dinero y al ganar otra vez observa con entusiasmo que su beneficio es el doble de lo que apostó; al regresar deja S/100 a su esposa. Al día siguiente deja S/100 a su esposa antes de ir a trabajar; luego de trabajar va al casino y pierde S/10 de su dinero. Regresando a su casa decide visitar al profesor César Chu y pedirlo prestado x soles ya que solo tiene S/430 y al rendirle cuentas a su esposa tendrá problemas. Calcule "x"
NOTA: Peter tiene prohibido ir al casino.

Resolución: Aplicando el método de las operaciones inversas, tenemos:



NOTA "S"
Si su beneficio es el doble de su capital entonces recibirá el triple de lo apostado.



Teniendo en cuenta que a su esposa ya le entregó 3 veces S/100 es decir S/300 más los S/430 que le quedó.

Entonces: $300 + 430 + x = 800$

$\therefore \quad x = 70$

PROBLEMA 2 Un ómnibus llegó a su paradero final con 53 pasajeros, además se observó durante el trayecto que en cada parada por cada pasajero que bajaban subían 3; si cada pasaje cuesta S/0,6 y se recaudó un total de S/39. ¿Cuántos pasajeros partieron del paradero inicial?

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

Resolución:

$$\text{N° total de pasajeros} = \frac{S/39}{S/0,6} = 65$$

Si al final llegaron 53 pasajeros entonces:

$$\text{N° pasajeros que bajaron en el trayecto} = 65 - 53 = 12$$

En cada parada subían 3 veces el número de pasajeros que bajaban, entonces:

$$\text{N° pasajeros que subieron en el trayecto} = 3 \times 12 = 36$$

NOTA "S"

Los 36 no incluyen los que subieron al inicio.

N° total de pasajeros — N° pasajeros que subieron en las paradas

$$\therefore \text{N° pasajeros que partieron del paradero inicial} = 65 - 36 = 29$$

PROBLEMA 3 Un ómnibus interprovincial hace el servicio de Lima a Cañete, en uno de sus viajes recaudó S/440 por los pasajeros adultos y S/135 por los niños. Durante el trayecto se observó que por cada adulto que bajó subieron 2 niños y por cada niño que bajó subieron 3 adultos. Si el ómnibus llegó a Cañete con 28 adultos y 20 niños. ¿Con cuántos adultos y niños salió del paradero inicial (Lima) si el pasaje adulto es S/ 11 y el de un niño S/5?

Resolución:

$$\text{N° total de adultos} = \frac{440}{11} = 40 \qquad \text{N° total de niños} = \frac{135}{5} = 27$$

Luego:

	N° Suben	N° Bajan
N° Adultos	21	12
N° Niños	24	7

(40 – 28)

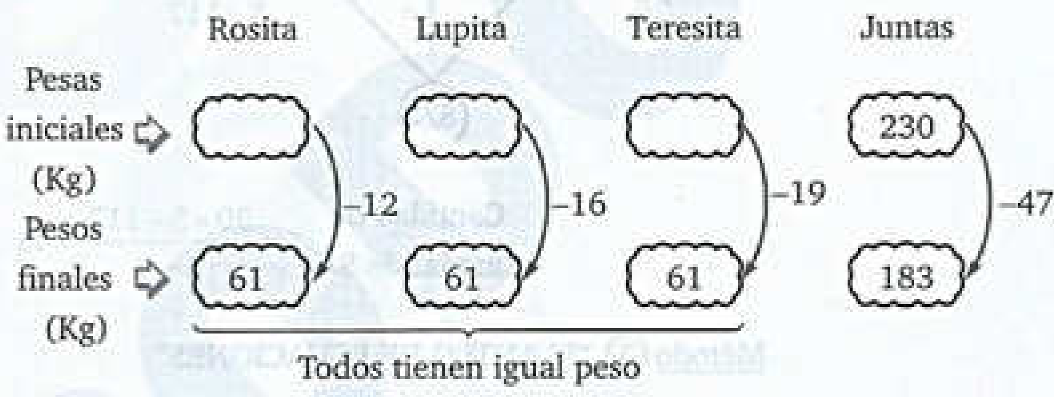
(27 – 20)

Entonces: $\begin{matrix}\text{N° Adultos} \\ \text{al inicio}\end{matrix} = 40 - 21 = 19$

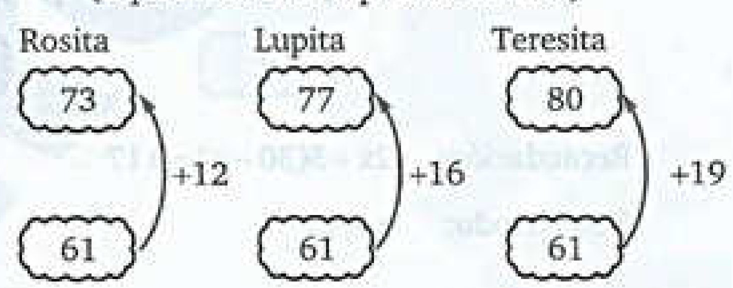
$\begin{matrix}\text{N° Niños} \\ \text{al inicio}\end{matrix} = 27 - 24 = 3$

PROBLEMA 4 En el mes de Diciembre del 2016 Rosita; Lupita y Teresita pesaban conjuntamente 230 Kg. Luego de 10 meses de dieta y gimnasio Rosita bajó 12 Kg; Lupita 16 Kg, Teresita 19 Kg, además Rosita pesaba tanto como Lupita y Lupita tanto como Teresita. ¿Cuántos Kg pesaba inicialmente Rosita?

Resolución: Aplicando método de las operaciones inversas:



Luego:



∴ Rosita pasaba inicialmente 73 Kg.

PROBLEMA 5 Milagritos tiene en su alcancía 30 monedas; algunos de S/2 y otros de S/5. Si en total ha recaudado S/17. ¿Cuántas monedas de S/2 tiene en su alcancía?

Resolución: Método ① "FALSA SUPOSICIÓN"

Si nos piden calcular el número de monedas de S/ 2 debemos asumir que todas las monedas son de S/5.

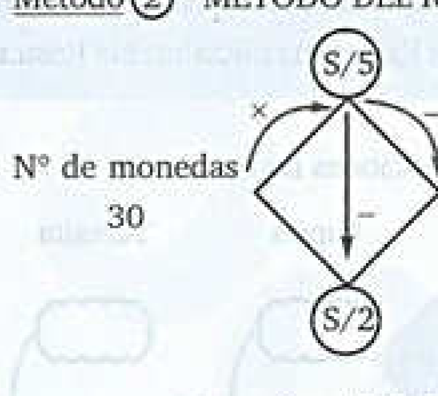
$$\begin{matrix}\text{Falso Total} \\ \text{Recaudado}\end{matrix} = 30 \times S/5 = S/150$$

Al comparar con el verdadero total hay un exceso de S/33 y esto se debe a que esta mal suponiendo que cada moneda de S/2 es de S/5 originandose un error unitario de S/3.

$$\text{Cantidad de monedas de S/2} = \frac{\overbrace{S/150 - S/117}^{\text{Error total}}}{\underbrace{S/5 - S/2}_{\text{Error unitario}}} = 11$$

¿Cuántas veces se debe dar este error unitario de S/3 para acumular un error total de S/33?

Método ② "MÉTODO DEL ROMBO"



Reacudación S/117

$$\text{Cantidad de monedas de S/2} = \frac{30 \times 5 - 117}{5 - 2} = 11$$

Método ③ "PLANTEO DE ECUACIONES"

N° monedas S/2	N° monedas S/5
x	30 − x

Recaudación: $2x + 5(30 - x) = 117$

Resolviendo: $x = 11$

PROBLEMA 6 Para comparar (a + 2) libros me faltan (x − y) soles, pero si compro (a − 1) libros me sobran (2x + 3y) soles. Si todos los libros tienen el mismo precio. ¿Cuánto cuestan 6 libros?

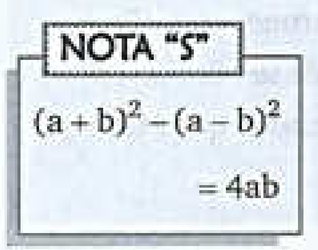
Resolución: Aplicando el "Método de las diferencias".

$$\frac{\text{Costo}}{\text{1 libro}} = \frac{(\text{Falta} + \text{sobra})}{\left(\begin{matrix}\text{Diferencia de}\\ \text{N° de libros}\end{matrix}\right)} = \frac{x - y + 2x + 3y}{(a+2) - (a-1)} = \frac{3x + 2y}{3}$$

Luego : $\dfrac{\text{Costo de}}{\text{6 libros}} = 6\left(\dfrac{3x + 2y}{3}\right) = 6x + 4y$

PROBLEMA 7 En agradecimiento al gran éxito logrado en las ventas del 2017 un empresario se reúne con sus colaboradores para repartir equitativamente parte de sus ganancias. Si a cada uno se le entregara 3xy soles le sobraría $(6x-y)^2$ soles pero si a cada uno le entregara 2xy soles le sobraría $(6x+y)^2$ soles. Si al iniciar la reunión todos se saludaron. ¿Cuántos saludos hubo en total?

Resolución: Aplicando el "Método de las diferencias".

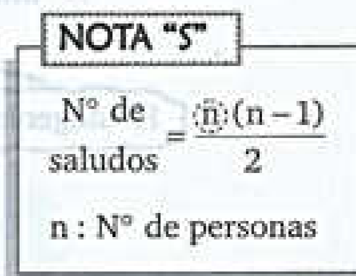


$$\text{N° de colaboradores}=\frac{\left(\text{sobrante mayor}-\text{sobrante menor}\right)}{\left(\text{Diferencia de lo que se entrega a cada uno}\right)}$$

$$\text{N° de colaboradores}=\frac{(6x+y)^2-(6x-y)^2}{3xy-2xy}=24$$

Luego el total de personas reunidas incluyendo al empresario es 25, si todos se saludaran entonces:

$$\text{N° de saludos}=\frac{25\times 24}{2}=300$$



PROBLEMA 8 Un comerciante compró 200 conejos por S/5600 vende una parte en S/3500 ganando S/7 en cada conejo y otra parte en S/1050 perdiendo S/7 en cada conejo. ¿A como se debe vender cada conejo restante, si en total obtuvo una ganancia de S/450?

Resolución:

$$\text{Costo unitario de cada conejo}=\frac{S/5600}{200}=S/28$$

* Si gana S/7 en cada conejo, vende cada uno en S/35

$$\text{N° conejos que vendió la 1era. vez}=\frac{3500}{35}=100$$

** Si pierde S/7 en cada conejo, vende cada uno en S/21

$$\text{N° conejos que vendió la 2da. vez}=\frac{1050}{21}=50$$

Luego :

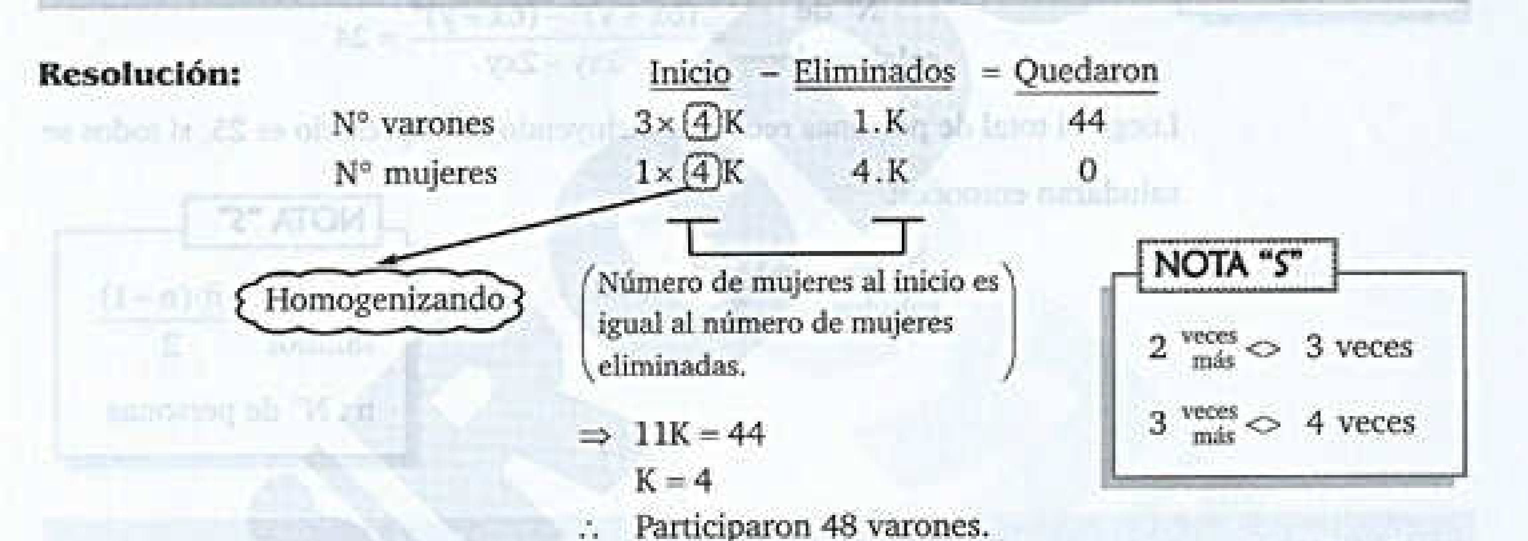
Faltan vender ⇨ 50 conejos

*** Ya recibió S/4550 en las ventas, para recuperar su costo le falta S/1050 y si al final ganó S/450 recibió S/1500, luego:

$$\therefore \text{Precio de venta de cada uno de los restantes} = \frac{1500}{50} = S/30$$

PROBLEMA 9 A cierto concurso de matemáticas se presentaron tantos varones como 2 veces más el número de mujeres, luego de la primera etapa donde se eliminó tantas mujeres como 3 veces más el número de varones eliminados quedaron 44 varones y ninguna mujer. ¿Cuántos varones participaron?

Resolución:



	Inicio	– Eliminados	= Quedaron
N° varones	$3\times(4)K$	$1.K$	44
N° mujeres	$1\times(4)K$	$4.K$	0

$\Rightarrow 11K = 44$

$K = 4$

$\therefore$ Participaron 48 varones.

PROBLEMA 10 En un ascensor pueden entrar 20 adultos, o 24 niños o 15 niñas. Si en un determinado momento en dicho ascensor han entrado 6 adultos y 12 niños. ¿Cuántas niñas pueden entrar como máximo en ese momento?

Resolución: La capacidad del ascensor debe ser un múltiplo del mínimo común múltiplo de 20; 24 y 15.

$$\text{Capacidad del ascensor} = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(20;24;15)}} = 120K$$

Luego $\text{Peso de 1 adulto} = 6k$ $\quad \text{Peso de 1 niño} = 5k$ $\quad \text{Peso de 1 niña} = 8k$

6adultos	12niños	?niñas
36K	60K	24K

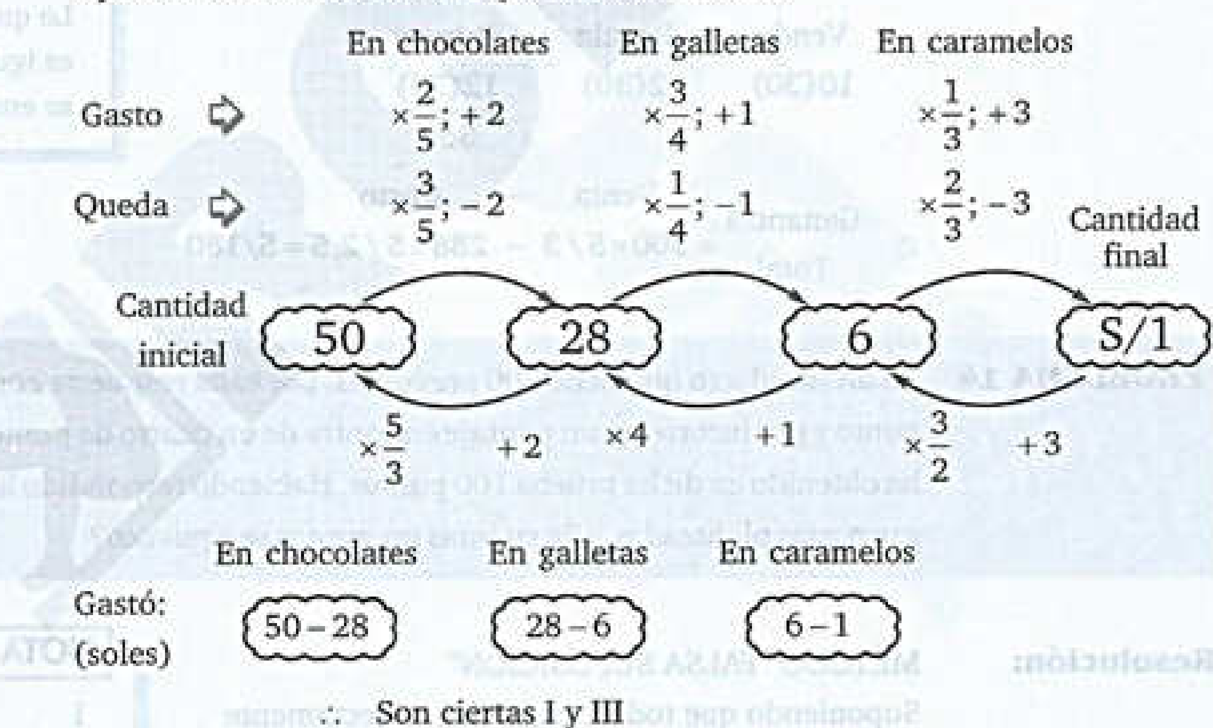
$$N^\circ \text{ niñas} = \frac{24K}{8K} = 3$$

$\therefore$ El número de niñas que pueden entrar como máximo es 3.

PROBLEMA 11 Carhuanchito gasta su dinero del modo siguiente: las 2/5 partes de su dinero más 2 soles en chocolates; las 3/4 partes del dinero que le queda más 1 solo en galletas; la tercera parte del dinero que le queda más 3 soles en caramelos. Si al final le quedó S/1 son ciertas:

I. Tenía al inicio 50 soles.
II. Gastó 12 soles en chocolates.
III. Gastó 5 soles en caramelos.

Resolución: Aplicando el método de las operaciones inversas:



$\therefore$ Son ciertas I y III

PROBLEMA 12 Un vendedor de uvas razona de la siguiente manera: "Si vendo a S/5 los 5/6 de un Kg entonces ganaré S/40; en cambio; si los vendo a S/3 los 3/5 de un Kg perderé S/16. Si vendiese toda la uva que tengo, recibiendo S/30 por Kg entonces recibiría en total:"

Resolución:

* Si vende $\frac{5}{6}$Kg en S/5 → Vende 1 kg en S/6	* Si vende $\frac{3}{5}$Kg en S/3 → Vende 1 kg en S/5

Aplicando método de las diferencias:

$$\text{N° Kg de uva} = \frac{(\text{Ganancia} + \text{Perdida})}{\left(\text{Diferencia de precios unitarios}\right)} = \frac{40+16}{6-5} = 56$$

∴ Si vende cada uno de los 56 Kg en S/30 recibirá S/ 1680

PROBLEMA 13 El costo de un cuaderno es S/2,50 y por cada docena regalan 3 cuadernos. Juan recibe 360 cuadernos y las vende a S/3 cada uno, regalando 2 cuadernos por cada decena que venden. ¿Cuánto ganó?

Resolución:

Compra	Le regalan	Recibe
12(24)	3(24)	15(24) = 360

Vende	Regala	Entrega
10(30)	2(30)	12(30) = 360

NOTA "S"
Lo que se recibe es igual a lo que se entrega.

$$\therefore \text{Ganancia Total} = \overset{\text{Venta}}{300 \times S/3} - \overset{\text{Costo}}{288 \times S/2,5} = S/180$$

PROBLEMA 14 En un simulacro que tiene 200 preguntas, por cada respuesta correcta vale un punto y por incorrecta un puntaje en contra de un cuarto de punto. Un alumno ha obtenido en dicha prueba 100 puntos. Habiendo respondido la totalidad de preguntas planteadas. ¿En cuántas preguntas se equivocó?

Resolución:

MÉTODO "FALSA SUPOSICIÓN"

Suponiendo que todas respondió correctamente

$$\text{Falso puntaje obtenido} = 200 \times 1 = 200$$

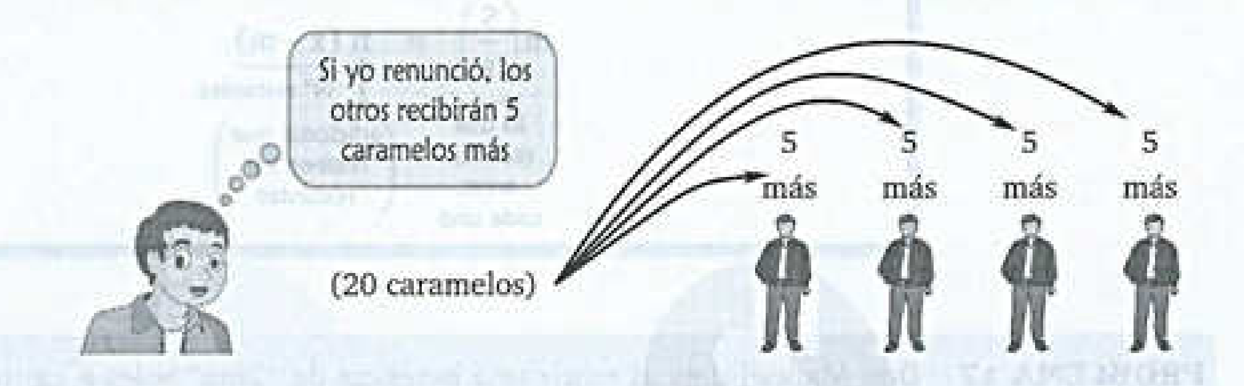
NOTA "S"
$\frac{1}{4}$ en contra ≅ $-\frac{1}{4}$

Luego:

$$\text{N° de preguntas erradas} = \frac{\overbrace{200-100}^{\text{Error Total}}}{\underbrace{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}_{\text{Error unitario}}} = \frac{100}{\frac{5}{4}} = 80$$

PROBLEMA 15 Chucito va a repartir 20 caramelos a cada uno de sus sobrinos de manera equitativa pero uno decide renunciar a su parte y los demás reciben 25 caramelos cada uno. ¿Cuántos sobrinos tiene Chucito?

Resolución:

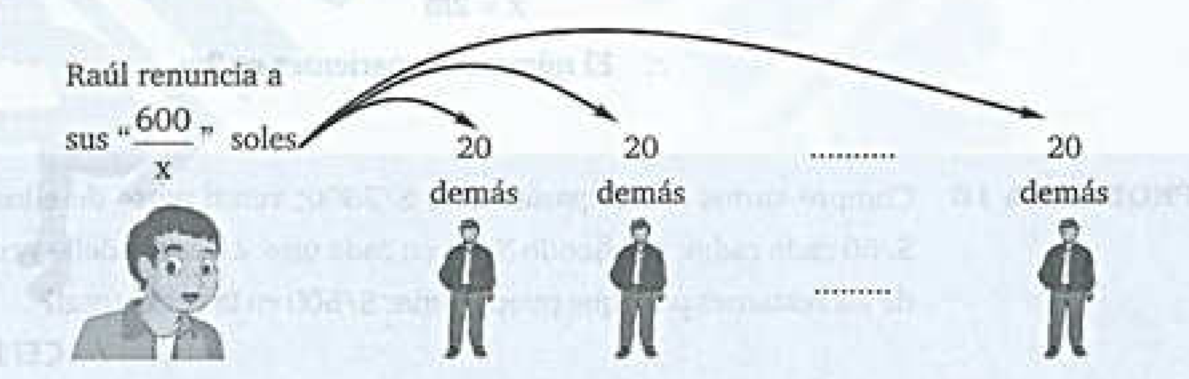


$\therefore$ N° de sobrinos de Chucito = 5

PROBLEMA 16 Carolina decide repartir 600 soles a sus hermanos de manera equitativa pero Raúl renunció a su parte y los demás reciben un adicional de 20 soles cada uno. ¿Cuántos hermanos son en total (incluida Carolina)?

Resolución: Siendo "x" el número de hermanos.

Cada uno debía recibir: $\dfrac{600}{x}$

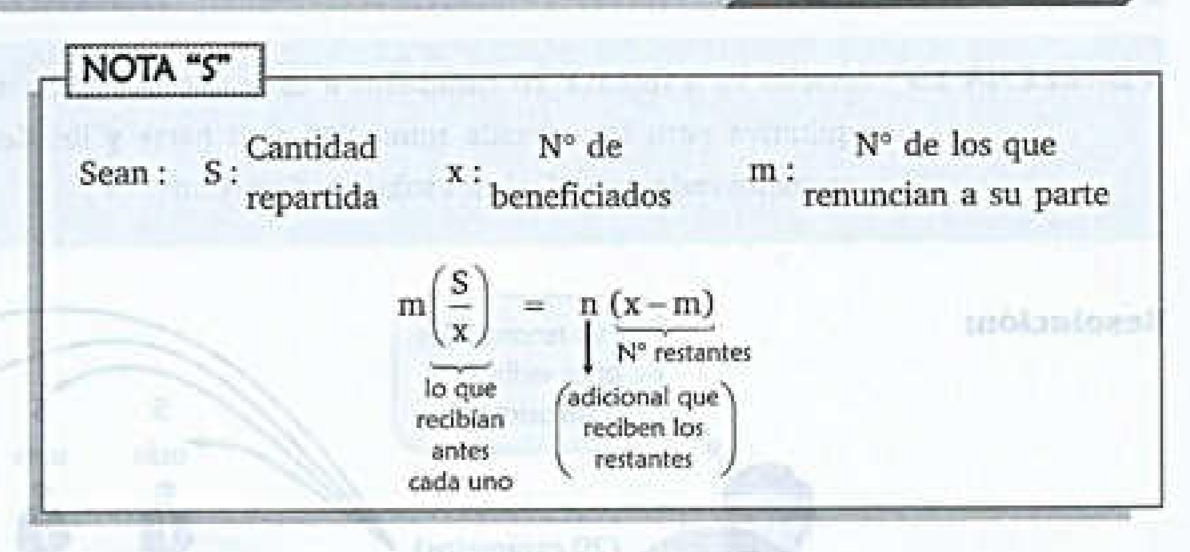


$$\rightarrow \frac{600}{x} = 20(x-1)$$

$$x(x-1) = 30 = 6 \times 5$$

$$\rightarrow x = 6$$

$\therefore$ Son en total 7 hermanos.



PROBLEMA 17 Don Manuel deja al morir una herencia de "2mn" soles a cierto número de parientes. Sin embargo "m" de estos renuncien a su parte y entonces cada uno de los restantes se benefician en "n" soles más. ¿Cuántos son los parientes?

Resolución: Aplicando Método "S":

$$m\left(\frac{2mn}{x}\right) = n\underbrace{(x-m)}_{\text{N° parientes restantes}}$$

(x → N° de parientes)

$$\underline{m}\,\underline{(2m)} = \underline{(x-m)}\,\underline{x}$$

$$x = 2m$$

∴ El número de parientes es 2m.

PROBLEMA 18 Compré varios radios parlantes a S/2800; vendí parte de ellos en S/900; a S/60 cada radio, perdiendo S/20 en cada uno. ¿A cómo debe vender cada uno de los restantes para que pueda ganar S/500 en la venta total?

CEPREVI 2017 - B

Resolución: * Si vende cada uno a S/60 perdiendo S/20 en cada uno, entonces:

Costo de 1 Radio $= S/80$ N° total de radios que compró $= \frac{S/2800}{S/80} = 35$

N° radios vendidos $= \frac{S/900}{S/60} = 15$ N° radios que faltan vender $= 20$

** Si ya recibió S/900 le falta S/1900 para recuperar su capital y si quiere ganar S/500 en total, en la venta de los 20 radios restantes debe obtener un ingreso de S/2400. Entonces:

$$\therefore \text{Precio de venta de cada radio restante} = \frac{2400}{20} = S/120$$

Método (2)

$$\text{Costo de 1 Radio} = S/80 \qquad \text{N° total de radios que compró} = \frac{S/2800}{S/80} = 35$$

$$\text{N° radios vendidos} = \frac{S/900}{S/60} = 15 \qquad \text{N° radios que faltan vender} = 20$$

COSTO + GANANCIA = VENTA

$$2800 + 500 = 900 + 20X$$

$$\therefore X = S/120$$

(X: P.V. de cada uno de los 20 restantes)

PROBLEMA 19 En una caja hay 50 canicas de 15 gr cada una y en una segunda caja hay 52 monedas de 20 gr cada una. ¿Cuántos intercambios se deben realizar para que el peso total de las canicas de las cajas sea el mismo?

Resolución:

50 canicas	52 canicas
Peso unitario = 15 gr	Peso unitario = 20 gr

			Total
Peso inicial	750 gr	1040 gr	1190
	Gana 145 gr	Pierde 145 gr	
Peso final	895 gr	895 gr	1190

* En un intercambio la primera caja recibe 1 canica de 20gr y entrega una canica de 15 gr entonces:

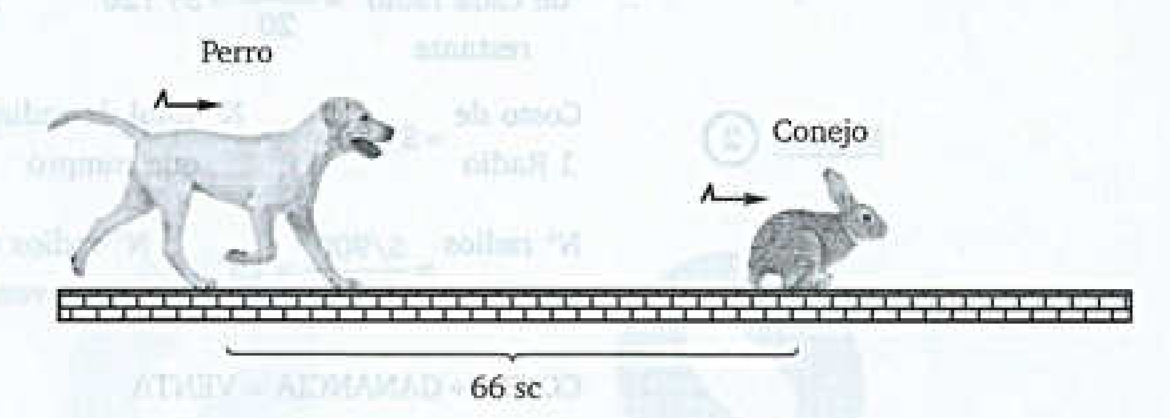
×29 (1 intercambio → Gana 5 gr.) ×29

29 intercambios → Gana 145 gr.

∴ El número de intercambios es 29.

PROBLEMA 20 Un conejo da 5 saltos mientras que un perro que lo persigue da 4, pero 8 saltos de este de éste equivale a 11 saltos de aquel. Si el conejo lleva 66 saltos de ventaja. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzarlo?

Resolución:



I. Relación del número de saltos en el mismo intervalo de tiempo

$$\frac{\text{N° saltos de conejo}}{\text{N° saltos del perro}} = \frac{5SC}{4SP} = \frac{10SC}{8SP}$$

II. Relación de longitudes de salto:
Al indicarnos que 8 saltos de perro equivalen a 11 saltos de conejo se refiere a las longitudes de los saltos.

$$8\ SP = 11\ SC$$

Cuando el perro da 8 de sus saltos la diferencia se acorta en 1 salto de conejo (11 SC – 10 SC). Para alcanzar el perro al conejo.

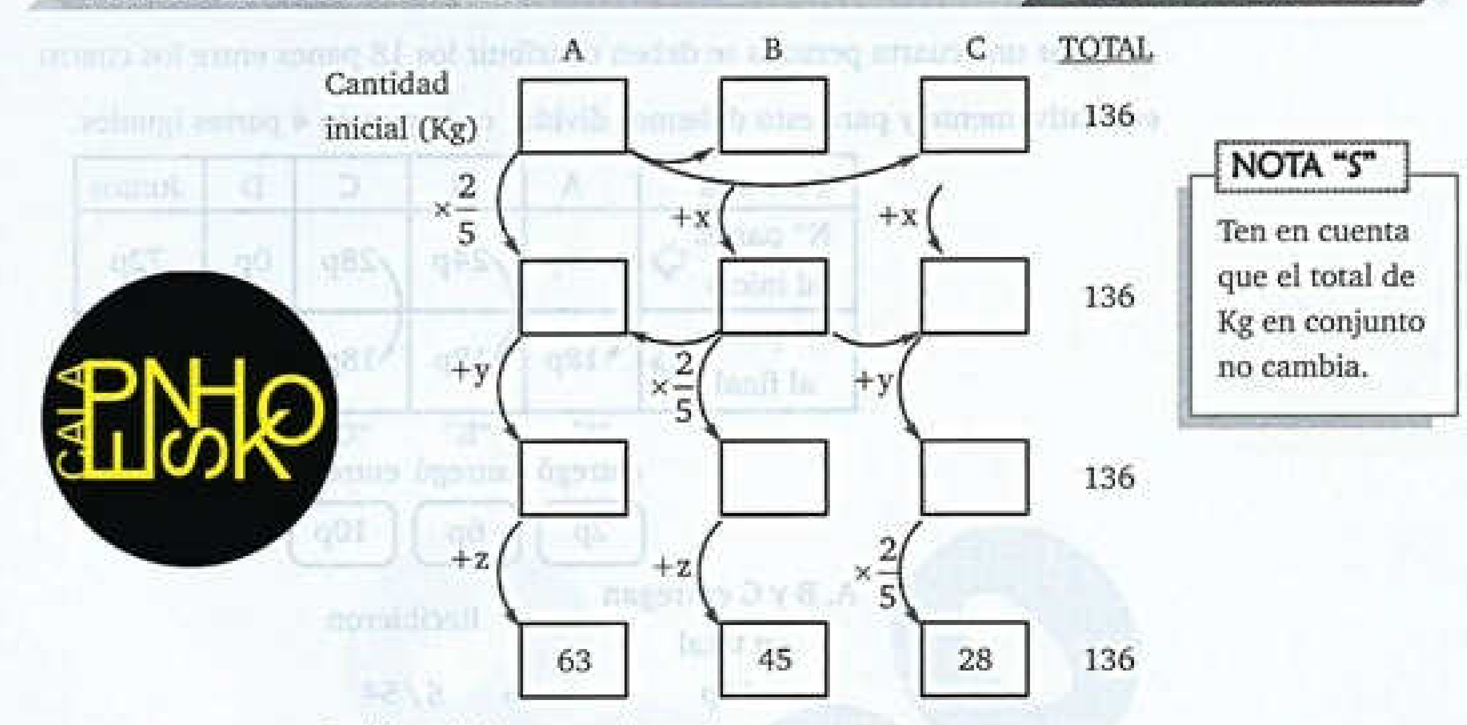
N° saltos que da el perro		La diferencia se acorta
8 SP	⟶	1 SC
528 SP	⟶	66 SC

(×66 en ambas columnas)

PROBLEMA 21 Se tiene 3 sacos: A; B y C con distintos cantidades de arroz. Cada vez que Chucito elije un saco retira los 3/5 de su contenido y los reparte equitativamente a los otros 2 sacos. Luego de elegir cada uno de los sacos en el orden mencionado, resulta que en A se tiene 68 Kg; en B 42 Kg y en C 26 Kg. ¿Cuántos sacos había inicialmente en el saco B?

Resolución:

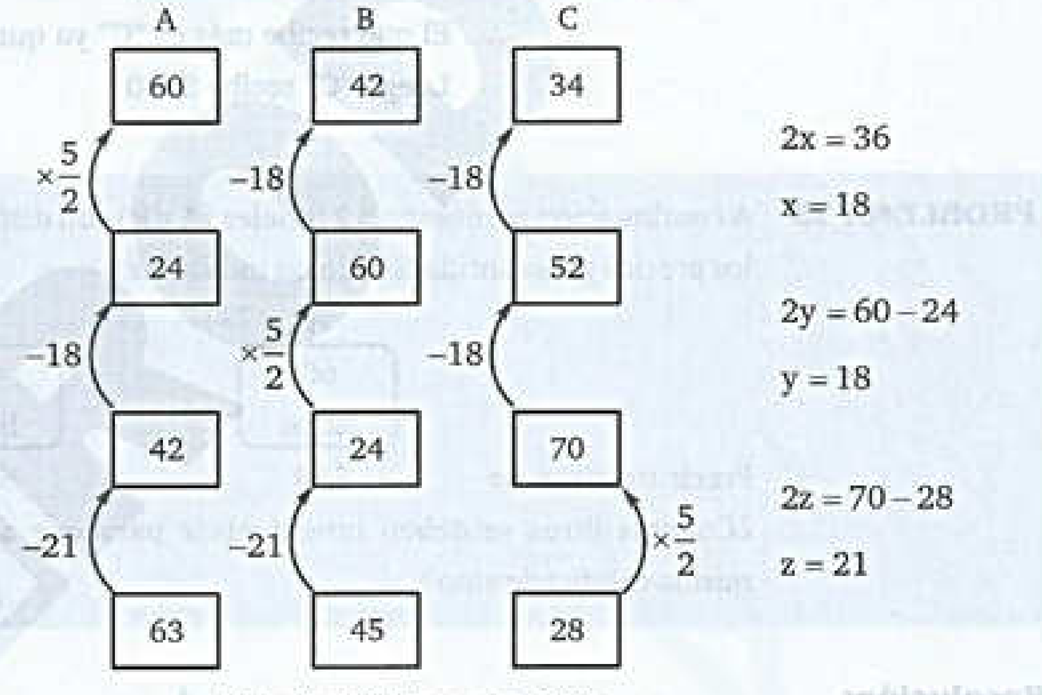
* Al retirar los 3/5 del contenido del saco.
* Queda los 2/5 del contenido inicial.



NOTA "S"

Ten en cuenta que el total de Kg en conjunto no cambia.

Realizando las operaciones inversas tenemos:



$2x = 36$

$x = 18$

$2y = 60 - 24$

$y = 18$

$2z = 70 - 28$

$z = 21$

$\therefore$ B tenía inicialmente 42 Kg.

PROBLEMA 22 Tres personas tienen 5; 6 y 7 panes respectivamente. Se encontraron con una cuarta persona que no tenía pan alguno con el cual comparten todo por igual y este en agradecimiento les deja S/ 54 para que los distribuya. ¿Cuánto le toca al que recibe más?

Resolución:

Personas	A	B	C	Juntos
N° de panes	5	6	7	18

Al llegar una cuarta persona se deben distribuir los 18 panes entre los cuatro equitativamente y para esto debemos dividir cada pan en 4 partes iguales.

Personas	A	B	C	D	Juntos
N° partes al inicio ⇨	20p	24p	28p	0p	72p
N° partes al final ⇨	18p	18p	18p	18p	72p

"A" entregó 2p "B" entregó 6p "C" entregó 10p

A, B y C entregan en total 18p ⟶ Recibieron S/54

1p ⟶ S/3

∴ El que recibe más es "C" ya que entregó 10 partes. Luego "C" recibe S/30

PROBLEMA 23 A continuación se muestran 2 toneles (A y B) con distintas cantidades de vino; los precios y las cantidades son las indicadas:

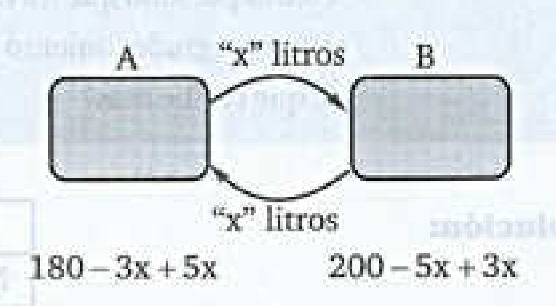
	A	B
	60 litros	40 litros
Precio unitario ⇒	S/3	S/5

¿Cuántos litros se deben intercambiar para que ambos toneles tengan la misma calidad de vino?

Resolución:

	A	B
Costo total ⇨	S/180	S/200

Al intercambiar x litros tenemos:



Nuevo costo total: $180-3x+5x$ $200-5x+3x$

Para que ambos tengan la misma calidad, el precio por litro en cada tonel es el mismo; luego:

$$\text{Precio por litro} \Rightarrow \frac{180+2x}{60} = \frac{200-2x}{40}$$

Resolviendo: $x = 24$

$\therefore$ Se deben intercambiar 24 litros.

NOTA "S"

Para que dos recipientes tengan la misma calidad de su contenido (del mismo tipo):

	A	B
Cantidad	X Kg	Y Kg

$$\text{N° Kg que se debe intercambiar} = \frac{xy}{x+y}$$

MÉTODO (S)

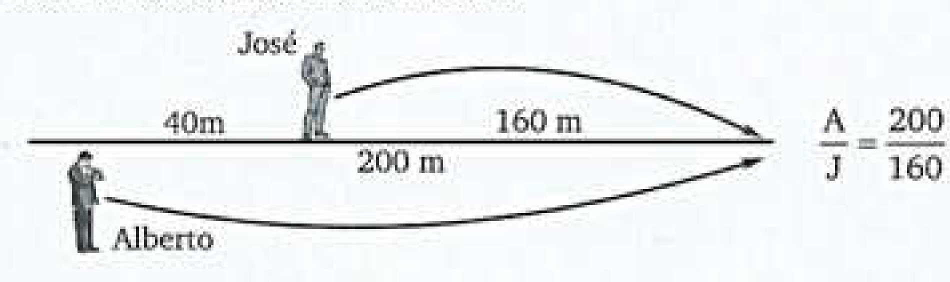
$$\text{N° Kg que se debe intercambiar} = \frac{60 \times 40}{60+40} = 24$$

PROBLEMA 24 En una carrera de 200 m planos. Alberto le da a José una ventaja de 40m para llegar simultáneamente a la meta y en una carrera de 100 m planos, José le da a Luis a Luis una ventaja de 10m. Sabiendo que las velocidades de los 3 es constante en todas las carreras, ¿cuántos metros de ventaja debe darle Alberto a Luis en una carrera de 400 m planos para llegar simultáneamente a la meta?

ADMISIÓN UNMSM 2017

Resolución:

* Si Alberto le da una ventaja de 40 m a José, entonces este último solo debe recorrer 160 m.



$$\frac{A}{J} = \frac{200}{160}$$

* Si José le da a Luis una ventaja de 10 m en una carrera de 100m entonces Luis solo debe recorrer 90 m.

$$\frac{J}{L} = \frac{100}{90}$$

$$\frac{A}{J}\times\frac{J}{L}=\frac{200}{160}\times\frac{100}{90}$$

$$\rightarrow \frac{A}{L}=\frac{200\times 2}{144\times 2}=\frac{400}{288}$$

De lo último se deduce que en una carrera de 400m Luis solo debe recorrer 288 m, luego la ventaja que Alberto le da a Luis es de 112 m.

PROBLEMA 25 En cierta bodega; dos kilogramos de pollo tiene el mismo costo que tres kilogramos de arroz; cinco kilogramos de arroz cuestan lo mismo que cuatro bolígrafos y ocho bolígrafos igual que cuatro docenas de choros. Determine el costo de dos kilogramos de pollo, en soles, sabiendo que tres docenas de choros cuestan 40 soles.

Resolución: Por regla conjunta tenemos:

2Kg	Po	<>	3Kg	A
5Kg	A	<>	4	B
8	B	<>	48	Ch
36	Ch	<>	40	soles
"x"	soles	<>	2Kg	Po

$$2\times5\times8\times36\times \cancel{Po}\times \cancel{A}\times \cancel{B}\times \cancel{Ch}\times x\ \cancel{soles} <> 3\cancel{A}\times 4\cancel{B}\times 48\ \cancel{Ch}\times 40\ \cancel{soles}\times 2\ \cancel{Po}$$

$$x=\frac{3\times4\times48\times \cancel{40}\times \cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{5}\times\cancel{8}\times 36}$$

$$x=16$$

$\therefore$ El costo de 2 Kg de pollo es 36 soles.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Unos alumnos hacen una colecta para adquirir una pelota para su equipo de basket. Si cada uno colaborase con 3 soles faltarían 20 soles, entonces deciden aumentar la colaboración a S/3,50 y ahora les alcanza y sobra 5 soles. ¿Cuánto cuesta la pelota?

A) S/150 B) S/170 C) S/180
D) S/120 E) S/125

2. Un vendedor ofrece un lote de camisas a 24 soles cada uno para ganar S/60 respecto a su inversión, pero si se decide venderlo a S/18 cada camisa pierde S/30. ¿Cuántas camisas tiene el lote?

A) 15 B) 20 C) 18
D) 22 E) 24

3. Un padre va con sus hijos a un concierto y al querer comprar entradas de S/65 observa que le faltan entradas para 4 de ellos y tiene que comprar entradas de S/35, entrando así todos y le sobra S/10. ¿Cuántos hijos llevó al concierto?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

4. Se desea rifar un minicomponente vendiéndose cierto número de boletos. Si se vende cada boleto a S/0,70 se pierden S/40 y si se vende cada boleto a S/0,80 se ganan S/50. ¿Cuál es el precio del minicomponente?

A) S/90 B) S/220 C) S/720
D) S/670 E) S/120

5. Se quiere rifar una microcomputadora con cierto número de boletos. Si se vende cada boleto a S/10 se pierden S/1000 y si se vende a S/15 se ganan S/1500. Determinar el número de boletos y el precio de la computadora.

A) 500; 6400 B) 600; 1200
C) 400; 5000
D) 500; 6000 E) 300; 7000

6. Si se compró 4 docenas de objetos me sobran S/27,40; pero para comprar 5 docenas me faltan S/17. ¿Cuánto vale cada objeto?

A) S/3,7 B) S/5,4 C) S/4,2
D) S/ 5,7 E) S/5,9

7. Si se forman filas de 7 niños sobran 5, pero faltarían 4 niños para formar 3 filas más de 6 niños. ¿Cuántos niños son?

A) 60 B) 90 C) 70
D) 68 E) 65

8. Pedro invita a sus amigos al cine. Si entran todos a platea alta le va a faltar "x" soles pues cada entrada vale "y" soles, pero si entran a platea baja le va a sobrar "m" soles pues cada entrada vale "n" soles. ¿Cuántas personas conforman el grupo?

A) $\frac{m-x}{y-n}$ B) $\frac{m-x}{n-y}$ C) $\frac{x-m}{y-n}$

D) $\frac{m+x}{n-y}$ E) $\frac{m+x}{y-n}$

9. Se desea repartir naranjas equitativamente entre cierto número de niños sobrando 3 naranjas, pro si se les dan 2 naranjas más a cada uno faltarían 7 naranjas. ¿Cuántos niños eran?

A) 9 B) 10 C) 6
D) 5 E) 11

10. En una iglesia, si los asistentes se sientan 12 en cada banca, se quedan de pie 11 de ellos, pero si se sientan 15 en cada banca, la última banca sólo tendría 11 asistentes. ¿Cuántos asistentes tiene la iglesia?

A) 72 B) 69 C) 71
D) 68 E) 63

11. Se trata de llenar un cilindro al cual concurren 2 cañerías. Si abro la primera que arroja 52 litros de agua cada 5 minutos y la dejo funcionar cierto tiempo, logra llenar el cilindro y rebalsar 72 litros. Si abro el segundo caño y funciona el mismo tiempo que funcionó el primero, faltarían 40 litros de agua para llenar el cilindro, debido a que este caño arroja 20 litros de agua cada 3 minutos. ¿Qué capacidad tiene el cilindro?

A) 280 litros B) 260 litros C) 420 litros
D) 240 litros E) 270 litros

12. En una granja donde existen conejos y gallinas se cuentan 60 cabezas y 150 patas ¿Cuántos conejos hay?

A) 45 B) 15 C) 20
D) 35 E) 24

13. Se tiene 3600 soles en billetes de S/100 y S/50 que se han repartido entre 45 personas tocándole a cada una un billete. ¿Cuántas personas recibieron 1 billete de S/100?

A) 30 B) 18 C) 27
D) 15 E) 35

14. Un postulante en un examen de 25 preguntas obtiene 4 puntos por respuesta acertada y perderá un punto por respuesta errada. ¿Cuántas respuestas erradas tuvo si contestando todas las preguntas obtuvo 70 puntos?

A) 10 B) 7 C) 11
D) 6 E) 9

15. Dos niños han recorrido en total 64m dando entre los dos 100 pasos. Si cada paso del segundo mide 50 cm y cada paso del primero mide 70 cm. ¿Cuántos pasos más que el segundo ha dado el primero?

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

16. El examen de un concurso de admisión consta de 100 preguntas, por respuesta correcta se asigna 5 puntos a favor y 0,75 en contra por respuesta equivocada. Si un postulante ha obtenido en dicha prueba 316 puntos habiendo respondido la totalidad de las preguntas, el número de respuestas correctas excede a las incorrectas en:

A) 34 B) 36 C) 38
D) 40 E) 42

17. Un litro de leche pura pesa 1030 g. Cierto día se compraron 6 litros de leche adulterada que pesan 6120 g. ¿Cuántos litros de agua contiene esta leche? (1 litro de leche pesa 1000 g.)

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

18. Martín trabaja en una compañía, en la cual por cada día de trabajo le pagan 300 soles y por cada día que falta le descuentan S/100. ¿Cuántos días ha trabajado Martín, si al final de 40 días adeuda a la empresa la suma de S/2000?

A) 12 B) 13 C) 18
D) 5 E) 10

19. Un tren de 325 pasajeros tiene que recorrer 150 km, los pasajeros de 1ra. clase pagan 4 soles por km y los de 2da. clase pagan 2 soles por km. ¿Cuántos pasajeros iban de primera clase, si en ese viaje se ha recaudado S/129600 por concepto de pasajes?

A) 125 B) 218 C) 99
D) 145 E) 107

20. El examen de admisión de la UNSA consta de 100 preguntas; cada respuesta correcta vale 4 puntos, por respuesta incorrecta le descuentan 1 punto y una pregunta dejada en blanco no tiene puntaje. Si un postulante obtuvo 156 puntos y notó que por cada pegunta dejada en blanco tenía 3 correctas. ¿Cuántas contestó incorrectamente?

A) 16 B) 40 C) 36
D) 42 E) 24

21. Jorge le dice a Rosa: "Si a la cantidad de dinero que tengo le agregó 20 soles,luego ese resultado lo multiplico por 6, para quitarle a continuación 24 soles y si a ese resultado le extraigo la raíz cuadrada y por último divido entre 3, obtengo 8 soles", ¿cuánto tenía Jorge al inicio?

A) 92 B) 24 C) 80
D) 576 E) 352

22. Roberto se enteró que San Judas Tadeo hacia un milagro que consistía en duplicar el dinero que uno tenga cobrando únicamente S/60 por cada milagro. Una mañana Roberto acudió a la iglesia donde se veneraba a San Judas Tadeo con todos sus ahorros, pero tal sería su sorpresa que luego de 3 milagros se quedó sin un sol. ¿A cuánto ascendían los ahorros de Roberto?

A) 60 B) 120 C) 180
D) 0 E) 52,5

23. Una persona ingresó a un restaurante, gastó la mitad de lo que tenía y dejó 3 soles de propina. Luego ingresó a una heladería, gastó la mitad de lo que aún le quedaba y dejó 2 soles de propina, que dándose sin dinero. ¿Cuánto tenía inicialmente?

A) 12 B) 16 C) 10
D) 14 E) 18

24. Diana compró cierta cantidad de caramelos; 1/3 de ellos regaló a su hermanito menor, los 2/5 del resto a su primo Juan y 1/4 del último resto a su prima Marilú, que dándose únicamente con 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos compró Diana?

A) 5 B) 60 C) 20
D) 10 E) 15

25. Mónica va al mercado donde gasta en carne los 2/5 del dinero que llevó más 4 soles, en menestras gastó 1/6 del dinero que le quedaba más 6 soles y en frutas gasta los 3/7 del nuevo resto más 4 soles. ¿Cuántos soles llevó al mercado si ha regresado con 4 soles?

A) 140/9 B) 140/3 C) 120/7
D)64 E) 60

26. Naty es una vendedora de naranjas, una mañana vendió las naranjas de una manera muy especial. Cada hora vendió los 3/4 de las naranjas que tenía en esa hora más 1/2 naranja, quedándose al final de las 3 horas únicamente con dos naranjas. ¿Cuántas naranjas vendió esa mañana?

A) 160 B) 168 C) 170
D) 172 E) 176

27. Hallar la profundidad de un pozo de gua sabiendo que cada día su nivel desciende en 4 m por debajo de su mitad; quedando vacío al cabo del cuarto día.

A) 110 m B) 120 m C) 130 m
D) 140 m E) 150 m

28. Dos jugadores, acuerdan que después de cada partida, el que pierde duplicará el dinero del otro. Después de dos partidas, que las ha ganado un solo jugador, cada uno tiene 64 soles. ¿Cuánto tenía el perdedor al inicio?

A) 16 B) 128 C) 96
D) 112 E) 32

29. Tres jugadores acuerdan que el perdedor duplicará el dinero de los otros dos. Juegan tres partidas, pierde una cada uno y al retirarse lo hacen con 16 soles cada uno. ¿Cuánto tenía cada jugador al principio?

A) 8; 24; 16 B) 26; 14; 8 C) 12; 1; 28
D) 24; 28; 30 E) 15; 30; 3

30. Tres jugadores acuerdan que el perdedor de cada juego triplicará el dinero de los otros dos. Juegan 3 veces y pierden un juego cada uno en el orden A; B; C; quedando con 36; 12; 85 soles respectivamente. ¿Cuánto tenía A al principio?

A) 90 B) 80 C) 70
D) 60 E) 50

31. Si una ficha roja equivale a dos fichas blancas, dos fichas azules equivalen a tres rojas y tres fichas blancas a dos verdes. ¿A cuántas fichas verdes equivale una ficha azul?

A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 6

32. Un jugador de billar "A" da a otro jugador "B" 40 carambolas para 100 y "B" da a otro jugador "C" 60 carambolas para 100. ¿Cuántas carambolas debe dar "A" a "C" en una partida de 100 carambolas?

A) 20 B) 24 C) 80
D) 68 E) 76

33. En una joyería se comparan el valor de las joyas existentes y 4 cadenas de oro equivalen a 10 de plata, 9 de plata equivalen a 3 de diamante; del mismo modo, 6 de diamantes valen lo mismo que 24 de acero; por 36000 soles me dan 4 cadenas de acero. ¿Cuántas cadenas de oro me darán por 60000 soles?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

34. Si comprar 3 libros equivale a comprar 7 lapiceros y por cada 4 cuadernos obtengo 6 lapiceros, ¿cuántos cuadernos obtengo por 9 libros?

A) 11 B) 9 C) 7
D) 14 E) 6

35. En una carrera sobre una distancia dada "d" a rapidez uniforme A puede vencer a B por 20 m, B puede vencer a C por 10 m y A puede vencer a C por 28 m. Entonces "d" en metros, es igual a:

A) 58 B) 100 C) 116
D) 120 E) 128

36. Jesús del total de dinero que tenía 4/9 más $200 dio a Pilar y de lo que aún le quedaba 5/8 menos $100 dio a Rocío. Si todavía le queda $400. ¿Cuánto tenía al inicio?

A) 1800 B) 2000 C) 2200
D) 2400 E) 2600

37. Un padre del total de su fortuna, 1/3 más $500 dio a su hijo mayor, de lo que le quedaba 1/4 más $125 dio a su segundo hijo, y de lo que aún le quedaba, 3/5 más $800 dio a su último hijo. Si todavía le queda $2000. ¿Cuál era la fortuna del padre?

A) $12000 B) $15000 C) $13000
D) $14000 E) $16000

38. En un corral se observa 80 ojos y 120 patas. Si lo único que hay son conejos y patos, ¿Cuál es el número de patos?

A) 18 B) 12 C) 23
D) 36 E) 20

39. En un concurso de admisión a la UNSAAC; en el curso de R. M. que tiene 16 preguntas, por respuesta correcta se le asigna 4 puntos, por respuesta incorrecta 0 puntos y por pregunta no contestada 1 punto. Un postulante ha obtenido 36 puntos habiendo respondido las 16 preguntas del curso, ¿cuántas respuestas correctas tuvo?

A) 8 B) 7 C) 9
D) 10 E) 6

40. Dos jugadores acuerdan que después de cada partida, el que pierda dará 15 soles al que gane. Al terminar el juego, luego de 18 partidas, el primero ha ganado 120 soles. ¿Cuántas veces ganó el segundo jugador?

A) 13 B) 5 C) 6
D) 7 E) 0

41. Unos hijos desean hacerle un regalo a su mamá, si cada uno aporta 20 soles les sobrarían 28 soles y si cada uno contribuye con 15 soles les sobraría 13 soles. ¿Cuántos hijos son?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) Más de 5

42. Para la rifa de un automóvil se confeccionaron 1000 boletos y se pensó ganar S/20000; pero sólo se vendieron 480 boletos, originándose una perdida de S/3400. Hallar el precio del automóvil.

A) S/ 27 500 B) S/ 26 000
C) S/ 25 000
D) S/ 28 400 E) S/ 25 200

43. Un vendedor de relojes pensaba: "Si cada reloj vendó a S/18 compraría un terno y me sobraría S/15, y si los vendo a S/20 cada uno me sobraría S/55 y compraría el terno". ¿Cuántos soles cuesta el terno?

A) 323 B) 345 C) 299
D) 258 E) 284

44. Un ayudante entra a una fábrica y recibe la promesa de percibir S/2600 y una gratificación por 5 años de trabajo. Al cabo de 3 años y 3 meses, abandona el trabajo y recibe S/850 más la gratificación. ¿A cuánto asciende la gratificación en soles?

A) 2600 B) 2000 C) 2200
D) 2800 E) 2400

45. El trabajo de cuántos hombres equivaldría al trabajo de 16 niños; si el trabajo de 8 niños equivale al de 6 ancianos; el de dos mujeres al de 4 ancianos y el de 6 mujeres al de dos hombres.

A) 4 B) 1 C) 3
D) 2 E) 5

46. Sabiendo que 12 varas de tela cuestan lo mismo que 10 metros de lana y que 4 metros de lana cuestan S/ 60. ¿Cuántos soles costará 8 varas?

A) 90 B) 100 C) 80
D) 110 E) 120

47. En la peña "LA CHOLA"; cuatro platos de lomo equivalen a 10 platos de caucau; 9 de caucau equivalen a tres de churrasco, 4 de churrasco equivalen a 6 de lechones. Si por S/160 dan 4 platos de lechón, ¿Cuántos platos de lomo dan por S/150?

A) 3 B) 4 C) 7
D) 8 E) 6

48. Con el precio de 9 reglas se obtiene 5 lapiceros; con el de 4 lapiceros se obtienen 3 lápices. ¿Cuántas reglas se obtienen por el precio de 20 lápices?

A) 25 B) 20 C) 24
D) 27 E) 48

49. En una feria, 7 gallinas cuestan lo mismo que 2 pavos; 14 patos cuestan los mismo que 5 pavos; 3 conejos cuestan lo mismo que 8 patos. ¿Cuántos soles costarán cuatro gallinas, si un conejo cuesta 30 soles?

A) 28 B) 36 C) 42
D) 54 E) 46

50. Si 2 veces el sueldo de un obrero A equivale a la tercera parte del sueldo de un obrero B y las 3/5 partes del sueldo de un obrero B equivalen a S/300. ¿Cuánto percibirá un obrero C si éste percibe 6 veces de lo que percibe A?

A) S/500 B) S/ 400 C) S/ 600
D) S/800 E) S/900

Problemas Sobre Edades

CAPACIDADES

- Reforzar la capacidad de interpretación y simbolización para resolver problemas con enunciado.
- Enseñar las diferentes formas de resolver los problemas sobre edades.
- Enseñar el uso de tablas de doble entrada en la resolución de problemas sobre edades.

El tiempo máximo de vida es la edad límite que puede alcanzar un individuo de una especie, mientras que la duración media de vida, es el promedio de la expectativa de vida de los individuos de esa especie. Este parámetro refleja la benevolencia relativa del medio, entre otros aspectos.

El máximo tiempo de vida para la especie humana, que se haya podido comprobar, es de 122 años y ha cambiado muy poco en los últimos siglos. Sin embargo, el periodo medio de vida, ha aumentado considerablemente. En países industrializados se ha pasado de los 35 o 40 años a finales del siglo XVIII hasta los 76 años a mediados de la década de 1990.

INTRODUCCIÓN

Problemas sobre edades es un tema del curso perteneciente a "Planteo de Ecuaciones", que por su diversidad de problemas y por la existencia de formas abreviadas de resolverlos, se trata íntegramente en un capítulo especial.

Se debe tener en cuenta que en los problemas intervendrán: sujetos, tiempos y edades.

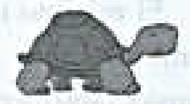
SUJETOS

Son los protagonistas, que generalmente son las personas, y en algunos problemas los animales, las plantas, etc.

Ejemplos:

i) La edad de Alberto y Yolanda suman tanto como la suma de los 5 primeros números primos ...

ii) La edad de la tortuga Pily en el año inmediato anterior al próximo año será 40 años. Si aún no cumple años ¿qué edad tiene Pily?



TIEMPOS

Es uno de los más importantes puntos, pues si se interpreta inadecuadamente el texto en un tiempo equivocado, se irá a la complicación de la resolución . Veamos:

TIEMPOS	EXPRESIONES
Tiempo Presente: Existe un sólo presente. Se le identifica por las expresiones:	– tengo .... – mi edad actual es .... – tienes .... – etc. – tenemos .... – hoy la edad ....
Tiempo Pasado: Puede darse en el problema uno o más tiempos, se reconocen por:	– hace 8 años .... – tenías .... – cuando yo tenía .... – etc.
Tiempo Futuro: Al igual que el tiempo pasado pueden darse uno o más. Pueden identificarse por:	– dentro de .... – tú tendrás .... – nosotros tendremos .... – etc.

EDAD

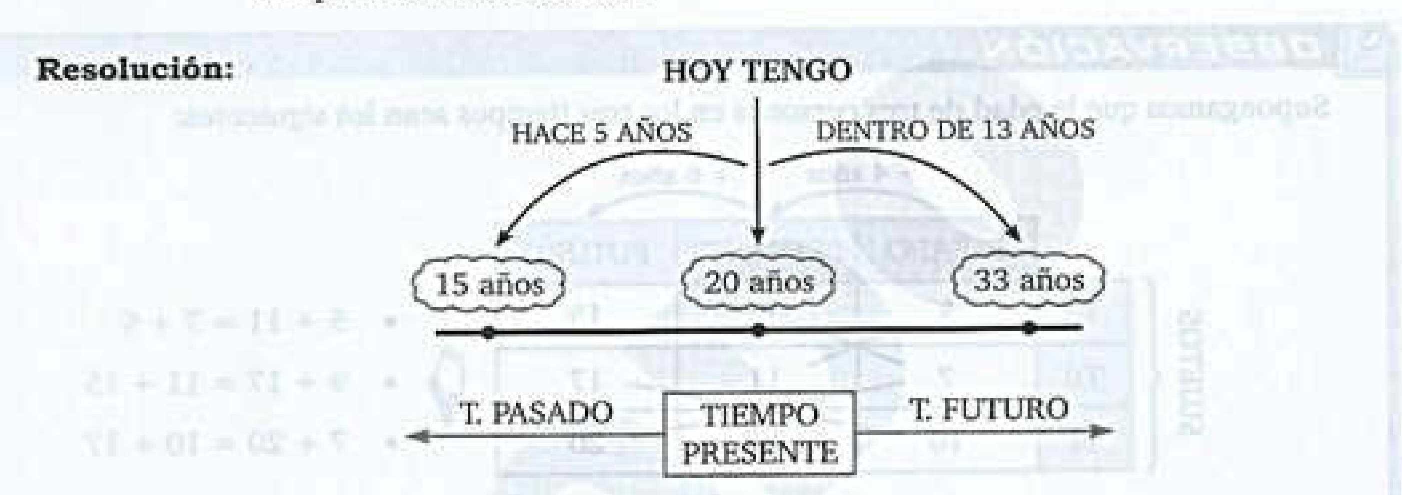
Es un lapso de tiempo perteneciente a la existencia de un sujeto, se da generalmente en años pero puede darse en días o meses.

Para facilitar la resolución clasificaremos los problemas en 2 tipos:

TIPO I: Cuando interviene la edad de un sólo sujeto

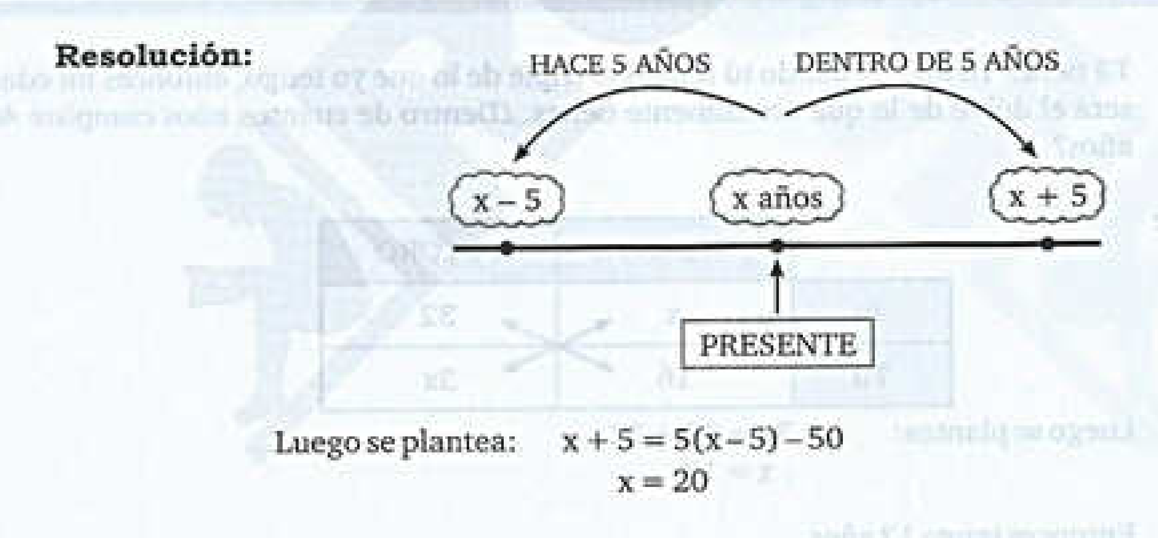
Ejemplo 1: Hoy tengo 20 años ¿podría decir que edad tenía hace 5 años y cuántos años cumpliré dentro de 13 años?

Resolución:



Ejemplo 2: Dentro de 5 años tendré el quíntuplo de la edad que tenía hace 5 años, menos 50 años. ¿Qué edad tendré dentro de 2 años?

Resolución:



Luego se plantea: $x + 5 = 5(x - 5) - 50$

$x = 20$

Entonces tengo 20 años.

$\therefore$ Dentro de 2 años tendré 22 años

TIPO II: Cuando intervienen las edades de dos o más sujetos

Ejemplo 1: Hace 5 años Pedro tenía el doble de la edad que tenía Juan. ¿Cuál es la edad actual de Juan si se sabe que dentro de 5 años se cumplirá que la edad de Juan será los 3/5 de la que tenga Pedro?

Resolución:

	Hace 5 años	Hoy	Dentro de 5 años
Juan	x	x + 5	x + 10
Pedro	2x	2x + 5	2x + 10

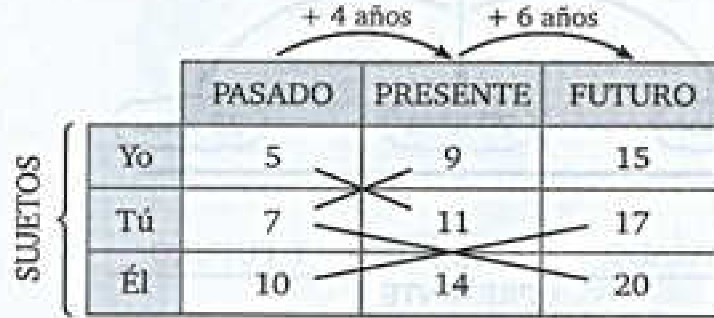
Luego se plantea: $x + 10 = \frac{3}{5}(2x + 10)$

$$x = 20$$

$\therefore$ Juan tiene 25 años.

OBSERVACIÓN

Supongamos que la edad de tres personas en los tres tiempos sean los siguientes:



	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Yo	5	9	15
Tú	7	11	17
Él	10	14	20

- $5 + 11 = 7 + 9$
- $9 + 17 = 11 + 15$
- $7 + 20 = 10 + 17$

Criterio del aspa: La suma en aspa de valores colocados simétricamente nos da un mismo resultado.

Ejemplo 2: Tú tienes 16 años. Cuando tú tengas el triple de lo que yo tengo, entonces mi edad será el doble de lo que actualmente tienes. ¿Dentro de cuántos años cumpliré 40 años?

Resolución:

	PRESENTE	FUTURO
Yo	x	32
Tú	16	3x

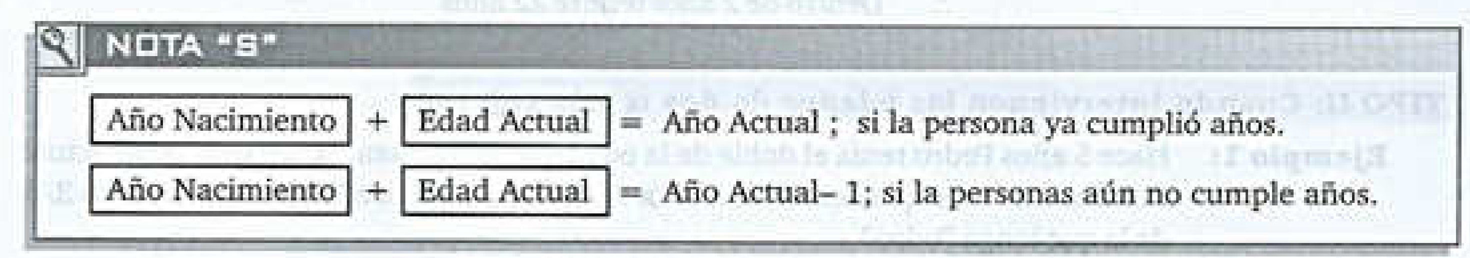
Luego se plantea: $x + 3x = 16 + 32$

$$x = 12$$

Entonces tengo 12 años.

$\therefore$ Cumpliré 40 dentro de 28 años

NOTA "S"



Año Nacimiento + Edad Actual = Año Actual ; si la persona ya cumplió años.

Año Nacimiento + Edad Actual = Año Actual– 1; si la personas aún no cumple años.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Dentro de 30 años tendré el triple de la edad que tengo ahora. ¿Cuántos años tengo?

   Rpta.: ....

2. Hace 18 años tenía la cuarta parte de la edad que tengo ahora. ¿Cuántos años tengo?

   Rpta.: ....

3. Si sumamos la edad que tenía hace 10 años con la edad que tendré dentro de 26 años obtendremos el triple de mi edad. ¿Cuántos años tengo?

   Rpta.: ....

4. Mi edad es tres veces tu edad, pero dentro de 15 años mi edad será el doble de tu edad. ¿Cuántos años tengo?

   Rpta.: ....

5. Cuando tenga el doble de la edad que tú tienes yo tendré 34 años. Si nuestras edades suman 38 años, ¿Cuántos años tengo?

   Rpta.: ....

6. El doble de mi edad, más 12 años es igual al triple de mi edad, menos 6 años. ¿Cuántos años tengo?

   Rpta.: ....

7. Ana tiene 20 años y Betty tiene 14 años. ¿Hace cuántos años Ana tenía el doble de lo que tenía Betty?

   Rpta.: ....

8. Hace 12 años tenía la cuarta parte de la edad que tengo. ¿Cuántos años tengo?

   Rpta: ....

9. Tú tienes 15 años y yo tengo el doble de la edad que tu tenías cuando yo tenía 15 años. ¿Cuántos años tengo?

   Rpta: ....

10. Un padre le dice a su hijo: "Yo tengo el triple de tu edad, pero dentro de 10 años, yo tendré el doble de lo que tú tendrás". ¿Cuántos años tiene el padre?

   Rpta: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Si al triple de la edad que tendré dentro de 6 años le restamos el doble de la edad que tenía hace 3 años resulta el doble de mi edad. ¿Dentro de cuántos cumpliré 40 años?

Resolución:

Hace 3 años	Tengo	Dentro de 6 años
$x-3$	x	$x+6$

$$3(x+6)-2(x-3)=2x$$
$$x=24$$

Entonces: Tengo 24 años

∴ Cumpliré 40 años dentro de 16 años

PROBLEMA 2 Las edades actuales de Ángel y Bruno son entre sí como 6 es a 5. cuando Bruno tenga 8 años más de lo que tiene Ángel, éste tendrá el doble de lo que tenía Bruno hace 2 años. ¿Qué edad tendrá Ángel cuando Bruno tenga el doble de la edad que tiene ahora?

Resolución:

	PRESENTE	FUTURO
A	6x	2(5x – 2)
B	5x	6x + 8

"B" hace 2 años

$$6x-5x=2(5x-2)-(6x+8)$$
$$x=4$$

Reemplazando sólo en el presente:

	PRESENTE	FUTURO
A	24	n = ?
B	20	40

La suma en aspa da el mismo valor

$$20+n=24+40$$
$$n=44$$

∴ La edad de Ángel será 44 años

PROBLEMA 3 Hace 10 años él tenía la mitad de la edad que tendrá ella cuando él tenga 12 años más de los que ella tiene. Si ella nació 4 años después que el, ¿cuántos años tiene él?

Resolución: Ella nació 4 años después de él

⇨ Ella tiene 4 años menos que él

Hace 10 años

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
ÉL	$x-10$	x	$x-4+12$
ELLA		$x-4$	$2(x-10)$

La diferencia de edades permanece constante

Luego:
$$x-(x-4)=x-4+12-2(x-10)$$
$$x=24$$

∴ Él tiene 24 años

PROBLEMA 4 Paola tuvo su primer hijo a los 22 años, su segundo hijo a los 25 años y 5 años después a su tercer hijo. Si actualmente (2006) la suma de las edades de los 4 es 67 años, ¿En qué año nació Paola?

Resolución:

5 años → Dentro de x años

		NACIÓ 1er HIJO	NACIÓ 2do HIJO	NACIÓ 3er HIJO	2006
	Paola	22	25	30	30 + x
HIJOS	1er.	0	3	8	8 + x
	2do.		0	5	5 + x
	3er.			0	x

SUMA = 67

⇨ $30+x+8+x+5+x+x=67$
$$x=6$$

En el 2006 Paola tenía: $30+6=36$ años

∴ Nació en el año: $2006-36=1970$

PROBLEMA 5 Yo tengo el triple de la edad que tú tenias cuando yo tenía la edad que tú tienes, pero cuando tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será 56 años. ¿cuál es la suma de nuestras edades?

Resolución:

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
YO	y	3x	56 – 3x
TÚ	x	y	3x

SUMA = 56

Aplicando el criterio de sumas cruzadas:

- $y + y = x + 3x \rightarrow y = 2x$

- $3x + 3x = y + 56 - 3x$

$$9x - \underbrace{y}_{2x} = 56$$

$$7x = 56 \rightarrow x = 8$$

Luego: YO tengo: 3(8) = 24 años
TÚ tienes: 16 años

∴ La suma de nuestras edades es 24 + 16 = 40 años

PROBLEMA 6 Yo tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía el triple de la edad que tú tuviste cuando yo tuve la tercera parte de la edad que tengo. cuando tú tengas el doble de la edad que tengo, la suma de nuestras edades será 100 años. ¿Cuántos años tengo?

Resolución: En el texto nos dicen:

"... tú tenias ... tu tuviste ..."

Con esto entenderemos que hay 2 tiempos pasado.

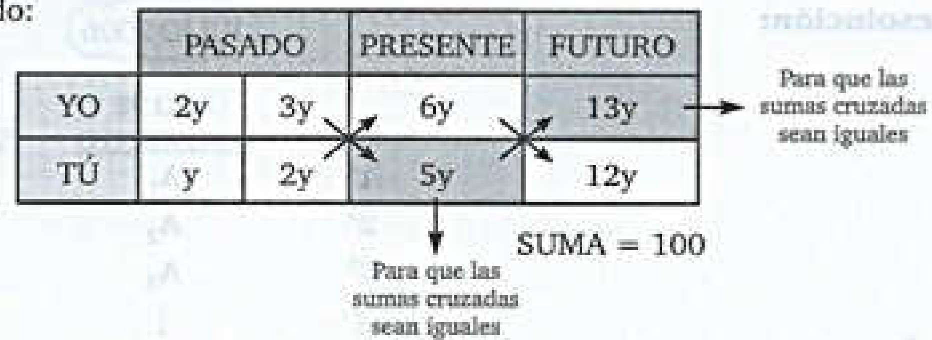
	PASADO		PRESENTE	FUTURO
YO	x	3y	3x	
TÚ	y	x		6x

SUMA = 100

Aplicando el criterio de sumas cruzadas

$$x + x = y + 3y \rightarrow x = 2y$$

Reemplazando:



	PASADO		PRESENTE	FUTURO
YO	2y	3y	6y	13y
TÚ	y	2y	5y	12y

Luego: $13y + 12y = 100 \rightarrow y = 4$

$\therefore$ Tengo: $6(4) = 24$ años

PROBLEMA 7 Cuando el nació yo tenía la edad que tú tienes que a su vez es la edad que él tendrá cuando tú tengas 16 años y yo tenga el triple de la edad que yo tenía cuando tú naciste. ¿Cuántos años tengo?

Resolución:

	ÉL NACIÓ	TÚ NACISTE	PRESENTE	FUTURO
YO	x	y		3y
TÚ		0	x	16
ÉL	0			x

- $y - 0 = 3y - 16 \rightarrow y = 8$
- $x - 0 = 3y - x$
  $2x = 3(8) \rightarrow x = 12$

Reemplazando:

	ÉL NACIÓ	TÚ NACISTE	PRESENTE	FUTURO
YO		8	( )	
TÚ		0	12	
ÉL				

¿? = 20

$\therefore$ Aplicando el criterio de sumas cruzadas yo tengo 20 años.

PROBLEMA 8 Cierto día del mes de julio del presente año (2006) en un aula de 45 alumnos, se sumó las edades de todos y luego se sumó los años de nacimiento de todos, se sumaron los resultados obtenidos en cada caso y el resultado final fue 90250. ¿Cuántas personas aún no han cumplido años hasta ese día?

Resolución:

JULIO 2006

	AÑO DE NACIMIENTO		EDAD
1°	A_1		e_1
2°	A_2		e_2
3°	A_3		e_3
⋮	⋮		⋮
45°	A_{45}		e_{45}
	S_A	+	S_e = 90250

NOTA "S"

Si una persona ya cumplió años

AÑO DE NACIM. + EDAD = AÑO ACTUAL

Vamos a suponer que todos ya cumplieron año:

	AÑO DE NACIMIENTO		EDAD	
1°	A_1	+	e_1	= 2006
2°	A_2	+	e_2	= 2006
3°	A_3	+	e_3	= 2006
⋮	⋮		⋮	⋮
45°	A_{45}	+	e_{45}	= 2006
				90270

Entre el resultado supuesto y el dato del problema hay una diferencia de $90270 - 90250 = 20$ esto significa que son 20 personas que aún no han cumplido años.

PROBLEMA 9 Un alumno nació en el año $\overline{19ab}$ y en el año 1980 tuvo "a + b" años. ¿En qué año cumplió "2a + b" años?

Resolución:

- Año de nacimiento: $\overline{19ab}$
- En 1980 tuvo: "a + b" años

$$1980 - (a + b) = \overline{19ab}$$
$$1980 - (a + b) = 1900 + 10a + b$$
$$80 = 11a + 2b$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$6 \quad 7$$
$$a = 6 \; ; \; b = 7$$

Luego:
- Año de nacimiento: 1967
- Cumplió $2a + b = 2(6) + 7 = 19$ años en el año: $1967 + 19 = 1986$

PROBLEMA 10 Leslie en el mes de enero sumó los años que tiene con todos los meses que ha vivido, obteniendo como resultado 230. ¿En qué mes nació Leslie?

Resolución:

EDAD = x años y meses

AÑOS QUE TIENE + MESES VIVIDOS

$x + 12x + y = 230$

$13x + y = 230$

$13x + y = 13(17) + 9$

$x = 17 \quad y = 9$

EDAD = 17 años 9 meses

- Leslie tiene 17 años 9 meses, entonces dentro de 3 meses cumplirá 18 años.
- Si estamos en enero dentro de 3 meses será Abril.

∴ Leslie nació en Abril

PROBLEMA 11 Cuando tú tengas lo que yo tengo, tendrás lo que él tenía cuando tú tenías la tercera parte de la edad que tienes y yo tenía la tercera parte de lo que el tiene. Si lo que él tiene es 5 años más de lo que tendré cuando tú tengas lo que ya te dije, ¿cuántos años tengo?

Resolución:

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
YO	z	x	3z – 5
TÚ	y	3y	x
ÉL	x	3z	

$x + x = z + 3z \rightarrow x = 2z$

Reemplazando:

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
YO	z	2z	3z – 5
TÚ	y	3y	2z
ÉL	2z	3z	

$$y + 3z = 2z + 3y \rightarrow z = 2y$$

Reemplazando:

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
YO	2y	4y	6y – 5
TÚ	y	3y	4y
ÉL	4y	6y	

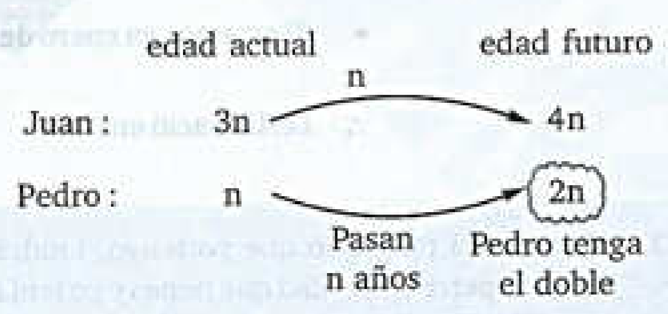
$$3y + 6y - 5 = 4y + 4y \rightarrow y = 5$$

$\therefore$ Tengo 4(5) = 20 años

PROBLEMA 12 Juan triplica en edad a Pedro. Cuando Pedro tenga el doble de la edad que tiene, ¿cuál será la relación entre las edades de Juan y Pedro?

ADMISIÓN UNMSM 2005 - II

Resolución: Del enunciado:

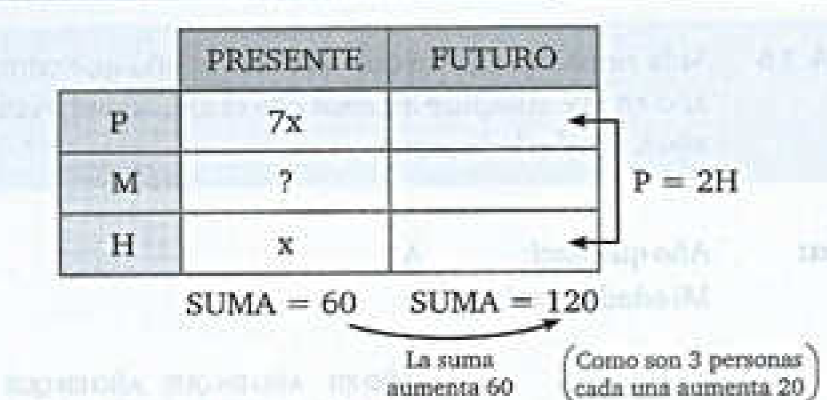


Entonces: La relación de edades será:

$$\therefore \frac{\text{Juan}}{\text{Pedro}} = \frac{4n}{2n} = \frac{2}{1}$$

PROBLEMA 13 El padre, la madre y la hija están reunidos. La hija preguntó por la edad de su madre y su padre le dijo: "Nuestras 3 edades suman 60 años. Como yo tengo 7 veces la edad que tú tienes puede decirse que cuando sea el doble de viejo que tú, nuestras 3 edades sumaran el doble de lo que suman ahora". ¿Qué edad tiene la madre?

Resolución:



	PRESENTE	FUTURO
P	7x	
M	?	
H	x	

P = 2H

SUMA = 60 → SUMA = 120

La suma aumenta 60 (Como son 3 personas cada una aumenta 20)

	PRESENTE	FUTURO
P	7x	7x + 20
M	?	
H	x	x + 20

P = 2H

$$7x + 20 = 2(x + 20)$$
$$x = 4$$

Reemplazando en el presente:

	PRESENTE
P	28
M	? = 32
H	4

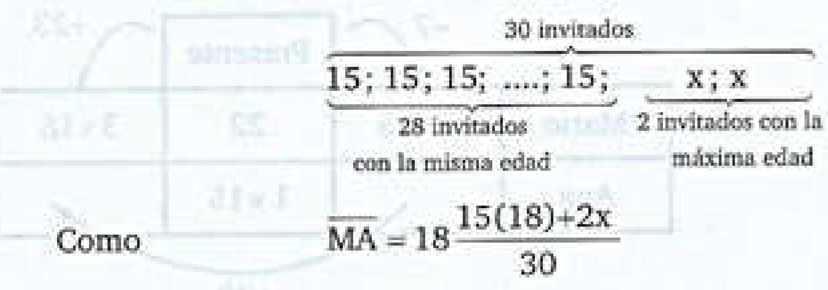
SUMA = 60

∴ La madre tiene 32 años

PROBLEMA 14 De treinta invitados, ninguno tiene menos de 15 años. ¿Cuál será la máxima edad que 2 de ellos pueden tener para que el promedio de edades (considerando las edades de todos los invitados) sea 18 años?

ADMISIÓN UNMSM 2009 - I

Resolución: Sea x la máxima edad que puede tener 2 personas.



Como $\overline{MA} = 18 \frac{15(18)+2x}{30}$

Resolviendo: $x = 60$

∴ La máxima edad es 60.

PROBLEMA 15 Si la suma del año en que nací con el año que cumplí 18 años menos la suma del año en que cumpliré 30 años con el año actual, resultara mi edad actual menos 52 años. ¿Qué edad tengo?

Resolución:

Año que nací: A

Mi edad actual: x

$$\underbrace{A}_{\text{AÑO EN QUE NACÍ}} + \underbrace{A+18}_{\text{AÑO EN QUE CUMPLÍ 18}} - (\underbrace{A+30}_{\text{AÑO EN QUE CUMPLIRÉ 30}} + \underbrace{A+x}_{\text{AÑO ACTUAL}}) = x - 52$$

Resolviendo: $x = 20$

∴ Tengo 20 años

PROBLEMA 16 Si Mario tuviera 29 años más, su edad sería el triple de la que tiene Ana; y si tuviera 7 años menos tendría la misma edad que Ana.
¿Cuál es la suma de las edades actuales de Mario y Ana?

ADMISIÓN UNMSM 2009 - I

Resolución:

De los datos:

Si Mario tuviera 23 años más, su edad sería el triple de la que tiene Ana.

		Presente	(+23)
Mario			3
Ana		1	

Si tuviera 7 años menos, tendría la misma edad que Ana.

	(−7)	Presente	(+23)
Mario	1×15	22	3×15
Ana		1×15	

+30

∴ Las edades actuales son 22 y 15 años.

PROBLEMA 17 La suma de las edades de Ángel y Brenda, cuando nació César su primer hijo, era la mitad de su suma actual. Si actualmente César tiene 20 años, ¿Qué edad tendrá César cuando las edades de los tres sumen 130 años?

Resolución:

	NACIÓ CÉSAR	PRESENTE	FUTURO
Suma de las edades de A y B	S	2S	
C	0	20	x

SUMA = 130

$\Rightarrow$ $S + 40 = 2S \rightarrow S = 40$

Reemplazando:

	NACIÓ CÉSAR	PRESENTE	FUTURO
Suma de las edades de A y B	40	80	
C	0	20	x

SUMA = 100 SUMA = 130

Aumenta 30 años (Como es la suma de tres personas, cada una aumenta 10)

$\Rightarrow$ $20 + 10 = x \rightarrow x = 30$

$\therefore$ César tendrá 30 años

PROBLEMA 18 La suma de las edades de un hombre y su esposa es 6 veces la suma de las edades de sus hijos. Hace 2 años, la suma de las edades de los esposos era 10 veces la de los hijos y dentro de 6 años, la suma de las edades de los esposos será 3 veces la de los hijos. ¿Cuántos hijos tienen?

Resolución: Sea "n" el número de hijos.

Hace 2 años — Dentro de 6 años

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Suma de las edades de los esposos	6S – 4	6S	6S + 12
Suma de las edades de los hijos	S – 2n	S	S + 6n

$6S - 4 = 10(S - 2n)$
$S = 5n - 1$

$6S + 12 = 3(S + 6n)$
$S = 6n - 4$

$$\Rightarrow 6n-4=5n-1$$
$$n=3$$

$\therefore$ Tienen 3 hijos

PROBLEMA 19 Le preguntaron a Ángel por su edad y él contestó: "Mi edad, más 2 veces mi edad, más 3 veces mi edad y así sucesivamente hasta tantas veces mi edad como edad tengo, suman 4200. ¿Cuál es la edad de Ángel?

Resolución: Edad de Ángel: x años

$$\Rightarrow x+2x+3x+....+x(x)=4200$$
$$x(1+2+3+...+x)=4200$$
$$x\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)=4200$$
$$x^2(x+1)=8400$$
$$x^2(x+1)=20^2\times 21$$
$$x=20$$

$\therefore$ Ángel tiene 20 años

PROBLEMA 20 Al preguntarle por su edad a Silvia, ella contestó: "Mi edad es la suma de todos aquellos números naturales tales que el cuadrado, de su quíntuplo disminuido en 4, es mayor que 16 pero menor que 900. ¿Cuál es la edad de Silvia?

Resolución: Digamos que sea N los números naturales:

$$16<(5N-4)^2<900$$
$$4< \ 5N-4 \ >30$$
$$8> \ 5N \ <34$$
$$\frac{8}{5}< \ N \ <\frac{34}{5}$$
$$1{,}6< \ N \ <6{,}8$$

Como N es un número natural:

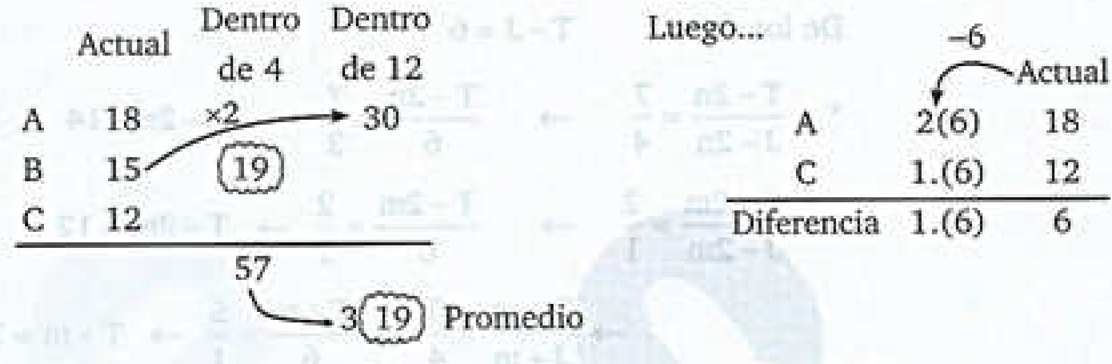
$$N=2,3,4,5,6$$

De acuerdo a lo que dijo Silvia su edad es:

$$2+3+4+5+6=20 \text{ años}$$

PROBLEMA 21 Las edades de tres hermanos están en progresión aritmética. Dentro de 4 años la suma de las edades será de 57 años y dentro de 12 años, la edad del mayor será igual al doble de la edad que tienen el segundo. ¿Hace cuántos años la edad del mayor fue el doble de la edad del menor?

Resolución:



$\therefore$ Hace 6 años.

PROBLEMA 22 En el siglo XIX, Geovani, una persona nacida en dicho siglo, decía: "Mi edad es igual a la suma de cifras del año de mi nacimiento y del año actual en conjunto". ¿Cuántas personas más como mínimo, además de la mencionada, y de edades diferentes, podrían haber afirmado lo mismo?

Resolución:

Año Act. $\overline{18cd}$; Año Nac $\overline{18ab}$; Edad $\overbrace{1+b+c+d+1+8+a+b}$

$$9c-11a=18+2b$$

Dándole forma y evaluando: $9c=2(a+b)+9(a+2)$

$$c=\frac{2(a+b)}{9}+(a+2)$$

Si: $\boxed{a=b=0} \rightarrow \boxed{c=a+2}$; $d=1;\ 2;\ 3;.....;9$ } 10 edades posibles

Si: $\boxed{a+b=9} \rightarrow \boxed{c=a+4}$

a	b
0	9
1	8
2	7
3	6
4	5
5	4

6 valores

$\underbrace{d=1;\ 2;\ 3;.....;9}_{\text{10 valores}}$ } 60 edades posibles

NOTA "S"

a+b no puede ser 18 ya que todas las cifras son de un dígito.

$\therefore$ $70-1=69$ personas.

PROBLEMA 23 Toño nació 6 años antes que Juan hace "2n" años sus edades eran como 7 a 4 y hace "2m" años eran como 2 a 1; dentro de "m" años serán como 5 a 4. En qué relación estarán dentro de 2(n + m) años.

Resolución: T : Toño J : Juan

De los datos : $T - J = 6$

$$* \ \frac{T-2n}{J-2n} = \frac{7}{4} \rightarrow \frac{T-2n}{6} = \frac{7}{3} \rightarrow T-2n = 14$$

$$* \ \frac{T-2m}{J-2m} = \frac{2}{1} \rightarrow \frac{T-2m}{6} = \frac{2}{1} \rightarrow T-2m = 12$$

$$\rightarrow \frac{T+m}{J+m} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{T+m}{6} = \frac{5}{1} \rightarrow T+m = 30$$

$$\rightarrow T = 24;\ J = 18;\ m = 6;\ n = 5$$

Piden: $\therefore \dfrac{T+2(m+n)}{J+2(n+m)} = \dfrac{23}{20}$

PROBLEMA 24 La edad de un padre es un número de dos cifras y la edad del hijo tiene las mismas cifras pero en orden inverso. Además la edad de cada uno de sus dos nietos (del padre) es igual a cada una de las dos cifras. Si el promedio de edades del padre e hijo es 33, ¿cuál es el promedio de las cuatro edades?

Resolución: Padre: $\overline{ab}$ años

Hijo: $\overline{ba}$ años

1er nieto: a años

2do nieto: b años

$$\text{Prom (Padre e hijo)} = \frac{\overline{ab}+\overline{ba}}{2} = 33$$

$$11(a+b) = 66$$

$$a+b = 6$$

$$\text{Prom (de los 4)} = \frac{\overline{ab}+\overline{ba}+a+b}{4}$$

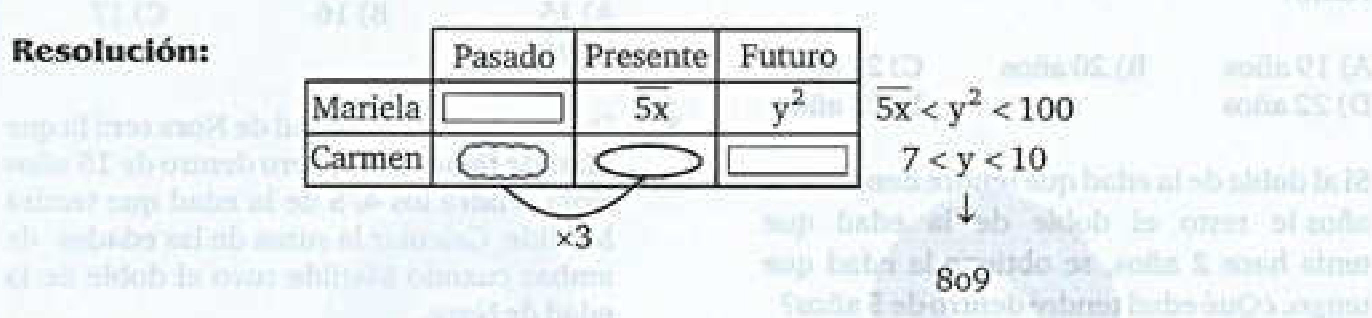
$$\text{Prom (de los 4)} = \frac{12(a+b)}{4}$$

$$\text{Prom (de los 4)} = \frac{12(6)}{4} = 18$$

$\therefore$ Promedio de las cuatro edades = 18

PROBLEMA 25 Mariela tiene $\overline{5x}$ años y su edad es el triple de la edad que Carmen tenía, cuando Mariela tenía tantos años como Carmen tendría cuando Mariela tenga y^2 años y aún no sea centenaria. Carmen tiene más de 28 años. ¿Cuántos años tendría esta ahora si hubiera nacido x años después?

Resolución:



	Pasado	Presente	Futuro
Mariela	▭	$\overline{5x}$	y^2
Carmen	(nube)	◯	▭

×3

$\overline{5x} < y^2 < 100$

$7 < y < 10$

↓

8o9

Nota que : $\overline{5x} = \overset{o}{3} \rightarrow$ Valores posibles para x {1; 4; 7}

Además : $2▭ = (nube) + y^2$

Luego:

Si x = 1   49   17 9^2 necesariamente impar   ◯ = 19 No cumple

Si x = 4   41   18 8^2 necesariamente par   ◯ = 19 Si cumple

Si Carmen hubiera nacido 4 años después tendría 4 años menos de edad; es decir 27 años.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. A Paolo le preguntan por su edad y responde: "Si al doble de mi edad se le quitan 12 años, se obtiene lo que me falta para tener 45 años". ¿Cuál es la edad de Paolo?

A) 19 años B) 20 años C) 21 años
D) 22 años E) 23 años

2. Si al doble de la edad que tendré dentro de 2 años le resto el doble de la edad que tenía hace 2 años, se obtiene la edad que tengo. ¿Qué edad tendré dentro de 5 años?

A) 12 B) 14 C) 13
D) 15 E) 18

3. Los 5/7 de mi edad menos 4 años es igual a la edad que tenía hace 12 años. ¿Cuál era mi edad hace 12 años?

A) 14 años B) 18 años C) 16 años
D) 20 años E) 22 años

4. La edad que tenía hace a años es a lo que tendré dentro de a años como 2 es a 9. ¿Qué edad tendré dentro de 2a años?

A) 24a/7 años B) 25a/7 años
C) 23a/7 años
D) 22a/7 años E) 26a/7 años

5. Si 6 veces tu edad es igual a 5 veces mi edad y hace 12 años, 2 veces tu edad era la mía, ¿cuántos años tengo?

A) 15 años B) 18 años C) 20 años
D) 16 años E) 21 años

6. La edad actual de Luis y la de Nino son entre sí como 9 es a 8. Cuando Nino tenga la edad que ahora tiene Luis, éste tendrá el doble de la edad que tenía Nino hace 18 años. Halle la diferencia de sus edades.

A) 5 años B) 6 años C) 7 años
D) 9 años E) 11 años

7. Hace n años tuve la raíz cuadrada de la edad que tendré dentro de 2n años. Si tengo más de 10 años pero menos de 20 años ¿cuántos años tengo?

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

8. Dentro de 8 años la edad de Nora será la que Matilde tiene ahora, pero dentro de 15 años Nora tendrá los 4/5 de la edad que tendrá Matilde. Calcular la suma de las edades de ambas cuando Matilde tuvo el doble de la edad de Nora.

A) 17 B) 24 C) 25
D) 32 E) 40

9. Hace 10 años una madre tenía 10 veces la edad de su hija. Si actualmente la suma de la edad de la madre con el doble de la edad de la hija es igual a 66 años. ¿Cuál es la diferencia de sus edades?

A) 30 B) 20 C) 25
D) 37 E) 27

10. El señor Eduardo tuvo un hijo a los 32 años y un nieto 18 años más tarde, actualmente el nieto tiene 22 años, y el abuelo afirma tener 60 años y el hijo 38 años. Halle el producto de los años que ocultan ambos.

A) 26 B) 24 C) 22
D) 20 E) 18

11. Estando reunidas Ana, Betty y Carmen se escucha la siguiente conversación:

- Betty: Mi edad es la misma que tuvo Ana cuando Carmen nació.
- Ana: Así es, y en ese entonces nuestras edades sumaban 30 años.
- Carmen: Mi edad actual es la misma que tuvo Betty cuando yo nací?

¿Cuál será la edad que tendrá Ana cuando Carmen tenga la edad que tiene Betty?

A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

12. Hace a+b+c años tu edad era a+b veces la mía. Cuando tú tengas b+c veces la edad que yo tendré en ese entonces habrá transcurrido c+b-a años a partir de hoy. Entonces yo tenía en años:

A) $2(b+c)/(b-c)$ B) $2(a+b)(b+c)$
C) $2(a+b)/c$
D) 2abc E) $2(b+c)(b+c-1)/(a-c)$

13. Hace 5 años la edad de Américo se diferenciaba de la edad de su padre en el doble de su edad y de la edad de su hermano menor en la mitad de su edad. Si dentro de 7 años su hermano tendrá lo que tiene Américo, calcular la edad que tuvo el padre cuando Américo nació.

A) 28 años B) 25 años C) 30 años
D) 24 años E) 27 años

14. La suma de las edades de Antonio y Beatriz, cuando nació César su primer hijo, era la mitad de su suma actual. Si actualmente César tiene 20 años, ¿Qué edad tenía César cuando las edades de los tres sumaban 70 años?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 20

15. Cuando César tenga 6 veces la edad que tiene ahora la suma de las edades de sus padres será el doble de lo que suman ahora. Si cuando César nació la suma de las edades de sus padres fue 40 años, ¿Cuál será la suma de las edades de sus padres cuando César cumpla el doble de lo que tiene ahora?

A) 50 B) 60 C) 70
D) 80 E) 90

16. Una niña le pregunta a su padre por la edad de su hermano, y el padre le responde: "Cuando él nació yo tenía 5/3 de la edad que tú tienes y tu edad es la que él tendrá cuando tú tengas 25 años y yo tenga 4/3 de la edad que tengo". ¿Cuántos años tiene el hermano?

A) 5 años B) 6 años C) 7 años
D) 8 años E) 9 años

17. Les preguntan por sus edades a una madre, su hijo e hija y responden:
- Madre: Nuestras tres edades suman 100 años.
- Hijo: Cuando yo tenía la edad que tiene mi hermana nuestras tres edades sumaban 70 años.
- Hija: Cuando yo tenga los años que mamá tenía, cuando mi hermano tenía los años que dijo, nuestras tres edades sumarán 160 años.
- Mamá: Si yo tuviera los años que tenía, tengo y tendré, tendría 160 años.

¿Qué edad tiene la hija?

A) 18 B) 20 C) 22
D) 24 E) 25

18. Carlitos le preguntó a su padre por su edad, y éste le contestó: "Hoy tengo el cuadrado de la edad que tuve cuando mi edad fue la tercera parte de la edad que tenía hace 18 años". Si Carlitos nació cuando su padre tenía 24 años, ¿cuántos años tiene Carlitos?

A) 10 B) 11 C) 12
D) 9 E) 8

19. Un profesor propuso el siguiente problema a sus alumnos: "Actualmente (2003) tengo el doble de la edad que tuve 11 años después de aquel año en el cual mi edad era la octava parte del número formado por las dos últimas cifras de dicho año. ¿Cuál es mi edad?"

A) 36 años B) 38 años C) 40 años
D) 42 años E) 44 años

20. "A" le dice a "B" : "Mi edad es 3/4 de la tuya además yo tengo la edad que tú tenías cuando mi padre tenía la edad que tiene tu padre. Cuando tu padre tenga la edad que tiene mi padre, mi edad será la mitad de la edad que tu padre tenía hace 10 años y tu edad será la mitad de la que mi padre tenía hace 5 años". Hallar la suma de las edades de "A" y "B".

A) 35 años B) 42 años C) 28 años
D) 21 años E) 33 años

21. Laura al ser interrogada por su edad responde:"Si al año que cumplí 14 años le suman el año que cumpliré 23 años y si a este resultado le restan la suma del año en que nací con el año actual obtendrán 19". ¿Cuál es la edad de Laura?

A) 18 años B) 23 años C) 19 años
D) 16 años E) 22 años

22. Una persona nació en el año $\overline{19ab}$ y en el año $\overline{19ba}$ cumplió $b^2 - a^2$ años. Halle su edad actual si es mayor de 70 años y menor de 80 años. El año actual es 1997.

A) 71 B) 42 C) 79
D) 60 E) 52

23. Una persona nació el siglo pasado. ¿En qué año cumplió una edad igual a la raíz cuadrada del año de su nacimiento?(año actual: 2002)

A) 1980 B) 1978 C) 1982
D) 1984 E) 1976

24. Un hombre nacido en la primera mitad del siglo XIX, tuvo "m" años en el año "m^2". ¿En qué año dicha persona cumplió 20 años?

A) 1806 B) 1820 C) 1826
D) 1830 E) 1836

25. La edad de un padre sobrepasa en 5 años a la suma de las edades de sus 3 hijos. Dentro de 10 años, él tendrá el doble de la edad de su hijo mayor; dentro de 20 años, tendrá el doble de la edad del segundo, y dentro de 30 años, tendrá el doble de la edad del tercero. Halle la edad del padre.

A) 60 B) 70 C) 65
D) 50 E) 40

26. Paola en el mes de noviembre sumó a los años que tiene todos los meses que ha vivido, obteniendo como resultado 270. ¿En qué mes nació Leslie?

A) febrero B) marzo C) abril
D) enero E) octubre

27. Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, pero cuando tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será 54 años. ¿Cuál es la suma de nuestras edades actuales?

A) 42 B) 46 C) 48
D) 50 E) 54

28. Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tuviste cuando yo nací. Cuando tú tengas el doble de la edad que tengo la suma de nuestras edades será 75 años. ¿Cuántos años tengo?

A) 25 B) 20 C) 16
D)18 E) 24

29. Actualmente nuestras edades suman 40 años, yo tengo la edad que tú tenías cuando yo tenía la tercera parte de la edad que tengo ahora. ¿Cuál será la relación de nuestras edades dentro de 10 años?

A) 3/5 B) 5/6 C) 5/7
D) 3/7 E) 5/8

30. Mi edad es 4 años menor que la edad que tú tenías cuando yo tenía 8 años menos de la edad que tú tienes; y cuando tú tengas el doble de la edad que yo tengo nuestras edades sumaran 82 años. ¿Qué edad tengo?

A) 26 B) 24 C) 22
D) 20 E) 25

31. Mi tatarabuelo que nació en la primera mitad del siglo XIX, tuvo "x" años en el año "x^2". 126 años después del año en que él nació yo tenía tantos años como expresan las 2 últimas cifras del año de mi nacimiento. Al poner en conocimiento a mi profesor de lo que sucedía con mi edad, él dijo que con su edad ocurría lo mismo. ¿Qué edad tenía mi profesor cuando yo nací?

A) 50 años B) 48 años C) 44 años
D) 45 años E) 42 años

32. En 1978 tuve tantos años como el doble del número formado por las 2 últimas cifras del año de mi nacimiento, lo mismo ocurrió con mi abuelita el año pasado. Hallar la suma de cifras de nuestros años de nacimiento.

A) 33 B) 35 C) 37
D) 39 E) 41

33. Al finalizar el año 1994 la edad de Walter era la mitad de la edad de su abuela. La suma de los años en que nacieron los dos es 3838. ¿Cuántos años tuvo Walter al finalizar el año 1999?

A) 48 B) 49 C) 44
D) 55 E) 53

34. Estamos en el año 2002. Yo tengo 2 hijos menores de edad . El cubo de la edad de mi hijo sumado al cuadrado de la edad de mi hija da el año en el cual yo nací, lo cual ocurrió en la segunda mitad del siglo pasado. Mi esposa es 5 años menor que yo. ¿Qué edad tenemos cada uno de nosotros? Dar como respuesta la suma.

A) 120 B) 118 C) 122
D) 110 E) 115

35. En el mes de marzo de este año 2004, en un aula de 30 alumnos se sumó las edades de todos y luego se sumó los años de nacimiento de todos, se sumaron los resultados obtenidos en cada caso y el resultado final fue un número en el cual, las 2 últimas cifras son significativas y forman un cuadrado perfecto. ¿Cuántos alumnos ya habían cumplido años hasta ese momento?

A) 4 B) 16 C) 14
D) 26 E) 10

36. Cuando Leslie nació las edades de su papá y su mamá estaban en la relación de 4 a 3. Cuando Leslie tuvo la tercera parte de la edad de su mamá su papá tuvo la edad que tiene ahora su mamá. Si actualmente las edades de Leslie y su papá suman 54 años, ¿cuántos años tiene Leslie?

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 20

37. Los años bisiestos no tienen aniversarios anuales, el siguiente problema se planteo el 29 de febrero de 1896. Laura dijo: "Mario sabes bien que tú tenías el triple de la edad que yo tenía cuando nos conocimos, y que yo tengo ahora exactamente la misma edad que tú tenías en ese entonces, y que cuando yo tenga 3 veces mi edad actual nuestras edades sumaran 100". ¿Cuál es la edad de Mario el próximo 29 de febrero?
Obs: Cada uno cumple años en enero

A) 21 B) 24 C) 16
D) 18 E) 29

38. En una familia, la suma de las edades de los padres y la suma de las edades de sus hijos están en la relación de 10 a 9. Hace 4 años la suma de las edades de los padres era 2 veces la suma de las edades de sus hijos. Dentro de 5 años la suma de los padres y la suma de los hijos estarán en la relación de 4 a 5. ¿Cuántos hijos son en dicha familia?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

39. Un abuelo, su esposa, su hijo y su nieto tienen juntos 180 años. El abuelo dice: "Mi hijo tiene tantas semanas como mi nieto días ; mi esposa tiene tantos meses como la décima parte de los días que tiene mi hijo y yo tengo tantos años como mi nieto meses". La edad del abuelo es:
(considere 1 mes = 30 días)

A) 60 años B) 70 años C) 75 años
D) 72 años E) 84 años

40. La edad de Pedro sumada a la de su hija Rocío es igual a 100 años. La edad de Pedro multiplicada por 4 y dividida por 9 da la edad de Rocío. ¿Cuál es la edad de Rocío?
(considere 1 año = 52 semanas)

A) 30 años 40 semanas
B) 30 años 45 semanas
C) 35 años 10 semanas
D) 25 años 30 semanas
E) 35 años 40 semanas

41. Las cifras de las edades de Ángel y su hijo Juan son las mismas pero en orden invertido. Hace 6 años, Ángel tenía el doble de la edad de su hijo. ¿Dentro de cuántos años Juan cumplirá 40 años?

A) 16 B) 14 C) 15
D) 17 E) 12

42. Cuando entre los tres teníamos 63 años, tú tenías lo que yo tengo, yo tenía lo que Carlos tiene y él tenía la tercera parte de la edad que tú tendrás cuando yo tenga lo que tú tienes y Carlos tenga lo que yo tengo. ¿Cuántos años tengo ahora?

A) 35 B) 28 C) 21
D) 24 E) 30

43. Pedro le dice a Juan: "Dentro de 2 años yo tendré el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tendrás en ese entonces". Si actualmente la suma de sus edades es 21 años, ¿qué edad tendrá Pedro dentro de 5 años?

A) 18 años B) 16 años C) 20 años
D) 22 años E) 24 años

44. Tú tienes la mitad menos 5 años de la edad que yo tendré cuando tú tengas lo que yo tenía cuando tú tenías la cuarta parte de la edad que yo tuviese si tuviera 10 años más de los que yo tendré. Pero si yo tuviese 10 años más de los que tendré y tú los que te he dicho que tienes, entonces entre ambos tendríamos 110 años. ¿Qué edad tengo?

A) 50 años B) 55 años C) 60 años
D) 40 años E) 45 años

45. Yo tenía lo que tu tienes que a su vez es la edad que él tendrá cuando tú tengas 20 años y yo el doble de lo que tienes. Si él tiene la edad que yo tenía cuando tú naciste y en ese entonces mi edad era 5 años menos de tu edad actual. ¿Qué edad tienes tú?

A) 5 años B) 10 años C) 15 años
D) 18 años E) 20 años

46. Cuando yo tenía la cuarta parte de la edad que tú tienes él tenía en cambio la sexta parte y tú tenías 4 años menos de la edad que actualmente tiene él. Pero cuando yo tenga el doble de mi edad él tendrá 2 años menos de mi edad de ese entonces. ¿Qué edad tuve yo cuando tu edad era el doble de lo que tenía él en ese entonces?

A) 10 años B) 12 años C) 14 años
D) 15 años E) 16 años

47. En el mes de marzo de este año (2004) en un aula de 45 alumnos se sumó las edades de todos y luego se sumó los años de nacimiento de todos, se sumaron los resultados obtenidos en cada caso y el resultado final fue 90152. ¿Cuántas personas ya habían cumplido años hasta ese momento?

A) 12 B) 17 C) 14
D) 15 E) 16

48. El promedio de la edad de 4 personas es K años. ¿Cuál es la edad mínima que puede tener cualquiera de ellos, si ninguno tiene mas de P años?

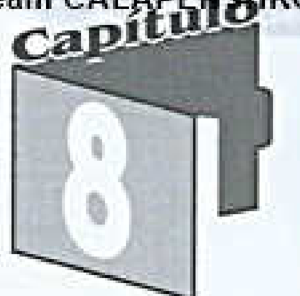
A) 4K – 3P B) 3K – 4P C) 8K – 3P
D) $\frac{3}{2}(P-K)$ E) $\frac{2}{3}(K-P)$

49. Brenda nació 8 años antes que Ángel. Brenda dice: "Hace n años la relación de nuestras edades era de 7 a 5". Ángel responde: "Pero hace m– n años era de 7 a 11. Pilar replica: " Dentro de n años será de 23 a 19". ¿En qué relación estarán sus edades dentro de m + n + 2 años?

A) 6 a 4 B) 7 a 6 C) 8 a 7
D) 9 a 8 E) 10 a 9

50. Si hubiera nacido 3 años antes del año que nací, mi cumpleaños número 24 caería en un año bisiesto. Si mi hermano mayor nació en 1979 y mi hermana menor en 1986, ¿en qué año nací yo?

A) 1981 B) 1982 C) 1983
D) 1984 E) 1985



Problemas sobre Móviles

CAPACIDADES

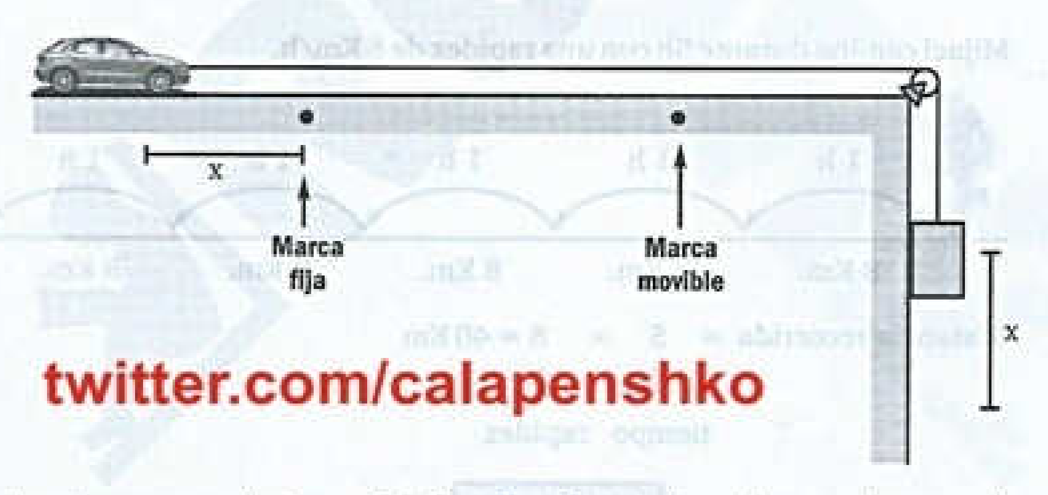
- Entiende las leyes del movimiento rectilíneo uniforme (MRU).
- Utiliza formas prácticas de resolución para problemas sobre MRU.
- Comprende el marco teórico necesario que sustente los métodos prácticos empleados.

Muchas de las fórmulas que hoy conocemos tuvieron su demostración experimentalmente. La enseñanza de la física es la experimentación por los alumnos de los fenómenos que ellos ven en la realidad, verificando lo que el profesor desarrolla en la clase.

El movimiento rectilíneo uniforme es el movimiento que realiza un móvil en línea recta y cuya rapidez no sufre variación durante su recorrido.

Experimentalmente podemos generar dicho movimiento de la siguiente manera: Disponemos de un riel horizontal por el que se mueve el carrito, una regla adosada al riel, y un cronómetro con dos dispositivos: uno que lo pone en marcha y otro que lo para.

Aceleramos el carrito, mediante una cuerda que pasa por una polea situada en el extremo derecho de una regla. Una pesa cuelga de la cuerda.



Cuando el carrito pasa por el origen, se deja de acelerar, haciendo que la pesa se detenga sobre un tope. La cuerda deja de actuar sobre el carrito, desde este momento el carrito se mueve con velocidad constante.

Cambiando la pesa cambiamos la fuerza sobre el carrito y su aceleración durante el trayecto que va desde su posición inicial actual hasta el origen, por tanto, se modifica la velocidad final justo cuando pasa por el origen, que es a su vez la velocidad constante con que realiza el resto del trayecto.

* El cronómetro se pone en marcha cuando el carrito pasa por la flecha que marca el origen de la regla ↑.
* El cronómetro se para cundo el carrito pasa por la segunda flecha ↑.
  De este modo, el cronómetro mide el tiempo que tarda el móvil en desplazarse entre las dos flechas.
  La flecha que marca el origen está fija, no se puede cambiar.
  La segunda flecha se puede desplazar a lo largo de la regla para tomar nuevas mediciones y comparar los resultados.

PROBLEMAS SOBRE MÓVILES

CONCEPTOS PREVIOS

* Móvil, es todo cuerpo o partícula que está en movimiento.
Se dice que un cuerpo está en movimiento relativo a otro, cuando su posición respecto al otro cambia con el tiempo. Si la posición no cambia con el tiempo se dice que está en reposo relativo.

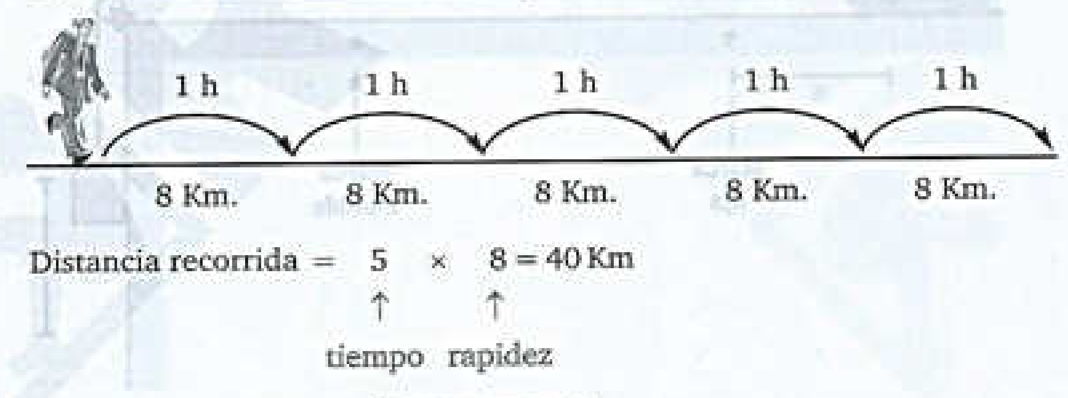
* Trayectoria, es la línea recta o curva que describe el móvil en su movimiento.

* Desplazamiento, es el vector que une el punto de partida con el punto de llegada. El módulo del desplazamiento se denomina distancia.

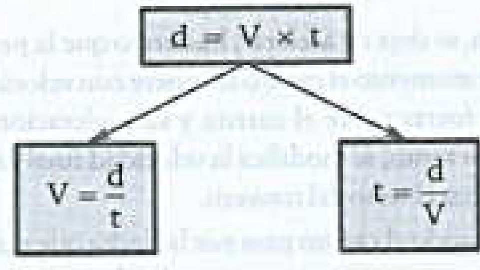
* Velocidad ($\overline{V}$), es aquella magnitud vectorial, cuyo módulo (V) nos indica la rapidez con que se mueve el móvil. Cuando la rapidez es constante se considera el movimiento como uniforme.
Por ejemplo, si un móvil recorre una trayectoria con una rapidez constante de 10 m/s, significa que en cada segundo recorre 10 m.

En el presente capítulo estudiaremos solo aquellos problemas basados en el movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo: Mijael camina durante 5h con una rapidez de 8 Km/h.



En general: $d = V \times t$



Donde: d: recorrido
V: rapidez
t: tiempo

Ejemplo: Un móvil viaja con rapidez constante de 72 Km/h. ¿Qué distancia recorrerá en 10 s?

Resolución: Antes de aplicar: $e = V \times t$

Debemos observar que la rapidez está en Km/h y el tiempo está en segundos, así que debemos cambiar la rapidez a m/s.

Recuerda: 1 Km = 1000 m.
1 h = 3600 s.

Entonces: $72\frac{Km}{h} = 72 \times \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 72 \times \frac{5}{18}\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s}$

Ahora si podemos hallar la distancia (e) que recorrerá:

$e = V \times t$

$e = 20\frac{m}{s} \times 10\ s = 200\ m$

NOTA

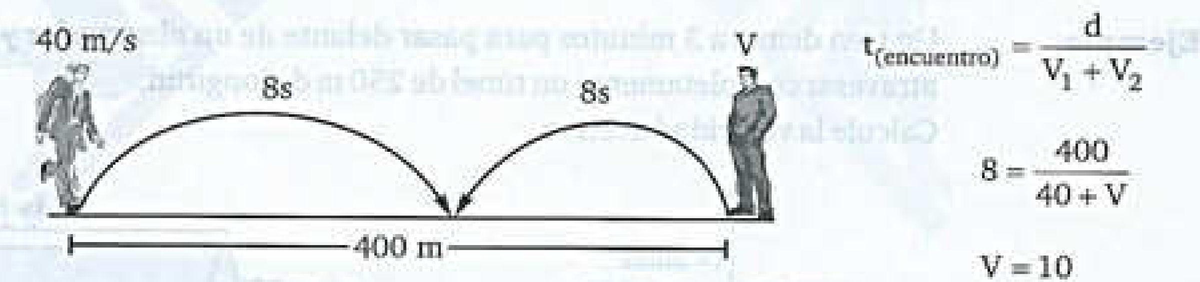
Para convertir $\frac{Km}{h}$ a $\frac{m}{s}$ debemos multiplicar por $\frac{5}{18}$, así: $V\frac{Km}{h} = \frac{5}{18}V\frac{m}{s}$

De la misma forma para convertir $\frac{m}{s}$ a $\frac{Km}{h}$; se multiplican por $\frac{18}{5}$.

TIEMPO DE ENCUENTRO

Ejemplo: Dos personas están separadas 400 m. Si parten al mismo tiempo, uno de ellos tiene rapidez 40 m/s y se encuentran al cabo de 8 segundos. ¿Cuál es la rapidez del otro?

Resolución:



$t_{(encuentro)} = \frac{d}{V_1 + V_2}$

$8 = \frac{400}{40 + V}$

$V = 10$

∴ La rapidez del otro es 10 m/s.

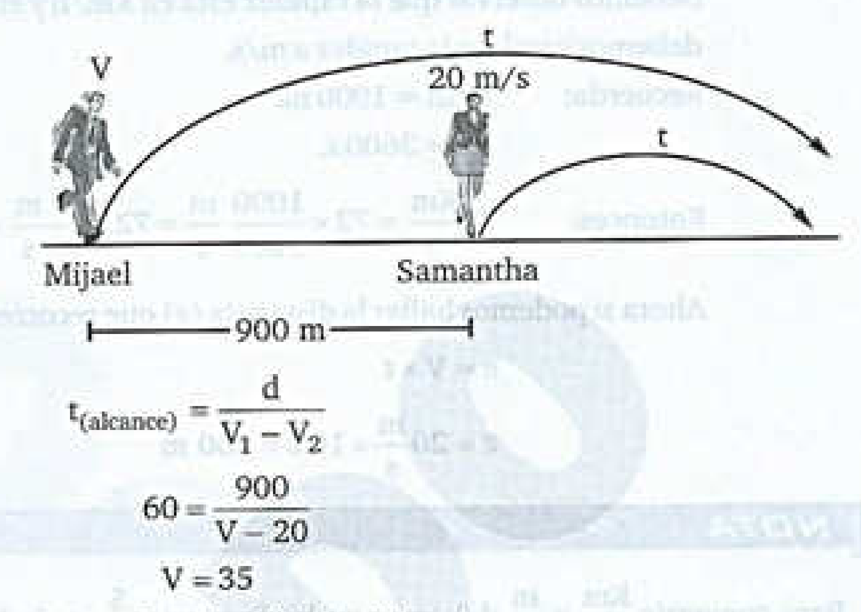
El tiempo de encuentro es 24 s.

En general: $t_{(encuentro)} = \frac{\text{distancia que separa a los móviles}}{V_1 + V_2}$

TIEMPO DE ALCANCE

Ejemplo: Mijael va detrás de Samantha que le lleva una ventaja de 900 m. Si Samantha corre a 20 m/s y Mijael la alcanza en 60 s, ¿con qué rapidez corre Mijael?

Resolución:



$$t_{(alcance)} = \frac{d}{V_1 - V_2}$$

$$60 = \frac{900}{V - 20}$$

$$V = 35$$

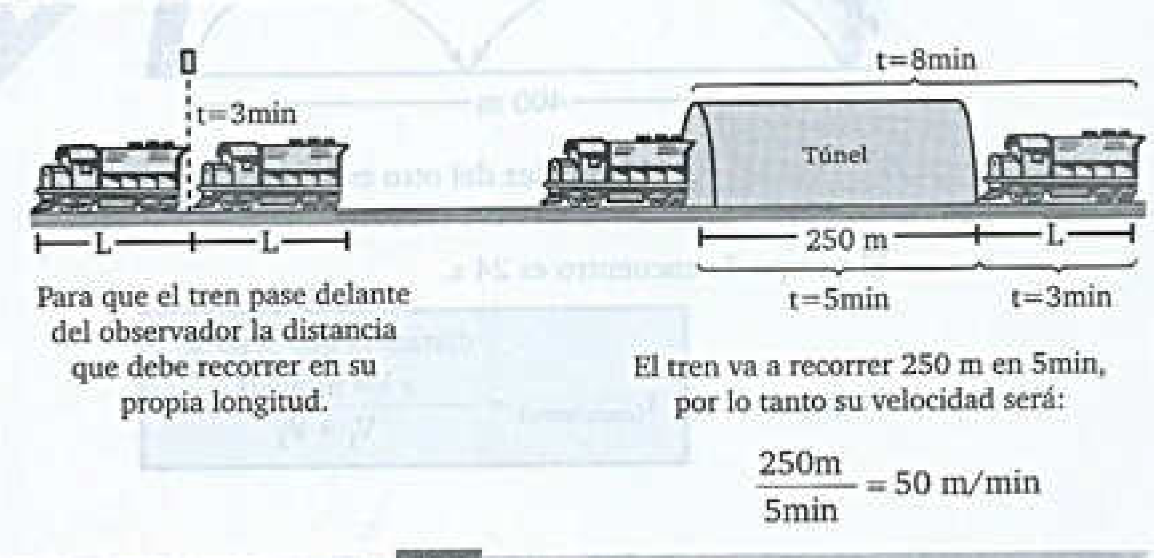
$\therefore$ La rapidez de Mijael es 35 m/s.

En general:

$$t_{(alcance)} = \frac{\text{distancia que separa a los móviles}}{V_1 - V_2} \qquad V_1 > V_2$$

PARA TRENES

Ejemplo: Un tren demora 3 minutos para pasar delante de un observador y 8 minutos para atravesar completamente un túnel de 250 m de longitud.
Calcule la velocidad del tren.



Para que el tren pase delante del observador la distancia que debe recorrer en su propia longitud.

El tren va a recorrer 250 m en 5min, por lo tanto su velocidad será:

$$\frac{250\text{m}}{5\text{min}} = 50 \text{ m/min}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Un móvil viaja con una rapidez de 30 m/s. ¿Qué distancia recorrerá en 20 segundos?

Rpta.: ....

2. Dos móviles separados 100 m, parten simultáneamente uno al encuentro del otro con velocidades constantes de 15 m/s y 25 m/s. ¿Después de cuánto tiempo están separados 20m por segunda vez?

Rpta.: ....

3. Pepito ha calculado que caminando a 15 m/s demora en ir de su casa al colegio 40 segundos. ¿Cuál es la distancia de su casa al colegio

Rpta.: ....

4. Un camión emplea 8 segundos en pasar delante de un observador y 38 segundos en recorrer una estación de 120m de longitud. Halle la longitud del camión.

Rpta.: ....

5. Dos móviles pasan al mismo tiempo y en sentidos contrarios. Uno va a 12 m/s y el otro a 18 m/s. ¿Al cabo de que tiempo estarán distanciados 1500 metros?

Rpta.: ....

6. Dos móviles pasan al mismo tiempo , uno en el punto A con rapidez 25 m/s y el otro por el punto B con rapidez 20 m/s, uno al encuentro del otro.
Si la distancia entre A y B es 1800 metros, ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán?

Rpta.: ....

7. En el siguiente gráfico, los móviles pasan al mismo tiempo por los puntos indicados. ¿Al cabo de qué tiempo el móvil 1 alcanzará al móvil 2?

40 m/s　　25 m/s

1　　2

900 m

Rpta.: ....

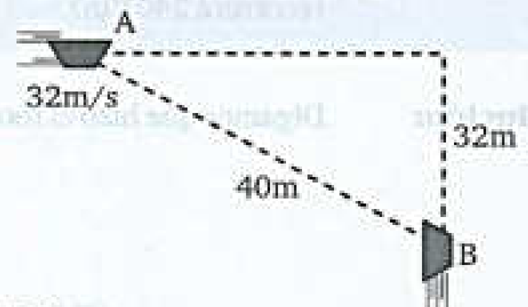
8. Los autos A y B de 10 m de longitud van a 10 m/s. Si un ciclista se encuentra con el segundo luego de 4s de haberse encontrado con el primero. Halle su rapidez.

Rpta.: ....

9. Mijael sale de su casa con una rapidez de 40 m/min. Si su padre sale diez minutos después y en la misma dirección, con una rapidez de 50 m/min, ¿al cabo de cuánto tiempo Mijael será alcanzado por su padre?

Rpta.: ....

10. Si luego de 12s los móviles estarán separados 20 m. Halle la rapidez de B.

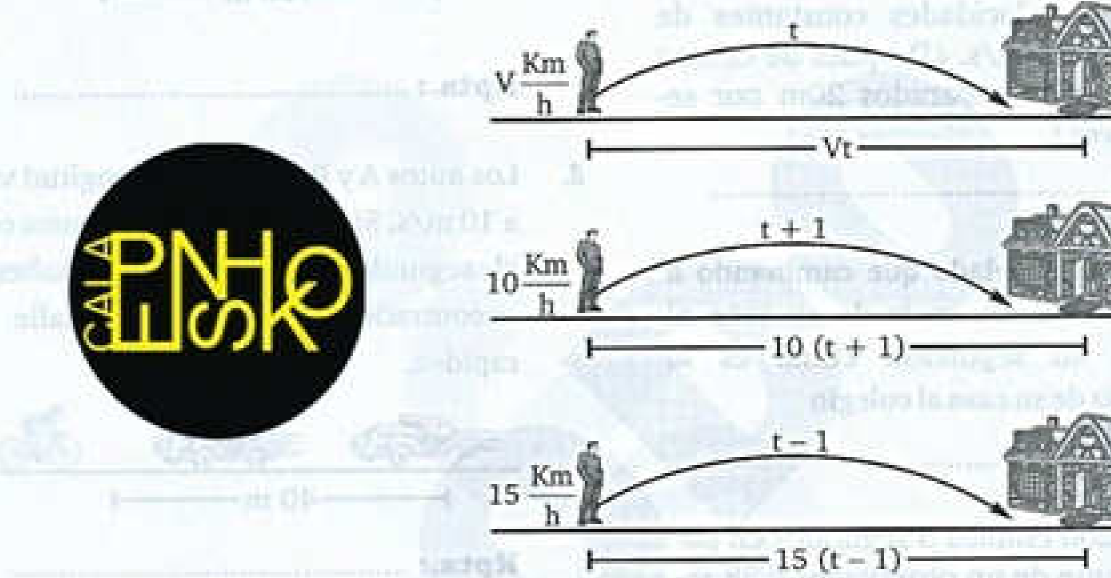


Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Mijael ha calculado que si corre a 10 Km/h llegaría a su casa a la 1 p.m., pero si corre a 15 Km/h llegaría a las 11 a.m. ¿Con qué rapidez debe correr para llegar exactamente al medio día?

Resolución: Sea "V" la rapidez para llegar al mediodía y "t" el tiempo que se demora.



Del gráfico; $15(t-1) = 10(t+1)$

$t = 5$

También: $Vt = 10(t+1)$

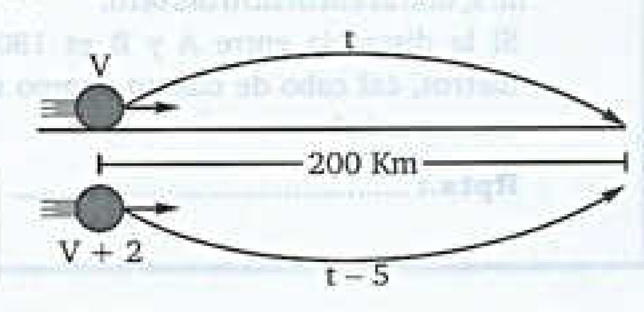
Reemplazando: $5V = 60$

$V = 12$

∴ La rapidez es 12 Km/h.

PROBLEMA 2 Un móvil recorrió 200 Km con velocidad constante. Si hubiera viajado con una velocidad mayor en 2 Km/h, hubiera demorado 5 horas menos. ¿En qué tiempo recorrerá 240 Km?

Resolución: Digamos que hizo el recorrido con velocidad "V" y demoró un tiempo "t".



(Si hubiera viajado con una velocidad mayor en 2 km/h)

Se observa que: $Vt = 200 \rightarrow t = \dfrac{200}{V}$ ......(1)

$(V+2)(t-5) = 200 \rightarrow t - 5 = \dfrac{200}{V+2}$ ......(2)

(1) – (2): $\dfrac{200}{V} - \dfrac{200}{V+2} = 5$

Resolviendo: $V = 8$

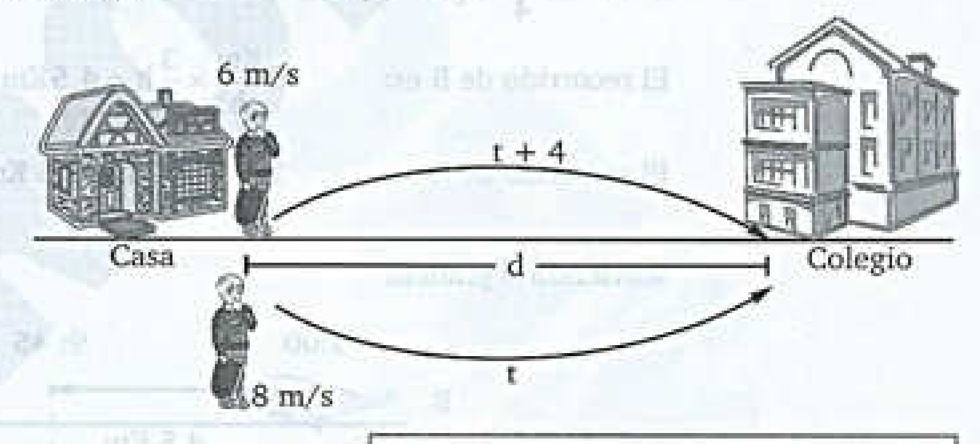
Entonces la velocidad del móvil es 8 Km/h

Nos preguntan en qué tiempo recorrerá 240 Km.

$$\therefore \quad \text{tiempo} = \frac{240\text{km}}{8\text{Km/h}} = 30\,\text{h}$$

PROBLEMA 3 Coquito quiere calcular la distancia entre su casa y el colegio, observa que si camina a 6 m/s demora 4 segundos más que si camina a 8 m/s. ¿Cuál es la distancia entre su casa y el colegio?

Resolución: Digamos que caminando a 8 m/s demora "t" segundos y la distancia entre la casa y el colegio es "d" metros.



Del gráfico: $t + 4 = \dfrac{d}{6}$ ......(1)

$t = \dfrac{d}{8}$ ......(2)

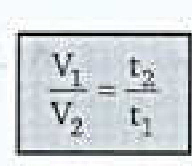
(1) – (2): $\dfrac{d}{6} - \dfrac{d}{8} = 4$

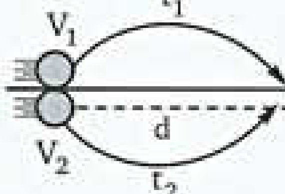
$d = 96$

$\therefore$ La distancia es 96 m

NOTA "S"

Relación entre rapidez y tiempo cuando la distancia es la misma.





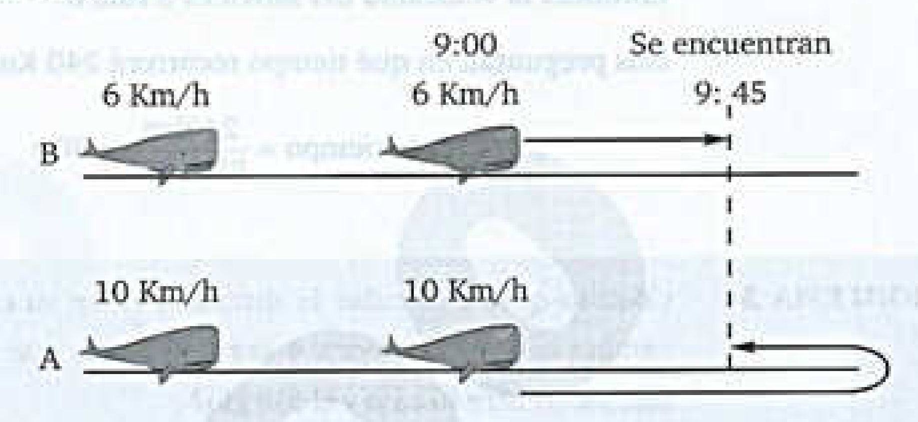
En el problema:

$\dfrac{6}{8} = \dfrac{t}{t+4} \rightarrow t = 12$

$\therefore \quad d = 8t = 96\,\text{m}$

PROBLEMA 4 Dos ballenas A y B nadan juntas en la misma dirección ambas a 6 Km/h. A las 9:00 a.m. A incrementa su rapidez a 10 Km/h y se aleja de B pero al cabo de cierto tiempo voltea y se encuentra con B a las 9:45 a.m. ¿A qué hora A dio la vuelta?

Resolución: Digamos que caminando a 8 m/s demora "t" segundos y la distancia entre la casa y el colegio es "d" metros.



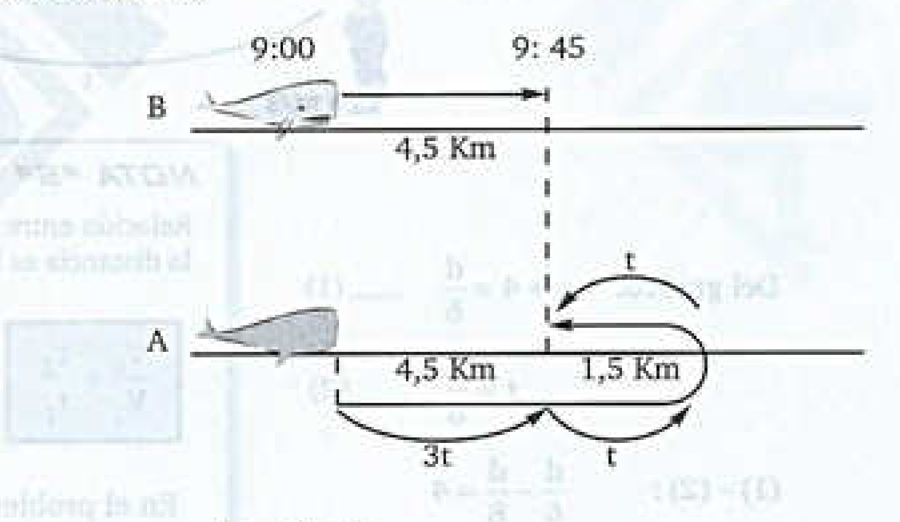
Se observa que desde que se separaron hasta que se encontraron han transcurrido:

45 min = $\frac{3}{4}$ h para ambas. Entonces:

El recorrido de B es: $6\frac{Km}{h} \times \frac{3}{4}h = 4{,}5\,Km$

El recorrido de A es: $10\frac{Km}{h} \times \frac{3}{4}h = 7{,}5\,Km$

Volviendo al gráfico:



$5t = 45\text{ min}$

$t = 9\text{ min}$

En el gráfico se observa que A dio la vuelta a las

$\therefore \quad 9{:}45 - t = 9{:}45 - 9\text{ min} = 9{:}36$

PROBLEMA 5 Un ciclista va de la ciudad A hasta la ciudad B, dividiendo su recorrido en tres tramos iguales. El primer tramo lo recorre con rapidez 60 Km/h, el segundo tramo, con 30 Km/h y el tercero, con 20 Km/h. Hallar la rapidez media del ciclista.

Resolución:

Digamos que el primer tramo lo recorre en un tiempo de "t" horas, entonces el primer tramo mide $60\frac{\text{Km}}{\text{h}} \times \text{t h} = 60\text{t Km}$.

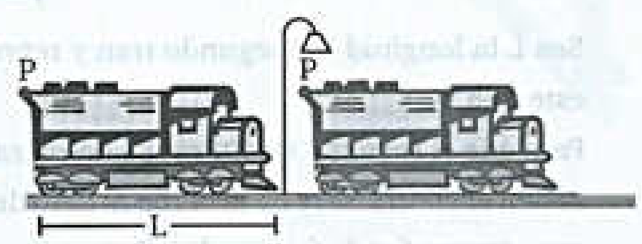
Volvamos al gráfico teniendo en cuenta que por dato los tres tramos son iguales:

Ahora recuerda que: $\boxed{\text{Rapidez media} = \frac{\text{Recorrido total}}{\text{tiempo total}}}$

$$\therefore \quad \text{Rapidez media} = \frac{180\text{t Km}}{6\text{t h}} = 30\ \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

PROBLEMA 6 Un tren cruza delante de un poste en 10 segundos y un túnel de 300 m de largo en 25 s. ¿Cuál es la longitud del tren?

Resolución: Sea L la longitud del tren y representemos con el punto P a la parte posterior del tren.



Si el tren cruza delante del poste en 10 s, quiere decir que P recorre L en 10 s.

Si el tren cruza el túnel en 25 s, quiere decir que P recorre L + 300 en 25 s.

Luego:

$$\begin{array}{c} L \quad \text{en } 10\,s \\ L + 300 \ \text{ en } \ 25\,s. \end{array}$$

$$25L = 10(L + 300)$$

$$L = 200$$

∴ La longitud del tren es 200 m

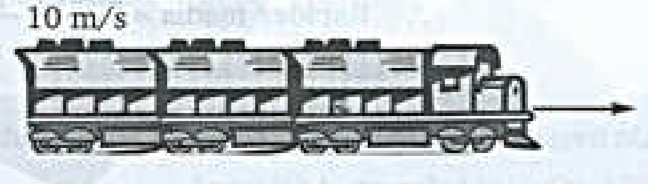
PROBLEMA 7 Dos trenes van por vías paralelas en sentido contrario, el primero con rapidez 36 Km/h y el segundo con 54 Km/h. Un pasajero sentado en el primer tren observa que el segundo demora en pasar por su costado 6 segundos. Halle la longitud del segundo tren.

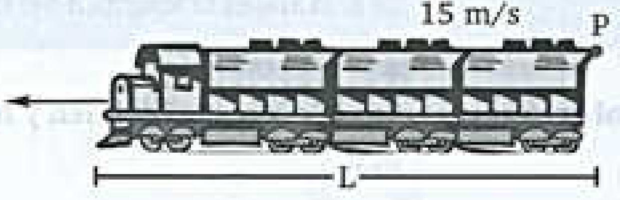
Resolución: Debido a que la rapidez está en Km/h y el tiempo está en segundos, debemos cambiar la rapidez a m/s.

$$36\frac{Km}{h}\times\frac{5}{18}=10\frac{m}{s}$$

$$54\frac{Km}{h}\times\frac{5}{18}=15\frac{m}{s}$$

El tiempo que demora el segundo tren en pasar delante del pasajero (6 segundos) empieza cuando ve la parte delantera del segundo tren.





Sea L la longitud del segundo tren y representemos con P a la parte posterior de este tren.

Para que el segundo tren termine de cruzar delante del pasajero, este y el punto P deben encontrarse, y de acuerdo al dato del problema el tiempo que demoraron en encontrarse fue de 6 segundos. Entonces:

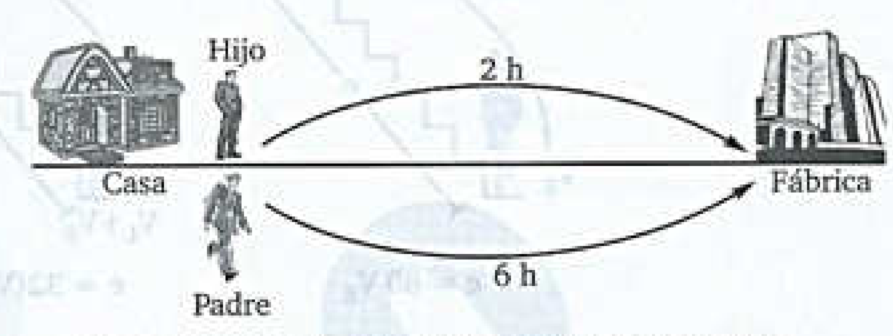
$$t_{(encuentro)}=\frac{L}{V_{(pasajero)}+V_{(Punto\ P)}}=6\,s$$

$$\frac{L}{10\frac{m}{s}+15\frac{m}{s}}=6s$$

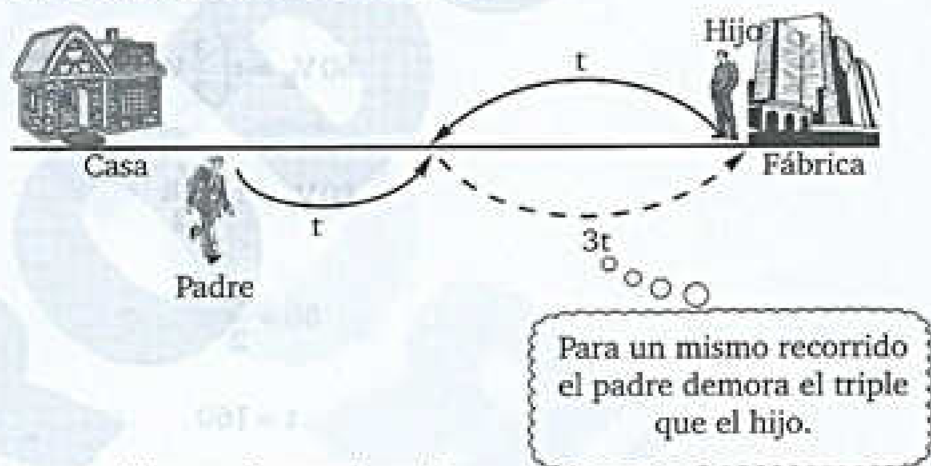
$$\therefore \quad L = 150\text{ m}$$

PROBLEMA 8 Un padre y su hijo viven en la misma casa y trabajan en la misma fábrica. El hijo va de la casa a la fábrica en 2h mientras que su padre lo hace en 6h. Cierto día el hijo sale de la fábrica con dirección a su casa en el mismo instante que su padre sale de la casa con dirección al trabajo, ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán?

Resolución:



Se observa que para un mismo recorrido el padre demora el triple que el hijo.
Sea "t" el tiempo que transcurre hasta el encuentro.



De acuerdo al primer gráfico, en el segundo gráfico:

$$t + 3t = 6\text{ h.}$$

$$\therefore \quad t = 1{,}5\text{ h}$$

PROBLEMA 9 Laura llega aun supermercado en el cual hay una escalera automática que lleva al segundo piso. Si se para sobre la escalera llega al segundo piso en 80s, pero si camina sobre la escalera llega al segundo piso en 32s. Si Laura está en el segundo piso y baja caminando sobre la escalera, ¿en qué tiempo llegará al primer piso?

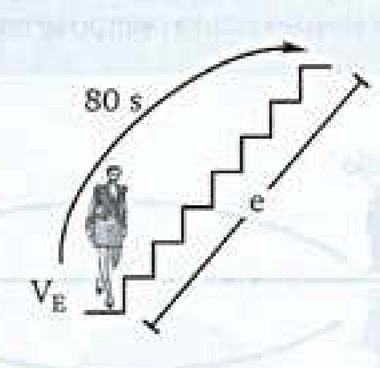
Resolución: Las escaleras automáticas se mueven con cierta rapidez, así que:

V_E = Rapidez de la escalera.

V_L = Rapidez de Laura.

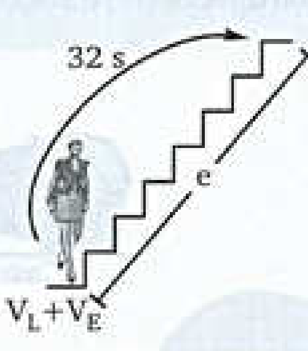
e = recorrido de la escalera para llegar al segundo piso.

Cuando se para sobre la escalera solo interviene la rapidez de la escalera



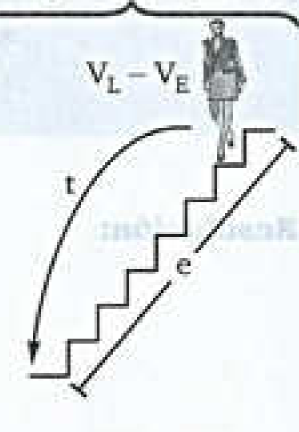
$e = 80\,V_E$

Cuando camina sobre la escalera se suman las respectivas rapideces.



$e = 32(V_L + V_E)$

Cuando baja caminando sobre la escalera se restan sus respectivas rapideces



$e = t(V_L - V_E)$

$$80\,V_E = 32(V_L + V_E) \rightarrow V_L = \frac{3}{2}V_E$$

$$80\,V_E = t\left(\frac{3}{2}V_E - V_E\right)$$

$$80\,V_E = t \times \frac{V_E}{2}$$

$$80 = \frac{t}{2}$$

$$t = 160$$

$\therefore$ Demora en bajar 160 s = 2 minutos

PROBLEMA 10 Una persona ubicada entre dos montañas emite un grito y escucha el primer eco a los 3 s y el siguiente a los 3,6 s. ¿Cuál es la distancia entre las montañas?

Resolución: El eco se produce cuando el sonido rebota y regresa al lugar donde salió.

$V_{sonido} = 340$ m/s

El sonido en ir y regresar demora 3s

El sonido en ir y regresar demora 3,6s

1,5 s 1,8 s

1,5 s 1,8 s

d_1 d_2

$$d_1 = 340 \times 1{,}5 \qquad d_2 = 340 \times 1{,}8$$

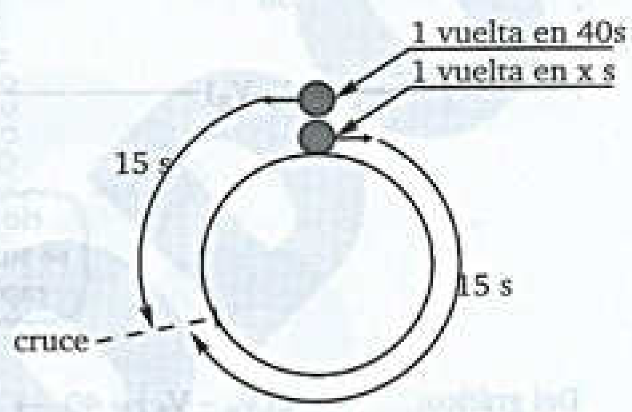
$$d_1 = 510 \qquad d_2 = 612$$

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia entre}\\ \text{las montañas}\end{pmatrix} = 510 + 612 = 1122$$

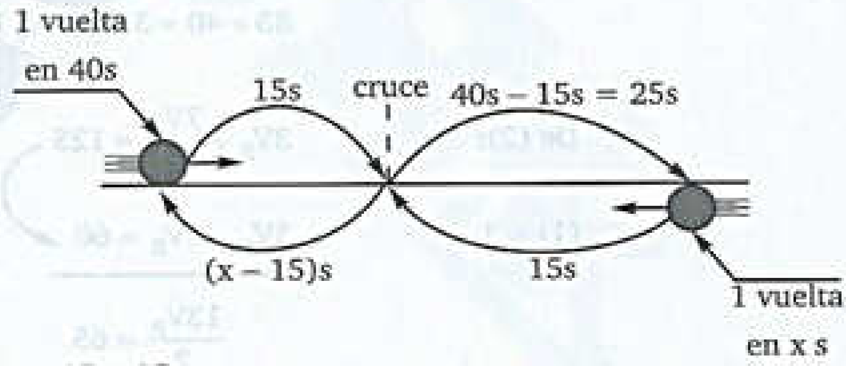
$\therefore$ La distancia es 1122 m.

PROBLEMA 11 Un ciclista da una vuelta completa a una pista circular en 40 segundos. Un segundo ciclista recorre la pista en sentido contrario y se cruza con el primero cada 15 segundos. ¿Cuántos segundos emplea el segundo ciclista en dar una vuelta a la pista?

Resolución:



Trabajemos en un gráfico equivalente para mayor comodidad.



Luego: $\dfrac{x-15}{15} = \dfrac{15}{25}$

$$x = 24$$

$\therefore$ El segundo ciclista emplea 24 s.

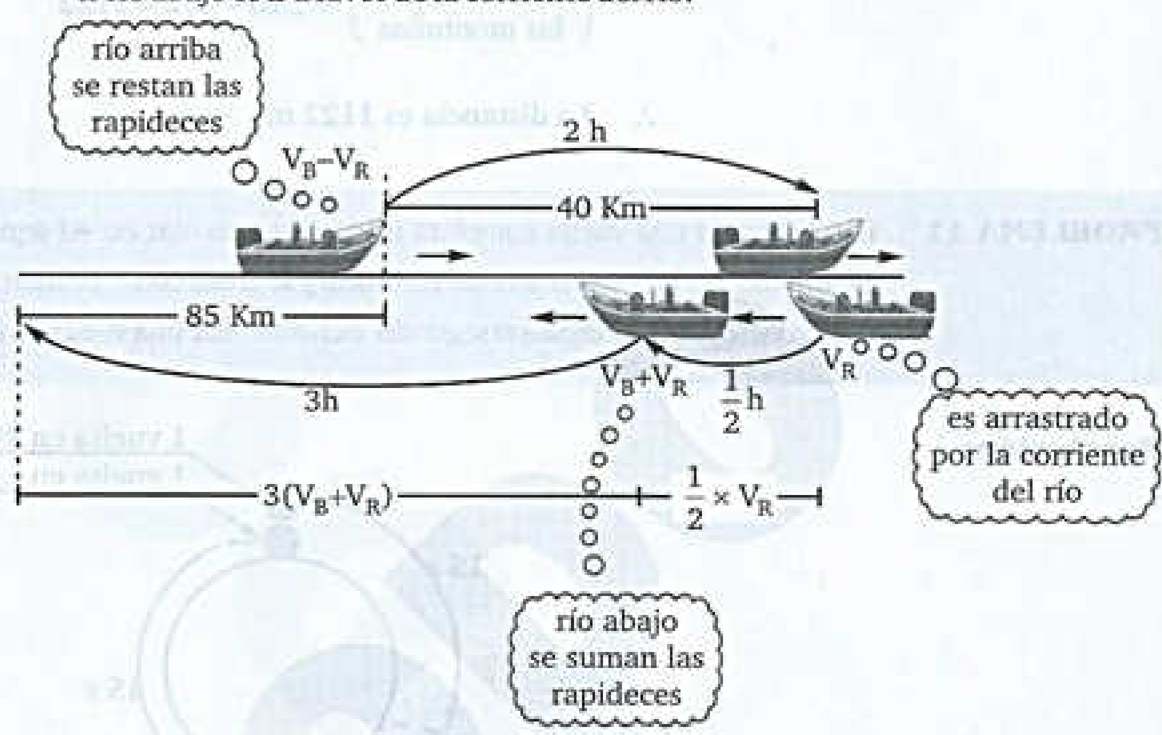
PROBLEMA 12 Desde cierto lugar de un río, un bote parte río arriba y en dos horas recorre 40 Km, al cabo del cual se malogra el motor. El motor es reparado en media hora y el bote continua río abajo y al cabo de 3 horas el bote se encuentra a 85 Km más allá del lugar de partida. Hallar la rapidez de la corriente del río.

Resolución: Sea V_B la rapidez del bote.

V_R la rapidez del río.

Ir río arriba es ir en contra de la corriente del río.

Ir río abajo es ir a favor de la corriente del río.



Del gráfico: $2(V_B - V_R) = 40 \rightarrow V_B - V_R = 20$...... (1)

$$85 + 40 = 3(V_B + V_R) + \frac{V_R}{2} \qquad \text{...... (2)}$$

De (2): $3V_B + \dfrac{7V_R}{2} = 125$

(1) × 3: $3V_B - 3V_R = 60$ (–)

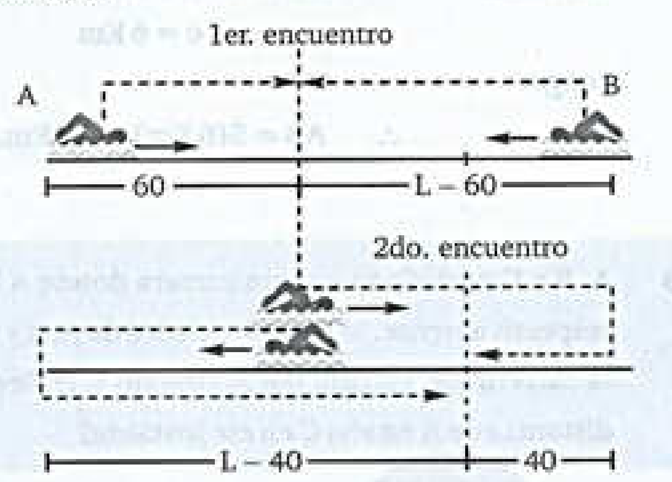
$$\frac{13V_R}{2} = 65$$

$$V_R = 10$$

∴ La rapidez de la corriente es 10 Km/h

PROBLEMA 13 Ana y Brenda están en orillas opuestas de un lago empiezan a nadar la una hacia la otra al mismo tiempo, siendo la rapidez de cada una constante.
Cuando se cruzan por primera vez están a 60 m de la orilla izquierda, continúan nadando, llegan a las orillas opuestas, vuelven inmediatamente y se cruzan por segunda vez a 40 m de la orilla derecha. Hallar el ancho del lago.

Resolución: Sea "L" el ancho del lago.



Si en el segundo caso entre las dos han recorrido el doble del primer caso, entonces podemos afirmar que cada una ha recorrido el doble de lo que recorrió en el primer caso.

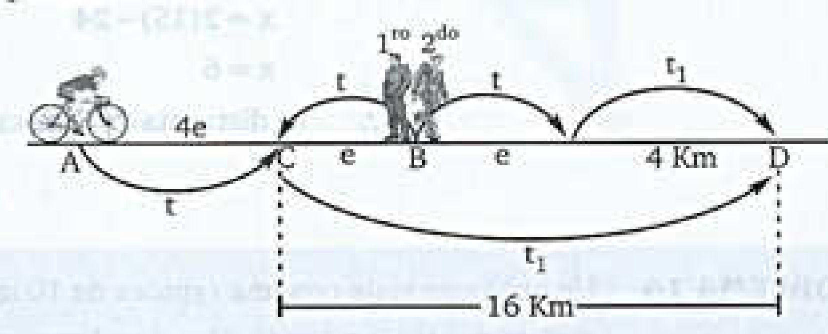
Para Ana: $L - 60 + 40 = 2(60)$

$L = 140$

$\therefore$ El ancho del lago es 140 m

PROBLEMA 14 Un ciclista parte de A con dirección a B, al mismo tiempo que dos peatones parten de B en sentidos opuestos. El ciclista los encuentra a uno en C y al otro en D. Calcule la distancia AB, sabiendo que los dos peatones marchan a la misma rapidez constante, la rapidez del ciclista es 4 veces la de los peatones y la distancia CD es 16 Km.

Resolución: Según el problema los peatones tienen la misma rapidez y el ciclista el cuádruplo de dicha rapidez. Entonces para tiempos iguales el ciclista recorre el cuádruplo de lo que recorre cada peatón.



Del gráfico: $AB = 5e$

En el gráfico se observa que en el tiempo "t_1" el ciclista ha recorrido 16 Km (por dato CD = 16 Km), entonces en ese mismo tiempo el 2do peatón ha recorrido 4 Km (recuerda el análisis inicial).

También: $2e + 4\,Km = 16\,Km$

$e = 6\,Km$

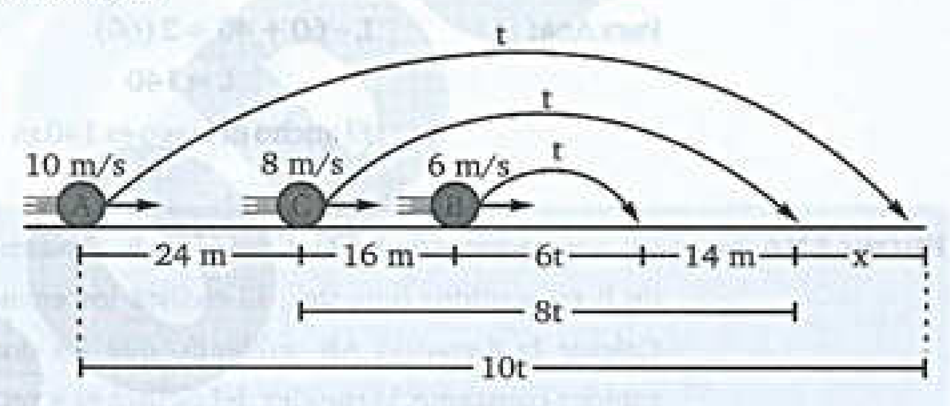
Luego:

$\therefore \quad AB = 5(6\,Km) = 30\,Km.$

PROBLEMA 15 A, B y C participan en una carrera donde A les da una ventaja de 40 y 24 metros respectivamente. Si las velocidades de A, B y C son 10; 6 y 8 m/s respectivamente y la carrera fue ganada por A cuando C le llevaba una ventaja de 14 m a B, ¿a qué distancia de A estaba C en ese instante?

Resolución: Digamos que A llegó a la meta (ganó la carrera) en "t" segundos (el tiempo es el mismo para los tres).

Grafiquemos la situación:



Recuerda: $e = V \times t$

Del gráfico: $8t = 16 + 6t + 14 \;\rightarrow\; 2t = 30 \;\rightarrow\; t = 15$

También: $10t = 24 + 8t + x$

$x = 2t - 24$

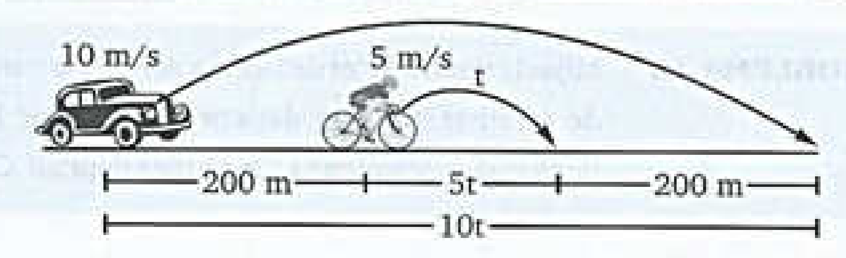
$x = 2(15) - 24$

$x = 6$

$\therefore$ La distancia de C hasta A es 6 m.

PROBLEMA 16 Un auto que viaja con una rapidez de 10 m/s se encuentra a 200 m detrás de un ciclista que viaja a 5 m/s. Si se desplazan en la misma dirección, ¿después de qué tiempo el auto estará a 200 m delante de la moto?

Resolución: Sea "t" el tiempo que debe transcurrir para que el auto este 20 m delante de la moto.



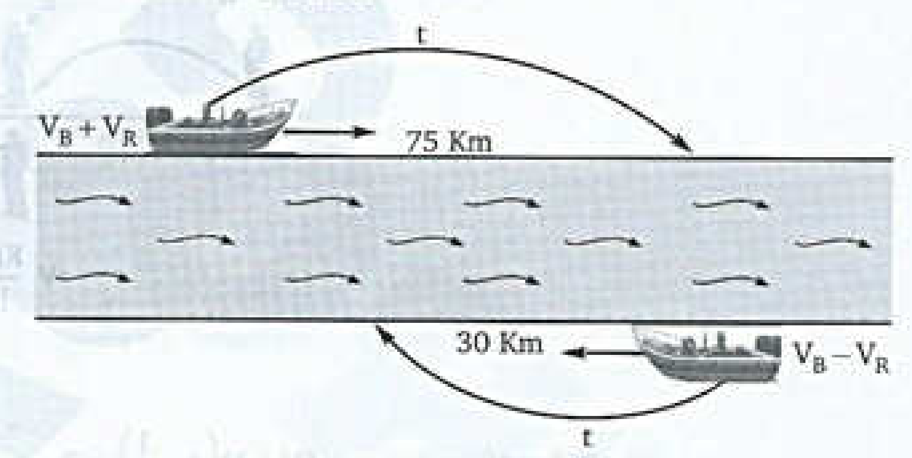
Del gráfico: $10t = 200 + 5t + 200$

$t = 80$

$\therefore$ El tiempo es 80 s.

PROBLEMA 17 Un hombre rema 75 Km río abajo empleando el mismo tiempo que emplea en remar 30 Km río arriba. Halle la rapidez con la que rema el hombre, si la rapidez de la corriente del río es 12 Km/h.

Resolución: Sea "t" el tiempo de demora en ambos casos.



Recuerda que: $t = \dfrac{e}{V}$

Del gráfico: $t = \dfrac{75}{V_B + V_R} = \dfrac{30}{V_B - V_R}$

$$\frac{5}{V_B + V_R} = \frac{2}{V_B - V_R}$$

$$7\,V_R = 3\,V_B$$

Reemplazando: $V_R = 12$ (Por dato)

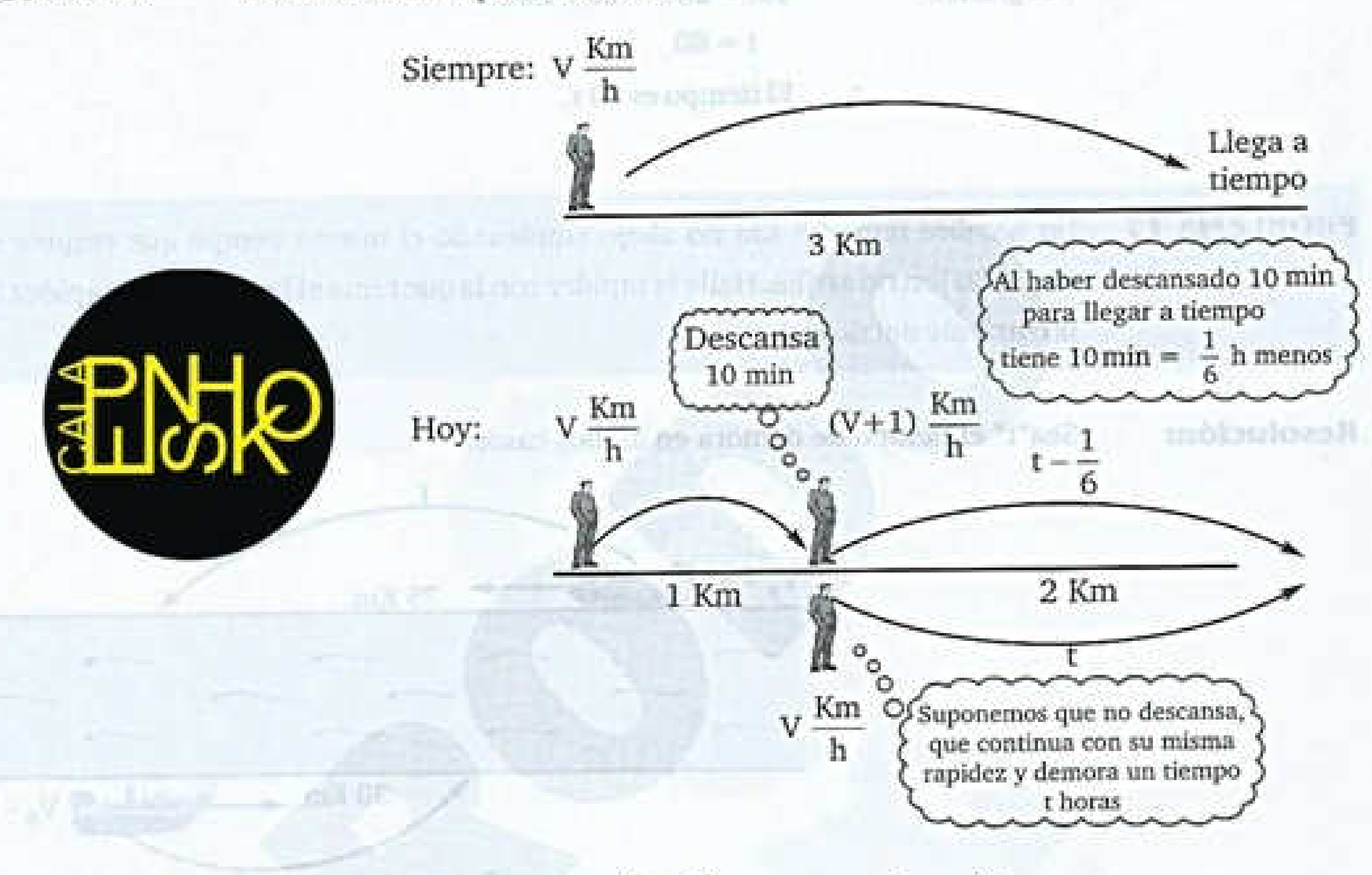
$$7 \times 12 = 3\,V_B$$

$$V_B = 28$$

$\therefore$ La rapidez es 28 Km/h

PROBLEMA 18 Mijael camina 3 Km de su casa al colegio y siempre llega a tiempo. Hoy día después de caminar 1 Km se detiene a descansar 10 minutos, por lo cual para llegar a tiempo debe caminar 1 Km/h más deprisa. Calcule su rapidez habitual.

Resolución: Sea V Km/h la rapidez habitual.



Del gráfico: $(V+1)\left(t-\frac{1}{6}\right)=2 \rightarrow t-\frac{1}{6}=\frac{2}{V+1}$

$$Vt=2 \rightarrow t=\frac{2}{V}$$

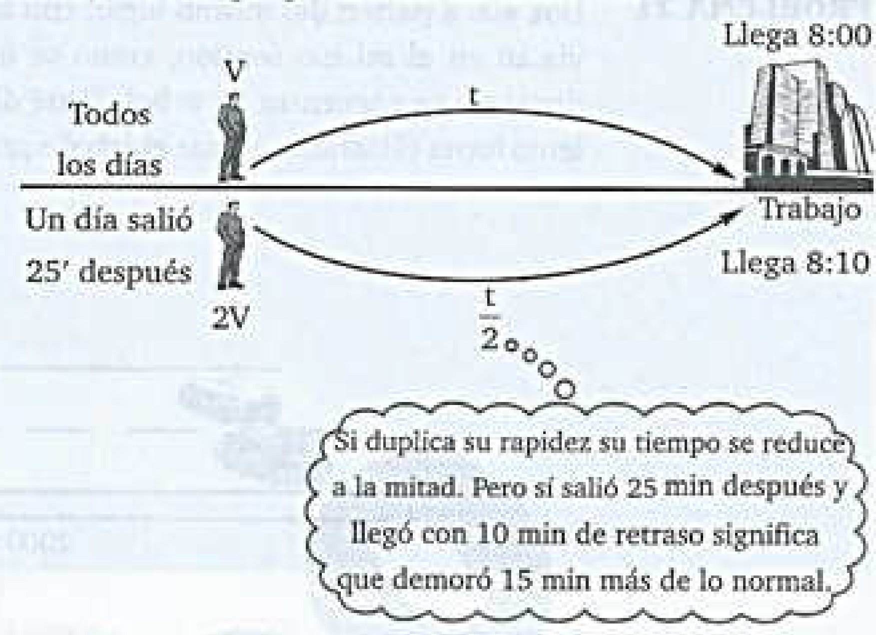
$$\frac{2}{V}-\frac{2}{V+1}=\frac{1}{6}$$

Resolviendo: $V=3$

∴ Su rapidez habitual es 3 Km/h.

PROBLEMA 19 Mijael sale de su casa todos los días a la misma hora y llega a su trabajo a las 8:00 a.m. Un día salió 25 minutos después de lo normal y a pesar de que duplicó su rapidez llegó a las 8: 10 a.m. ¿Cuánto tiempo demora en llegar a su trabajo normalmente?

Resolución: Sea V su rapidez normal y t el tiempo que demora normalmente.



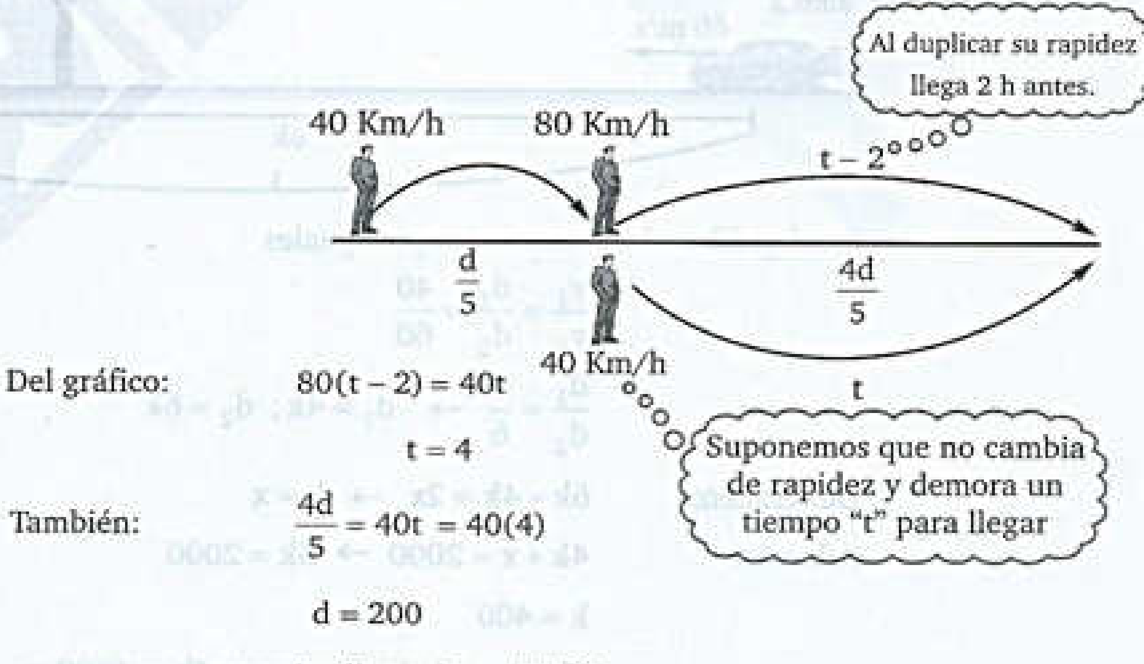
Entonces: $\frac{t}{2} = t - 15$

$t = 30$

∴ Normalmente se demora 30 min.

PROBLEMA 20 Mijael viaja de un punto a otro con una rapidez de 40 Km/h. Cuando ha recorrido $\frac{d}{5}$ el camino, duplica su rapidez lo que le permite llegar a su destino 2 horas antes de lo pensado. Halle la distancia que recorre.

Resolución:



Del gráfico: $80(t-2) = 40t$

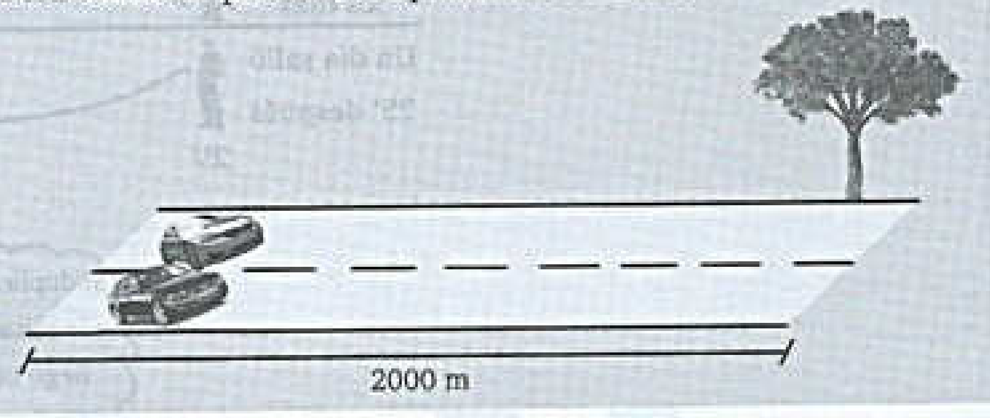
$t = 4$

También: $\frac{4d}{5} = 40t = 40(4)$

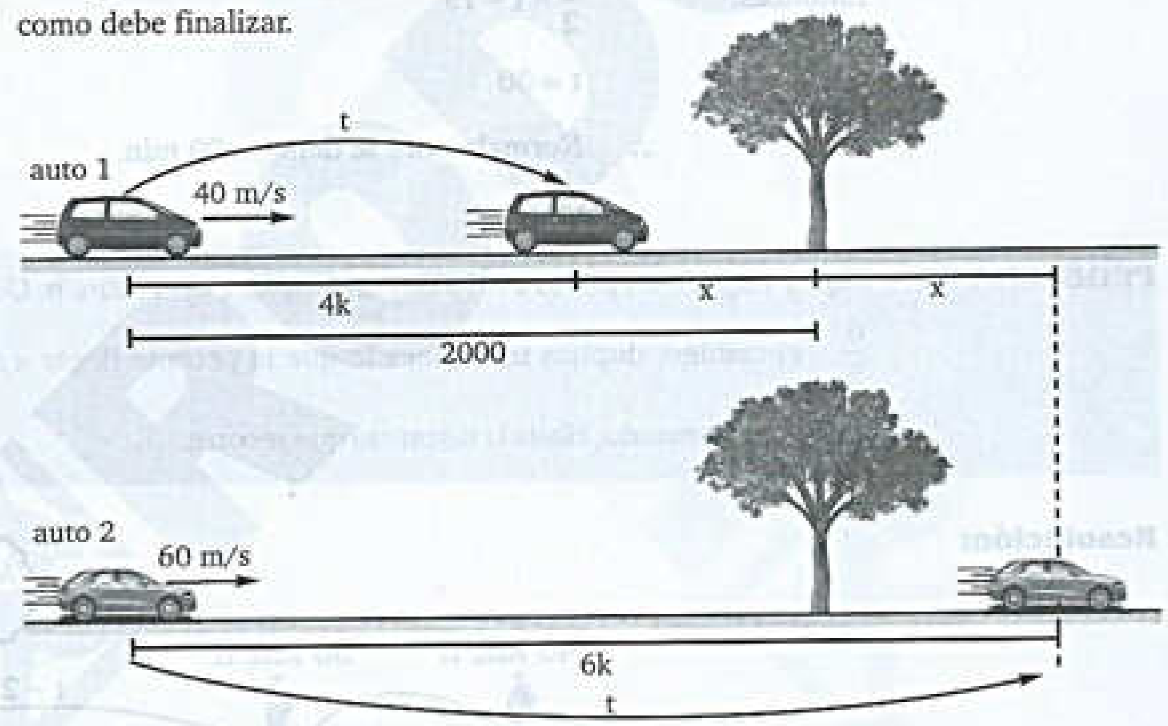
$d = 200$

∴ La distancia es 200 Km.

PROBLEMA 21 Dos autos parten del mismo lugar, con rapidez de 60 m/s y 40 m/s y ambos viajan en el mismo sentido, como se muestra en el gráfico, a 2000 m de distancia se encuentra un árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido el auto más lento hasta el instante en que el árbol equidista de los 2 autos?



Resolución: En el gráfico del enunciado tenemos las condiciones iniciales, ahora analizamos como debe finalizar.



En el gráfico observamos tiempos iguales

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{40}{60}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{4}{6} \rightarrow \quad d_1 = 4k; \; d_2 = 6k$$

Del gráfico: $6k - 4k = 2x \rightarrow k = x$

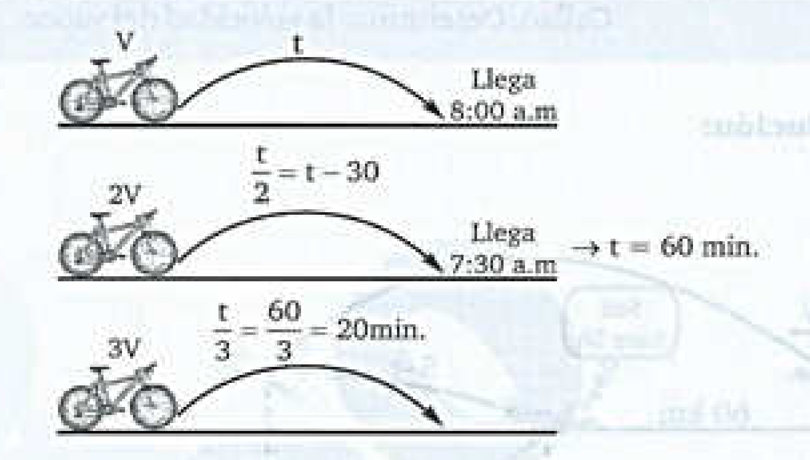
Además: $4k + x = 2000 \rightarrow 5k = 2000$

$k = 400$

$\therefore$ El auto más lento recorre $4k = 1600$ m

PROBLEMA 22 Todos los días Silvia sale de su casa a la misma hora, va en bicicleta a su colegio a velocidad constante, llega a las 8 a.m. Ayer duplicó la velocidad de costumbre y siguiendo la misma ruta de todos los días llegó a las 7:30 a.m. ¿A qué hora habría llegado si en vez de duplicar su velocidad la hubiera triplicado, siguiendo la misma ruta?

Resolución:

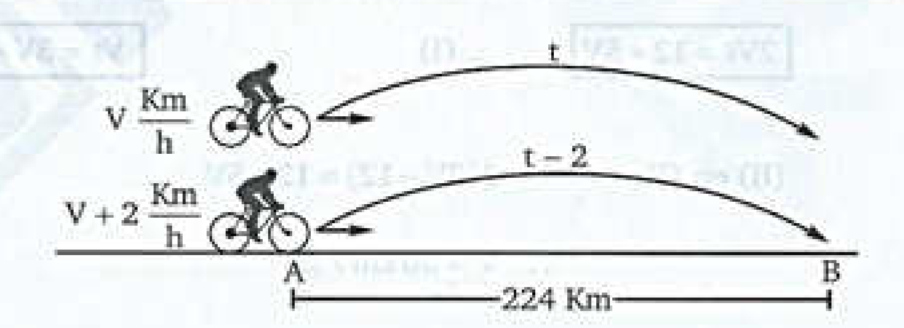


Llega 40 min antes de lo habitual.

$\therefore$ Llega a las 7: 20 a.m.

PROBLEMA 23 Dos ciclistas salen simultáneamente del punto A hacia el punto B, desplazándose en línea recta y cada uno con velocidad constante. El punto A dista 224 Kilómetros de B. El primer ciclista recorre 2 Kilómetros menos que el segundo ciclista en una hora y éste último llega 2 horas antes que el otro al punto B. ¿Cuál es la velocidad del primer ciclista?

Resolución:



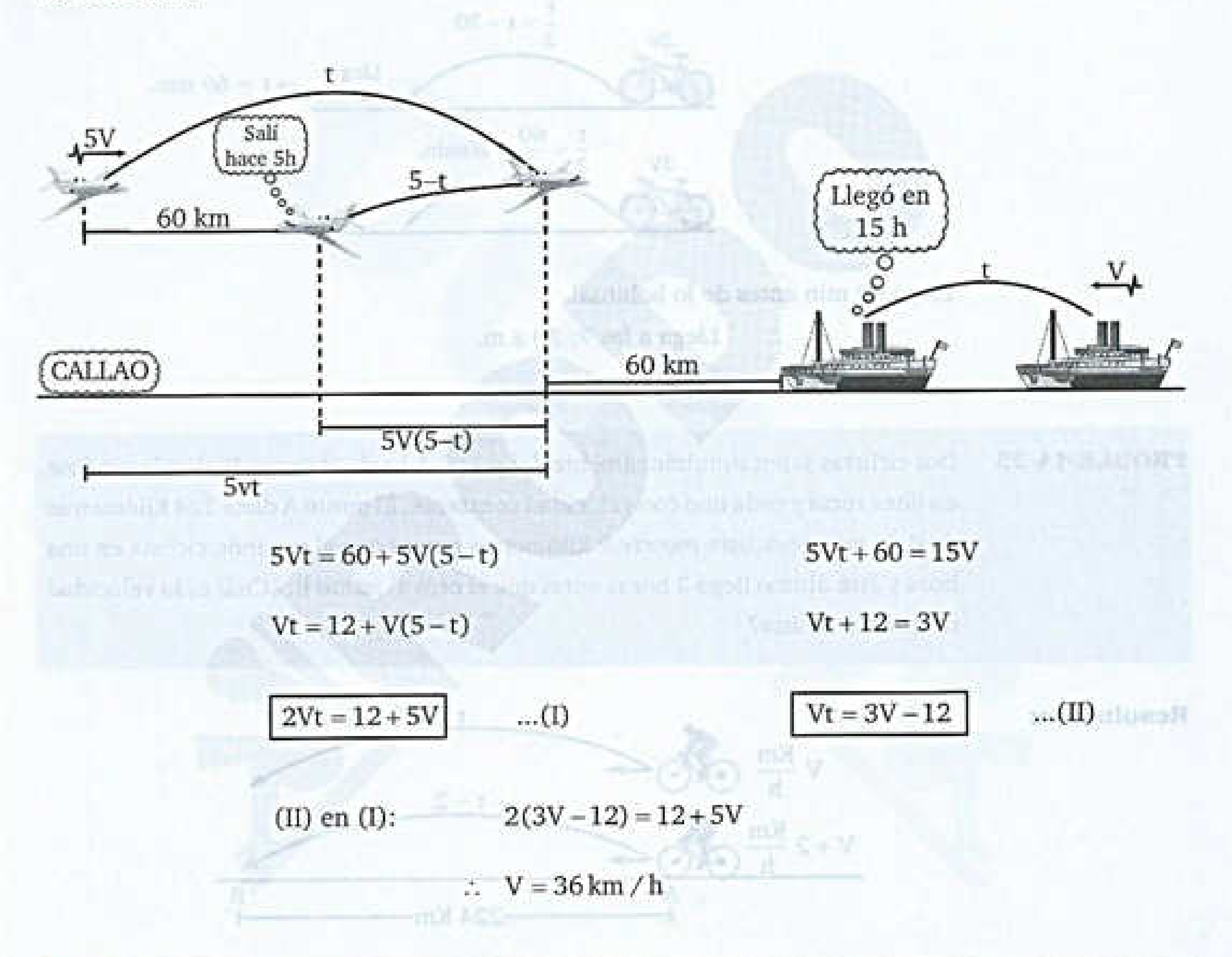
$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{224}{V-2} \\ t-2 &= \frac{224}{V} \end{aligned}\right\} -$$

$$2 = \frac{224}{V} - \frac{224}{V-2}$$

$\therefore \quad V = 14$

PROBLEMA 24 Un avión provisto de un radio de 60 km de alcance, parte del Callao al encuentro de un vapor cuya velocidad es la quinta parte de la suya (avión). Cuando sus mensajes alcanzan al vapor, responde éste que llegará al Callao dentro de 15 horas. El avión regresa inmediatamente y puede anunciar la noticia al Callao por medio de su radio cinco horas después de su partida del Callao. Determinar la velocidad del vapor.

Resolución:



$$5Vt = 60 + 5V(5-t) \qquad 5Vt + 60 = 15V$$

$$Vt = 12 + V(5-t) \qquad Vt + 12 = 3V$$

$$\boxed{2Vt = 12 + 5V} \quad ...(I) \qquad \boxed{Vt = 3V - 12} \quad ...(II)$$

(II) en (I): $2(3V-12) = 12 + 5V$

$$\therefore \ V = 36\ km/h$$

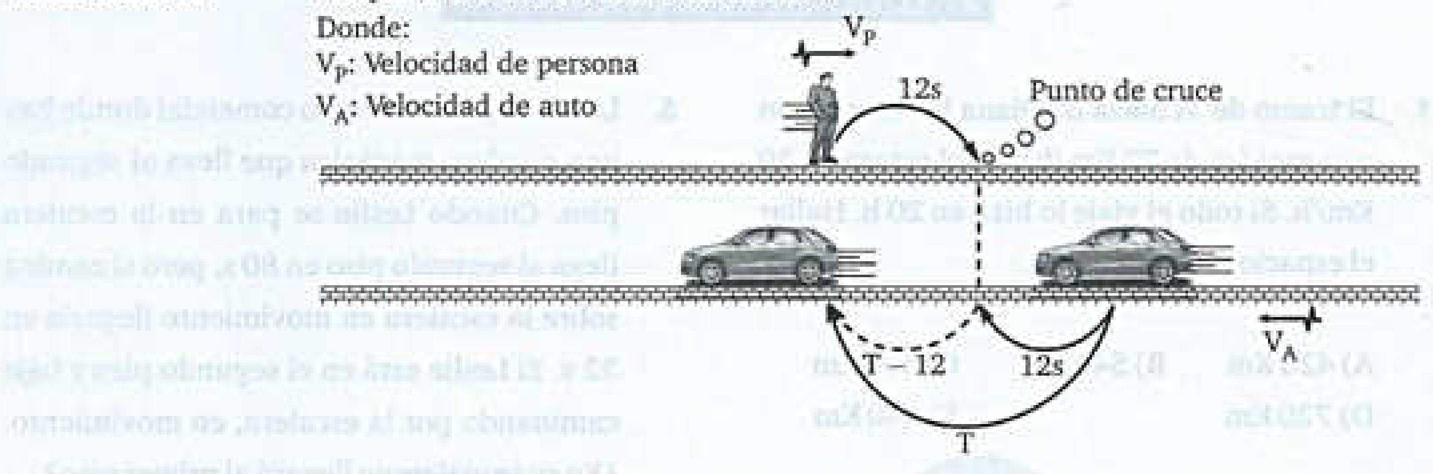
PROBLEMA 25 Joaquín camina en forma paralela a una autopista de carrera y se da cuenta que cada 12s se cruza con un auto y cada 36 s lo alcanza otro. Sabiendo que los autos viajan a rapideces iguales y salen a un mismo intervalo tiempo de la línea de partida. Halle dicho intervalo.

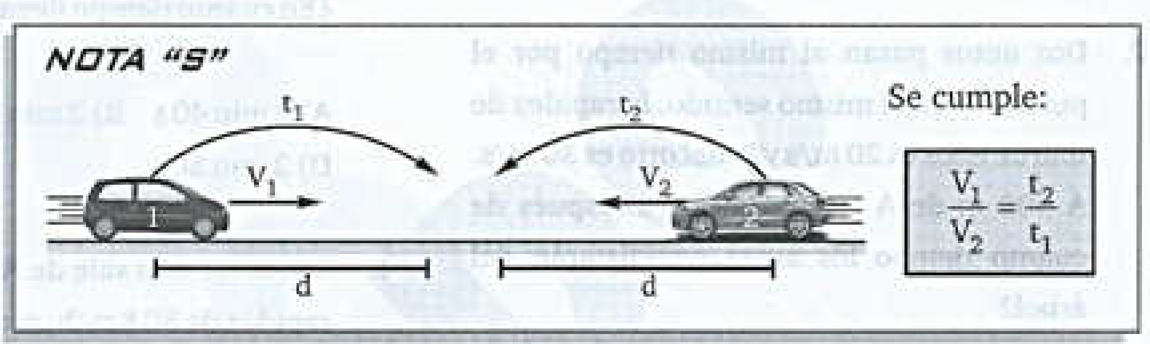
Resolución: Joaquín, cada 12s se cruza con un auto:

Donde:

V_P: Velocidad de persona

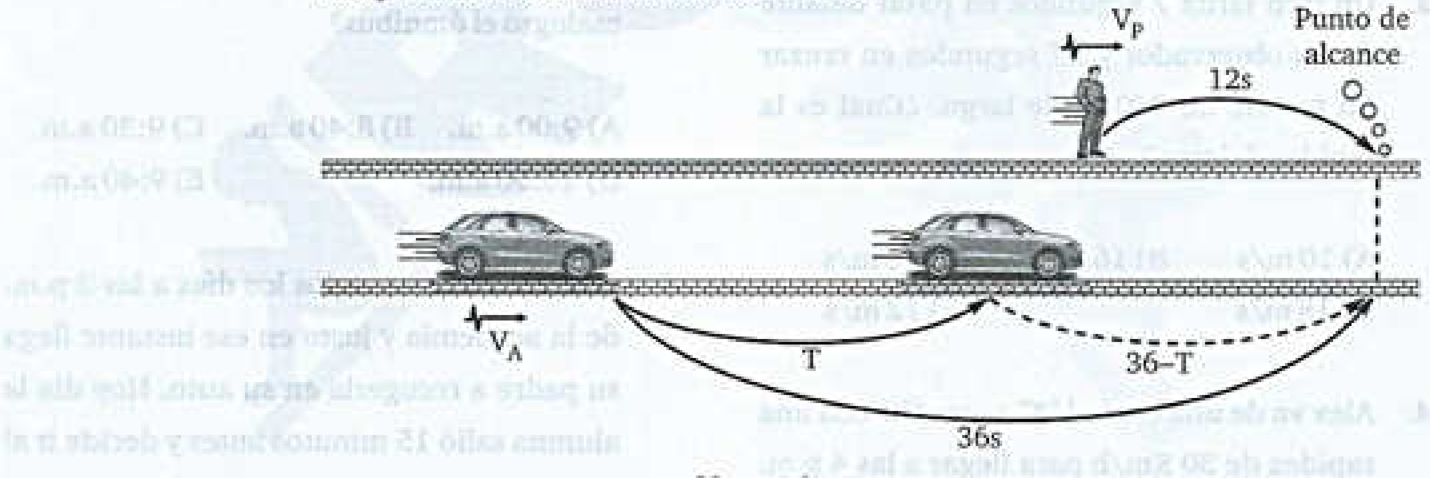
V_A: Velocidad de auto





De la Nota "S" $\dfrac{V_P}{V_A} = \dfrac{T-12}{12}$ ......(I)

Joaquín cada 36s lo alcanza otro auto:



También: $\dfrac{V_P}{V_A} = \dfrac{36-T}{36}$ ......(II)

Igualando (I) y (II): $\dfrac{T-12}{12} = \dfrac{36-T}{36}$

$T = 18$

$\therefore$ El intervalo de tiempo es 18s.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El tramo de "A hacia B" Diana lo recorre con una rapidez de 70 Km/h y en el retorno a 30 Km/h. Si todo el viaje lo hizo en 20 h. Hallar el espacio total recorrido.

A) 420 Km B) 540 Km C) 600 Km
D) 720 Km E) 840 Km

2. Dos autos pasan al mismo tiempo por el punto A y en el mismo sentido, la rapidez de uno de ellos es 20 m/s y la del otro es 30 m/s. A 500 m de A hay un árbol. ¿Después de cuánto tiempo los autos equidistarán del árbol?

A) 10 s B) 15 s C) 20 s
D) 25 s E) 30 s

3. Un tren tarda 7 segundos en pasar delante de un observador y 27 segundos en cruzar un puente de 300 m de largo. ¿Cuál es la rapidez del tren?

A) 10 m/s B) 16 m/s C) 15 m/s
D) 18 m/s E) 12 m/s

4. Alex va de una ciudad "A" a otra "B" con una rapidez de 30 Km/h para llegar a las 4 p.m. Cuando ha recorrido la séptima parte de su camino reduce su rapidez en $\frac{1}{3}$, llegando 3 horas más tarde. Halle la distancia entre las dos ciudades.

A) 200 Km B) 210 Km C) 220 Km
D) 240 Km E) 230 Km

5. Leslie llega a un centro comercial donde hay una escalera mecánica que lleva al segundo piso. Cuando Leslie se para en la escalera llega al segundo piso en 80 s, pero si camina sobre la escalera en movimiento llegaría en 32 s. Si Leslie está en el segundo piso y baja caminando por la escalera, en movimiento. ¿En cuánto tiempo llegará al primer piso?

A) 2 min 40 s B) 2 min 30 s C) 2 min 20 s
D) 2 min 50 s E) 2 min 10 s

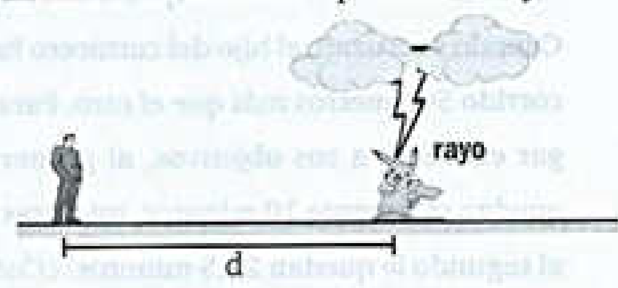
6. Todos los días sale de A hacia B un auto con rapidez de 80 Km/h; este cruza siempre a las 1 a.m. con un ómnibus que viene del B con una rapidez de 70 Km/h. Cierto día el auto que sale de A encuentra malogrado al ómnibus a las 12:45 p.m. ¿A qué hora se malogró el ómnibus?

A) 9:00 a.m. B) 8:40 a.m. C) 9:30 a.m.
D) 10:00 a.m. E) 9:40 a.m.

7. Una alumna sale todos los días a las 2 p.m. de la academia y justo en ese instante llega su padre a recogerla en su auto. Hoy día la alumna salió 15 minutos antes y decide ir al encuentro de su padre, al encontrarse con su padre sube al auto y se dirigen a su casa llegando 10 minutos antes de lo normal. ¿Cuánto tiempo estuvo caminando la alumna?

A) 12 min B) 20 min C) 25 min
D) 10 min E) 16 min

8. Un cazador pokemón observa la técnica del impactrueno de Pikachu y después de un tiempo "t", escucha el trueno; siendo C la rapidez de la luz y V la del sonido. ¿A qué distancia del hombre se produce el rayo?



A) $\frac{tVC}{V+C}$ B) $\frac{tVC}{C-V}$ C) $\frac{t(C-V)}{VC}$

D) $\frac{t(C-V)}{V+C}$ E) $\frac{V-C}{tVC}$

9. Un maratonista que va corriendo por la Panamericana Norte, se cruza con un bus cada 12 minutos y es alcanzado por otro bus de la misma empresa cada 20 minutos. Si todos los buses tienen la misma rapidez. ¿Cada cuánto tiempo salen los buses de sus paraderos?

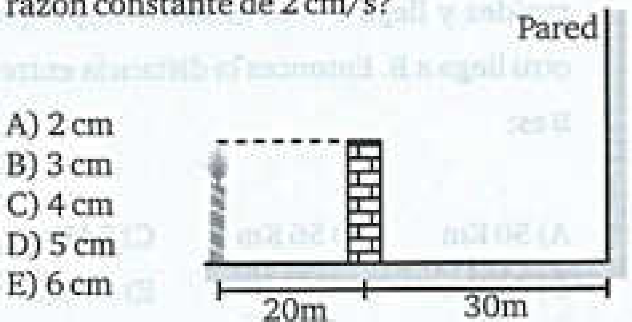
A) 12 min B) 10 min C) 15 min
D) 11 min E) 14 min

10. Alex se dirige en su auto a 72 Km/h hacia una montaña, de pronto toca el claxon y escucha el eco luego de 5 segundos. ¿A qué distancia de la montaña se escuchó el eco?

A) 800 m B) 600 m C) 540 m
D) 840 m E) 720 m

11. Si en el instante mostrado se enciende la vela, ¿qué rapidez posee el extremo de la sombra en la pared si la vela se consume a razón constante de 2 cm/s?

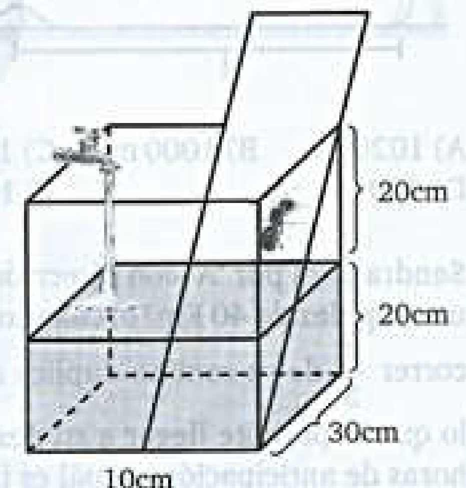
A) 2 cm
B) 3 cm
C) 4 cm
D) 5 cm
E) 6 cm



12. Dos automóviles pasan al mismo tiempo por un mismo punto en el mismo sentido, uno con rapidez 40 Km/h y otro con 50Km/h, después de media hora por el mismo punto y en el mismo sentido pasa por un tercer automóvil que alcanza a uno de los primeros 1,5 horas más tarde que al otro. Hallar la rapidez del tercer automóvil.

A) 75 Km/h B) 60 Km/h C) 72 Km/h
D) 80 Km/h E) 64 Km/h

13. Al recipiente ingresa agua a razón constante de 600 cm^3/s, ¿con qué mínima rapidez constante debe subir la hormiga por la superficie inclinada, a partir del instante mostrado, para no ser alcanzada por el agua?



A) 2,5 cm/s B) 5 cm/s C) 4,8 cm/s
D) 3,5 cm/s E) 4,5 cm/s

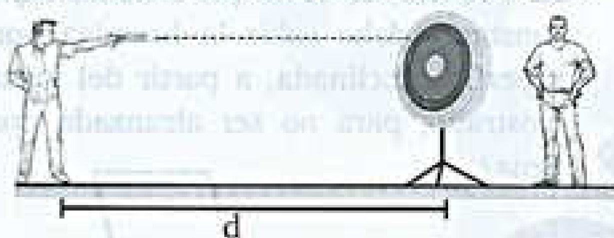
14. En una carrera de 100 Km el líder sin darse cuenta se desvía de la ruta, luego de recorrer 9 Km se da cuenta y regresa por el mismo desvío. En el momento de desviarse le llevaba una ventaja de 2 Km al segundo y cuando lo vuelve a pasar está a 10 Km de la meta. ¿A qué distancia de la partida está el desvío?

A) 10 Km B) 12 Km C) 15 Km
D) 18 Km E) 11 Km

15. Un tren demora en cruzar delante de un observador 8s y 24s en cruzar un puente de 800m de largo. ¿Cuál es la longitud del tren?

A) 320 m B) 400 m C) 480 m
D) 360 m E) 450 m

16. Dos personas Ricardo y Samuel ubicados en el punto A y B respectivamente. En cierto instante Samuel dispara una bala con una rapidez de 170 m/s (horizontalmente) en dirección del blanco que se encuentra junto a Ricardo. Sabiendo que B escucha el disparo y 3 segundos después, percibe el impacto con el blanco. Halle la distancia "d"



A) 1020 m B) 1000 m C) 1050 m
D) 900 m E) 1030 m

17. Sandra pasa por "A" con dirección a "B" con una rapidez de 40 Km/h, cuando le falta recorrer $\frac{4}{5}$ de su camino duplica su rapidez, lo que le permite llegar a su destino con 2 horas de anticipación. ¿Cuál es la distancia entre "A" y "B"?

A) 160 Km B) 200 Km C) 180 Km
D) 240 km E) 300 Km

18. Un remero navega sobre unrío hacia un lugar que dista 72 Km del punto de partida y hace el viaje de ida y vuelta en 14 horas. Si el tiempo que se demora en remar 4 Km siguiendo la corriente es el mismo tiempo que se demora en remar 3 Km contra la corriente, hallar la rapidez con la que navega el remero en aguas tranquilas.

A) 10 Km/h B) 12 Km/h C) 10,5 Km/h
D) 12,5 Km/h E) 15 Km/h

19. En el mismo momento en que el carnicero manda a su hijo a la panadería, el panadero manda al suyo a la carnicería, los 2 avanzan así el uno hacia el otro a rapidez constante. Cuando se cruzan, el hijo del carnicero ha recorrido 500 metros más que el otro. Para llegar entonces a sus objetivos, al primero le quedan solamente 10 minutos, mientras que al segundo le quedan 22,5 minutos. ¿Cuál es la distancia entre la panadería y la carnicería?

A) 1500 m B) 1800 m C) 2000 m
D) 2400 m E) 2500 m

20. Un alumno va a la academia todos los días en un ómnibus que viaja a 40 Km/h y siempre llega a tiempo, sin embargo hoy día llegó con un retraso de 10 minutos, debido a qué el ómnibus viajó a 30 Km/h. ¿A qué distancia de la academia toma el ómnibus?

A) 20 Km B) 24 Km C) 25 Km
D) 30 Km E) 40 Km

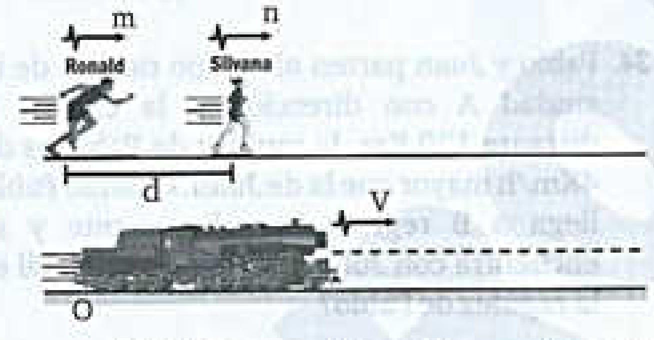
21. Dos autos parten el mismo tiempo, uno de A y el otro de B yendo hacia el encuentro. Al encontrarse, el que salió de A ha recorrido 16 Km más que el otro, pero a partir de ese momento el que salió de B cuadruplica su rapidez y llega a A al mismo tiempo que el otro llega a B. Entonces la distancia entre A y B es:

A) 50 Km B) 56 Km C) 54 Km
D) 48 Km E) 60 Km

22. El camino de A hacia B tiene un tramo cuesta arriba, un tramo en el llano y un tramo cuesta abajo. Un auto viaja a 60 Km/h si va cuesta arriba, a 90 Km/h si va cuesta abajo y a 72Km/h si va por el llano. Si el auto tarda 5 horas para ir de A hacia B y 4 horas para volver de B hacia A, ¿qué longitud tiene el camino entre A y B?

A) 320 Km B) 324 Km C) 360 Km
D) 340 Km E) 336 Km

23. El tren parte de la posición indicada con una rapidez V; en el mismo instante, parte Ronald al alcance de Silvana con las rapideces mostradas en la figura. Halle a que distancia de O alcanzará Ronald a Silvana. "m" y "n" con respecto al tren.



A) $d\frac{(V+m)}{m+n}$ B) $d\frac{(m-n)}{V+m}$ C) $d\frac{(m-n)}{2V+m}$
D) $d\frac{V}{m-n}$ E) $d\frac{(V+m)}{m-n}$

24. Desde A sale un auto con dirección a B, 4 horas después sale de A un segundo auto con rapidez de 80 Km/h. Estando ya a 40 Km del primero, el segundo se malogra y es reparado al cabo de 2 horas, continúa con la misma rapidez y logra alcanzar al primero luego de 3 horas de haber sido reparado. Halle la rapidez del primer auto.

A) 20 Km/h B) 25 Km/h C) 30 Km/h
D) 40 Km/h E) 60 Km/h

25. En una pista circular de 300 m, dos corredores parten juntos del mismo punto y en sentidos opuestos cruzándose al cabo de 20 minutos y 5 minutos después llega el más rápido al punto de partida. Halle la rapidez del más lento.

A) 20 m/min B) 25 m/min C) 30 m/min
D) 40 m/min E) 45 m/min

26. Un chofer tiene que ir desde el pueblo A al pueblo B. Si conduce a una rapidez de 30 Km/h llegaría a las 3 p.m. pero si conduce a 45 Km/h llegaría a la 1 p.m. ¿Cuál debe ser la rapidez a la que debe conducir para llegar a las 2 p.m.?

A) 32 Km/h B) 33 Km/h C) 35 Km/h
D) 36 Km/h E) 40 Km/h

27. Un auto sale de Cajamarca a las 5 p.m. y llega a Lima al día siguiente a las 2 p.m. Otro auto sale de Cajamarca a las 7 p.m. y llega a Lima al día siguiente a las 9 a.m. ¿A qué hora el segundo auto alcanzó al primero?

A) 10 p.m. B) 11 p.m. C) 1 a.m.
D) 2 a.m. E) 3 a.m.

28. Dos nadadores parten simultáneamente de un mismo extremo de una piscina de 120 m de largo con velocidades de 1 m/s y 2 m/s respectivamente. Si cada vez que llegan a un extremo no pierden tiempo al voltear, ¿cuántas veces se habrán cruzado, si estuvieron nadando durante 6 minutos?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

29. Cuando un alumno va de su casa al colegio caminando a 60 m/min demora 8 min menos que se caminara a 36 m/min. ¿Cuál es la distancia de la casa al colegio?

A) 600 m B) 720 m C) 640 m
D) 800 m E) 900 m

30. Tres autos A, B y C pasaron por un mismo punto y en el mismo sentido. El auto A pasó a las 5 a.m. con rapidez de 40 Km/h, el auto B pasó a las 6 a.m. con una rapidez de 60 Km/h y el auto C pasó a las 7 a.m. con una rapidez de 55 Km/h. ¿A qué hora el auto C equidista de los otros dos?

A) 7 p.m. B) 8 p.m. C) 6 p.m.
D) 10 p.m. E) 9 p.m.

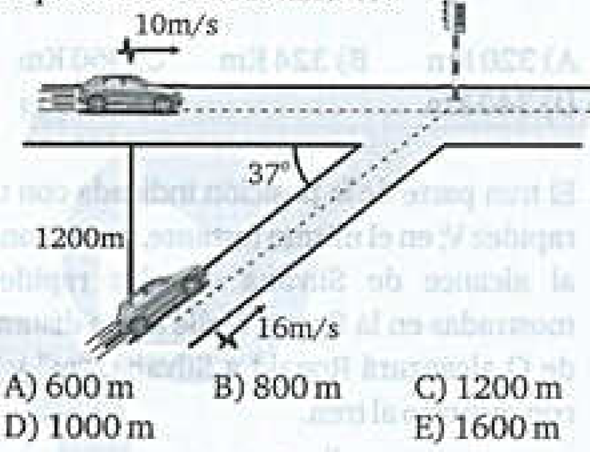
31. Un viajero se queda dormido cuando el carro en el que viaja está 30 Km detrás de una moto. Al cabo de 6 horas se despierta cuando el carro está 30 Km delante de la moto. ¿Cuál es la rapidez de la moto, si la rapidez del carro es 75 Km/h?

A) 60 Km/h B) 65 Km/h C) 50 Km/h
D) 70 Km/h E) 55 Km/h

32. Un padre y un hijo viven en la misma casa y trabajan en la misma fábrica. El padre demora 30 minutos para ir a la fábrica y su hijo 24 minutos. Cierto día el padre salió de su casa 5 minutos antes que su hijo, ¿cuánto tiempo empleará el hijo para alcanzar a su padre?

A) 12 min B) 16 min C) 18 min
D) 20 min E) 15 min

33. 2 autos separados inicialmente como se muestra en la figura, justo en ese instante el semáforo ubicado en la intersección de las avenidas Palermo con Torre Tagle empezó a mostrar la luz roja para el auto que se desplaza en la horizontal y verde para el otro auto, sabiendo que al paso de la señal roja a la verde dura 1 minuto. ¿Qué distancia los separa al cabo de 5 minutos?



A) 600 m B) 800 m C) 1200 m
D) 1000 m E) 1600 m

34. Pablo y Juan parten al mismo tiempo de la ciudad A con dirección a la ciudad B distante 120 Km, la rapidez de Pablo es de 4Km/h mayor que la de Juan. Cuando Pablo llega a B regresa inmediatamente y se encuentra con Juan a 30 Km de B. ¿Cuál es la rapidez de Pablo?

35. Una lancha cuando va por el río de A hacia B, a favor de la corriente, demora 6 horas y en regresar de B hacia A demora 30 horas. Una balsa que se deja llevar por el río de A hacia B, ¿en cuánto tiempo llegará?

A) 10 h B) 12 h C) 8 h
D) 15 h E) 20 h

36. Dos atletas están separados por una distancia de 1030 m. Los dos corren al encuentro, el primero a 65 m/min y el segundo a 85 m/min. Si el primero salió 2 minutos antes que el segundo y el encuentro se produjo a las 12 del mediodía, ¿a qué hora se puso a correr el segundo atleta?

A) 11: 50 B) 11: 54 C) 11: 52
D) 11: 48 E) 11: 40

37. Desde las ciudades A y B parten dos ciclistas en sentido contrario al encuentro uno del otro, se encuentran al cabo de cierto tiempo a 80 Km de A, si la rapidez de uno hubiera sido la del otro y viceversa se habrían encontrado a 180 Km del anterior encuentro. Calcule la distancia de las dos ciudades.

A) 300 Km B) 320 Km C) 400 Km
D) 340 Km E) 360 Km

38. Un chofer tiene que hacer un recorrido del pueblo A hasta el pueblo B, si conduce a una rapidez de 100 Km/h llegaría a las 3 p.m. y si conduce a 150 Km/h llegaría a las 1 p.m. ¿Cuál sería la rapidez, si debe llegar a las 2 p.m.?

A) 120 Km/h B) 125 Km/h C) 130 Km/h
D) 140 Km/h E) 135 Km/h

39. En el siguiente esquema AB = 3m y BC = 4m (ABCD es un rectángulo).

Un móvil recorre por el perímetro del rectángulo, y el otro por la diagonal iba y venía; si ambos automóviles tienen la misma rapidez de 1 m/s y parten al mismo tiempo de A y D respectivamente. ¿Cada cuánto tiempo se encuentran?

A) 35 s B) 24 s C) 45 s
D) 32 s E) 22 s

40. Un móvil pasa por "A" a las 6 a.m. y llega a "B" a las 4 p.m, otro pasa por B a las 7 a.m. y llega hacia A, a las 3 p.m. Si las distancias de "A" hasta "B" es $\overline{xyx}$ Km. ¿A qué hora se encontraron por el camino?

A) 11 a.m. B) 10 a.m. C) 12 a.m.
D) 9 a.m. E) 1 p.m.

41. En una competencia toman parte tres móviles A, B y C que han de desplazarse en una pista de 9600 m. A llega a la meta con una ventaja de 600 m sobre B y 1 min 40s antes que C, y B llega a 1 min 20s, antes que C. Calcular la suma de las tres velocidades en m/s.

A) 96 B) 76 C) 46
D) 86 E) 66

42. Un peatón recorre 23 Km en 7 horas, los 8 primeros con una velocidad superior en 1Km por hora a la velocidad del resto del recorrido. Calcular la velocidad con la que recorrió el primer trayecto.

A) 3 Km/h B) 5 Km/h C) 4 Km/h
D) 6 Km/h E) 7 Km/h

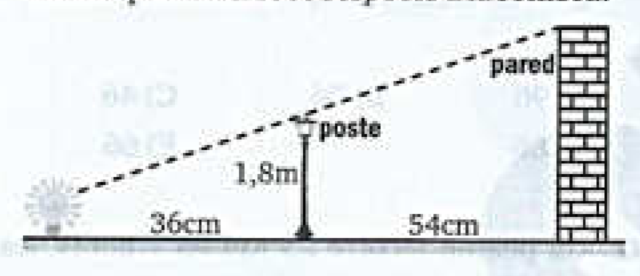
43. Dos corredores, Pedro y Juan parten simultáneamente de una ciudad a otra distante 60 kilómetros. La velocidad de Pedro es 4 Km menos que la de Juan. Después de llegar Juan a la segunda ciudad, emprende inmediatamente el viaje de regreso, y se encuentra con Pedro a 12 kilómetros de la ciudad de llegada. Cuál es la velocidad de Pedro

A) 6 Km/h B) 7 Km/h C) 8 Km/h
D) 9 Km/h E) 10 Km/h

44. Un autobús recorre su ruta en tres etapas iguales, usando en cada etapa una rapidez doble de la que utilizó en la etapa anterior demorando en total 21 horas. Cierto día observa que 2/5 de lo recorrido es igual a 7/5 de lo que falta por recorrer. Cuántas horas ha viajado hasta el momento.

A) 13 B) 15 C) 16
D) 19 E) 18

45. La siguiente figura muestra un foquito encendido que emerge desde l piso manipulado por un elemento mecánico a una rapidez constante, alcanzando una altura donde la sombra proyectada por el poste alcanza el punto más bajo en la pared. Halle la relación de la rapidez del foco respecto a la sombra.



A) 3/2 B) 3/8 C) 2/3
D) 3/4 E) 5/6

46. Un automóvil viaja durante 8 horas a la misma rapidez. En la hora siguiente, el auto viaja con una rapidez reducida a su mitad y durante la décima hora con una rapidez doble de la inicial. Si cubrió en total una distancia de 420 Km. ¿Con qué rapidez viajó en la décima hora?

A) 40 Km B) 60 Km C) 50 Km
D) 90 Km E) 80 Km

47. Un viajero parte en su automóvil a las 6 a.m. hacia un lugar durante 480 Km, 2 horas después hace una parada en la cual se da cuenta que la fracción transcurrida del día es igual a la fracción del camino que aún le falta recorrer. Que velocidad tiene el auto.

A) 100 Km/h B) 200 Km/h C) 300 km/h
D) 400 Km/h E) 160 km/h

46. Dos ciudades A y B distan 1200 Km una de la otra. Dos vehículos salen a la misma hora uno de la ciudad A y otro de la ciudad B, dirigiéndose uno al otro con movimiento uniforme y se encuentran en un punto M de la vía. A partir de dicho punto el que salió de A demora 5 horas para llegar a B y el que salió de B demora 20 horas en llegar hasta A. Calcular la distancia de M a B

A) 200 Km B) 300 Km C) 400 Km
D) 500 Km E) 600 Km

49. Cuando marchaba a lo largo de la lineal del tranvía observe que cada 20 min me alcanzaba uno de esos vehículos, y cada 5 minutos otro de ellos pasaba en dirección contraria. Tanto los vehículos como yo nos desplazamos con rapidez constante. ¿Cada cuántos minutos salían los tranvías de las estaciones terminales?

A) 8 min B) 4 min C) 15 min
D) 7 min E) 6 min

50. Matías y Fernando pasaron la noche en los refugios "A" y "B" respectivamente. A la mañana siguiente, Matías camina hacia B y Fernando hacia A, los dos van con rapideces constantes, y los dos recorren el mismo sendero que pasa por un bosque, Matías salió de A, a las 8:00 a.m. y llegó a B a las 11:00 a.m. Los dos entraron en el bosque a la misma hora (cada uno siguiendo su dirección); y uno de ellos salió del bosque 3 min. antes que el otro. ¿A qué hora salió Matías del bosque?

A) 9:30 a.m. B) 10:20 a.m. C) 10:10 a.m.
D) 9:50 a.m. E) 9:48 a.m.

Cronometría

CAPACIDADES

- Conocer y desarrollar estrategias para el cálculo de la hora.
- Vincular el tema con situaciones de la vida cotidiana.
- Reforzar y aplicar alguno conceptos algebraicos, geométricos y aritméticos en problemas específicos.
- Potenciar el ingenio y desarrollar una mayor rapidez en aplicaciones algorítmicas (método de resolución) relacionado con el tema.

ANTE LA NECESIDAD DE CALCULAR EL TIEMPO, en las antiguas civilizaciones se guiaban por el día y la noche o los ciclos de la luna.

El primer reloj creado por el hombre fue el solar que indicaba los momentos del día por la sombra del sol, estimándose que los Chinos lo usaron aproximadamente 3000 años antes de nuestra era, siendo empleado también por los incas y los egipcios. El inconveniente eran nulos en el amanecer, crepúsculo, noche y días nublados. Los Romanos marcaban velas en forma de regla para controlar el tiempo en la noche.

Las Clepsidras se usaron en Babilonia, Egipto, Grecia y Roma. Se guiaban por medio de agua que pasaba de un recipiente graduado a otro. Siendo este sistema el antecesor al reloj de arena. El Reloj de Arena se destacó en el siglo III. Consistía en dos recipientes esféricos de vidrio unidos con un estrecho canal que unía ambas partes llegando a poder controlar todo un día.

Leonardo da Vinci, Galileo, Huygens, Hooke y muchos más aportaron sus conocimientos e inventiva con cambios y perfeccionamiento en el reloj mecánico.

El primer motor de reloj fue el de pesas creado por Pacífico en el siglo VIII. En la década del año 1300 fue posible ver estos relojes en iglesias de Europa. El reloj más antiguo se conserva en la Catedral de Salisbury.

En 1641 Galileo concibió el principio de las oscilaciones de un péndulo desarrollando el proyecto, pero la construcción del primer reloj mecánico de péndulo fue llevado a cabo por Huygens en 1657, asombrando las oscilaciones rítmicas pendulares y la dulce solemnidad del campanario.

El siglo XX ha tecnificado notablemente la industria, la producción seriada desplazó la mano de obra, la robótica suplanta al ser humano, el cuarzo y sistemas numéricos reemplaza la electromecánica y la fibra óptica está a la orden del día ofreciendo una elevada tecnología.

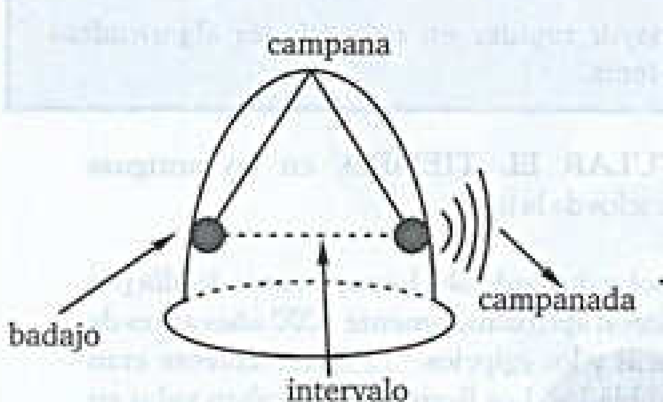
INTRODUCCIÓN

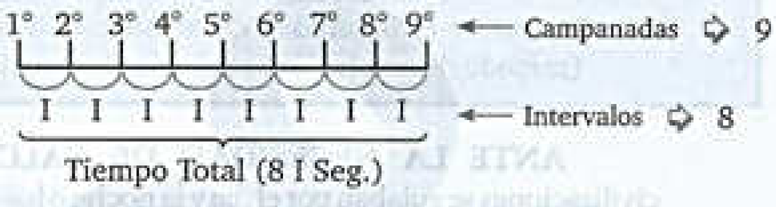
Los principales aspectos que veremos en el desarrollo del capítulo serán:

- Problemas sobre campanadas
- Problemas sobre tiempo transcurrido y por transcurrir
- Problemas sobre adelantos y atrasos
- Relación entre la hora y el ángulo que forman las manecillas de reloj

PROBLEMAS SOBRE CAMPANADAS

Observemos el siguiente esquema:



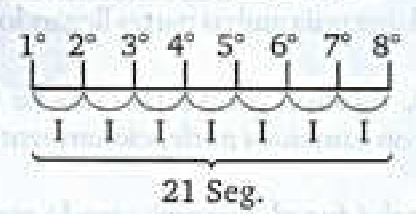


∴ # Campanadas = # Intervalos + 1

T. Total = # Intervalos × Tiempo de c/Intervalo

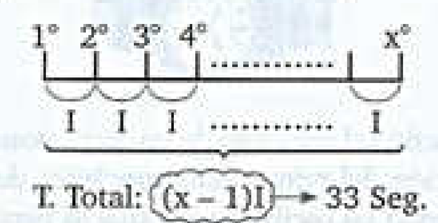
Ejemplo: Un reloj indica las horas con igual número de campanas. Si para indicar las 8 tardó 21 segundos ¿Qué hora indicó cuando tardó 33 segundos?

Resolución: Si indica las 8 a.m debe tocar 8 campanas.



⇨ $7I = 21 \rightarrow I = 3s$

Supongamos que a la hora: x tardó 33seg.



Pero por dato: $(x-1).\cancel{3} = \cancel{33}$

$x = 12$

∴ Indicó la hora 12

NOTA "8"

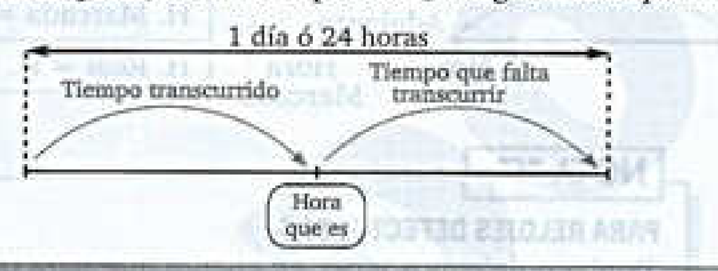
Al aplicar la regla de 3. Se debe trabajar con los intervalos y el tiempo.

Campanadas	Intervalos	Tiempo
8	7	21 s
x	x − 1	33 s

$\therefore\ x = 12$

PROBLEMAS SOBRE TIEMPO TRANSCURRIDO Y POR TRASCURRIR

Para este tipo de problemas emplear, de manera práctica, el siguiente esquema:

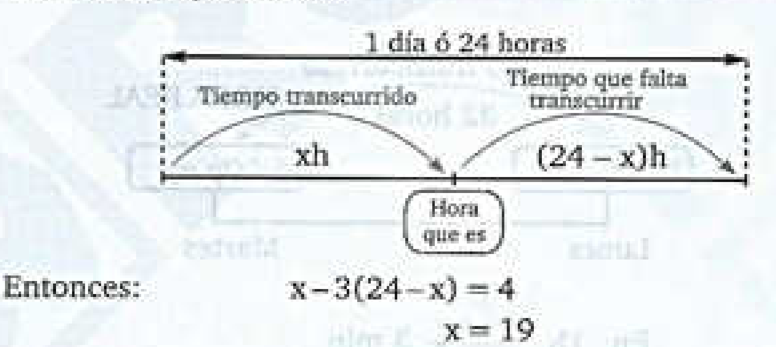


NOTA "8"

No siempre se va trabajar sobre un día puede ser la hora, el año, el mes, etc.

Ejemplo 1: Las horas trascurridas del día exceden en 4 al triple de las horas que quedan por transcurrir, ¿qué hora es?

Resolución:



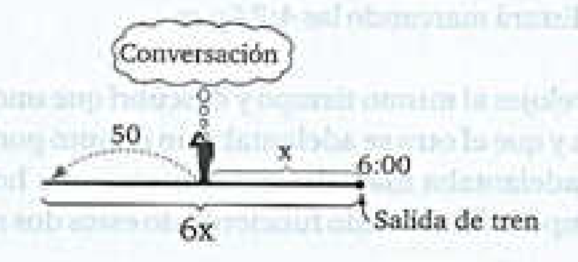
Entonces: $x - 3(24 - x) = 4$

$x = 19$

$\therefore$ 19:00 ó 7:00 p.m

Ejemplo 2: ¿A donde vas tan deprisa?, preguntó Liliana - Al tren de las seis - respondió Gaby. ¿Cuántos minutos quedan hasta su salida? Volvió ha preguntar Liliana - Sólo te puedo decir que hace 50 minutos quedaban 5 veces más minutos de los que ahora quedan. ¿A qué hora ocurrió la conversación?

Resolución:



$\Rightarrow$ 50 min + x min = 6x min

$\rightarrow$ x = 10 min

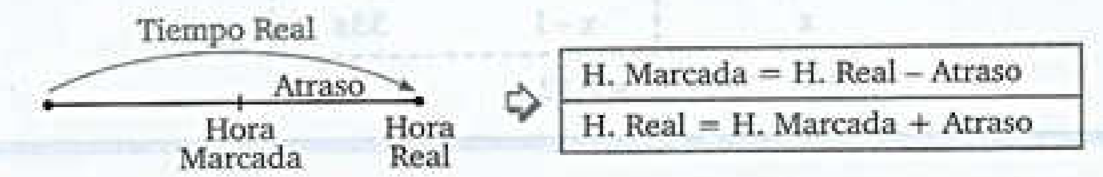
La conversación ocurrió 10 min antes de las 6:

$\therefore$ 5:50

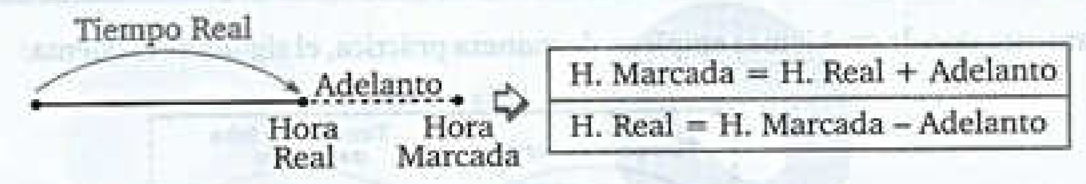
PROBLEMAS SOBRE ADELANTOS Y ATRASOS

Debemos tener presente, que para hallar el número de minutos acumulados en el atraso o adelanto se aplicará una regla de tres simple y tener presente el siguiente esquema:

- Cuando el reloj se atrasa:



- Cuando el reloj se adelanta:



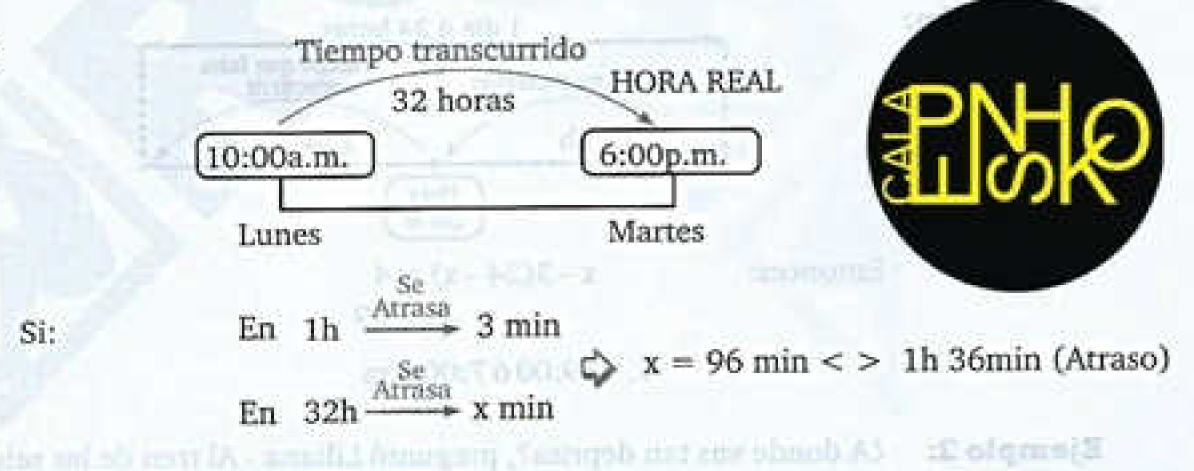
NOTA "S"

PARA RELOJES DEFECTUOSOS

También debemos tener en cuenta que para que un reloj vuelva ha marcar la hora correcta nuevamente éste debe adelantarse o atrasarse 12h o 720 min

Ejemplo A partir de las 10 a.m de hoy lunes un reloj empieza a atrasarse por cada hora 3 minutos. ¿Qué hora estará marcando el día martes a las 6 p.m?

Resolución:



Si: En 1h $\xrightarrow{\text{Se Atrasa}}$ 3 min

En 32h $\xrightarrow{\text{Se Atrasa}}$ x min

⇨ x = 96 min < > 1h 36min (Atraso)

Hora real = 6:00 p.m.
Atraso = 1h 36 min
Hora Marcada = ??

⇨ H. Marcada = 6:00 – 1h 36 min
H. Marcada = 4:24 p.m.

∴ Estará marcando las 4:24 p.m.

Ejemplo: Puse en marcha dos relojes al mismo tiempo y descubrí que uno de ellos se atrasaba dos minutos por hora y que el otro se adelantaba un minuto por hora. Cuando volví a fijarme, el que se adelantaba marcaba exactamente una hora más que el otro. ¿Durante cuánto tiempo habían estado funcionando estos dos relojes?

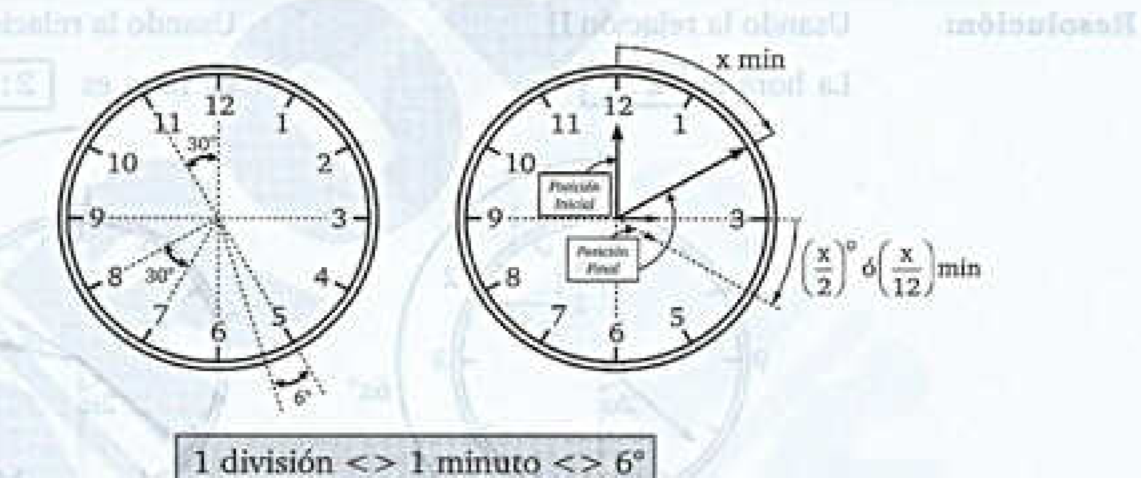
Resolución: A: Se atrasa 2 min por hora
B: Se adelanta 1 min por hora
Eso quiere decir que cada hora "B" se le saca 3 min de ventaja a "A".
En 1h:

Como uno ya le lleva 1h de ventaja al otro (es decir 600)

$$1h \xrightarrow{\text{Ventaja}} 3\text{ min}$$
$$xh \xrightarrow{\text{Ventaja}} 60\text{ min}$$
$$\Rightarrow x = \frac{60}{3} = 20h$$

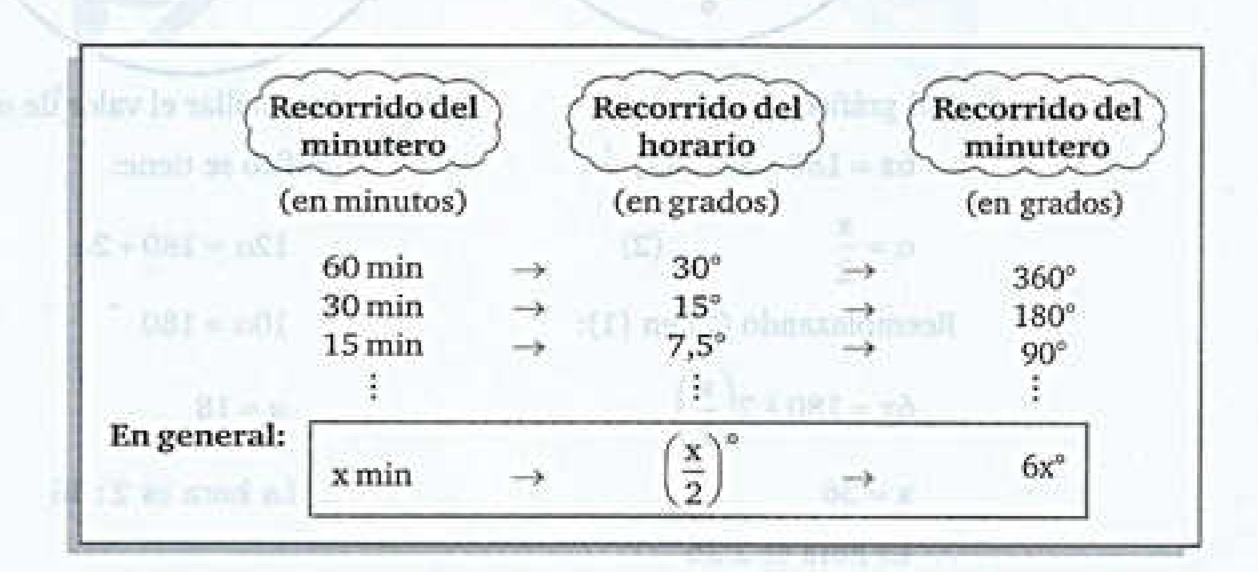
$\therefore$ Estaban funcionando 20 h

RELACIÓN ENTRE LA HORA Y EL ÁNGULO FORMADO POR LAS MANECILLAS DEL RELOJ



1 división <> 1 minuto <> 6°

I)



Recorrido del minutero (en minutos)		Recorrido del horario (en grados)		Recorrido del minutero (en grados)
60 min	→	30°	→	360°
30 min	→	15°	→	180°
15 min	→	7,5°	→	90°
⋮		⋮		⋮
En general: x min	→	$\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$	→	6x°

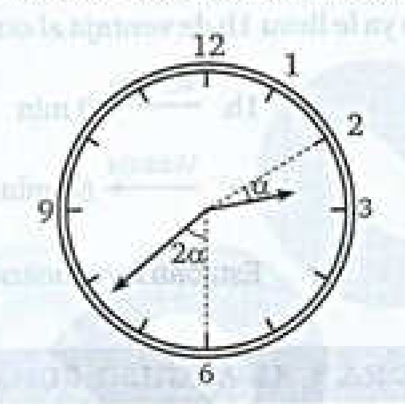
II)

Angulo barrido por el horario	Angulo barrido por el minutero
30°	360° <> 60 min
1°	12° <> 2 min

La relación sería:

Horario : $\alpha°$ → Minutero : $12\alpha°$ <> 2α min

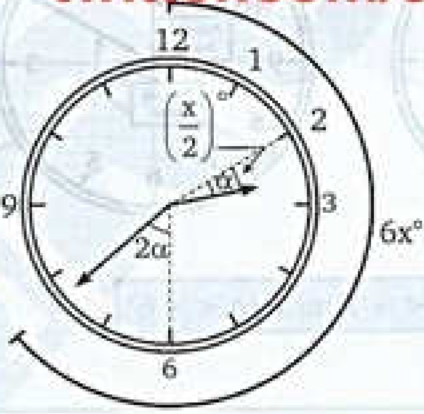
Ejemplo: Según el gráfico mostrado, ¿qué hora indica el reloj?



Resolución:

Usando la relación I)

La hora es 2 : x



Del gráfico :

$6x = 180 + 2\alpha$ ....(1)

$\alpha = \dfrac{x}{2}$ .....(2)

Reemplazando (2) en (1):

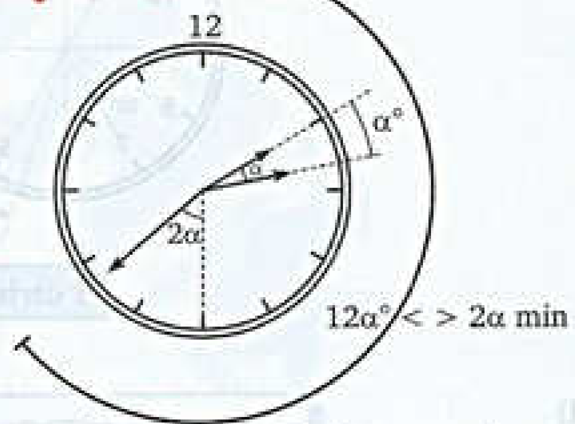
$6x = 180 + 2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$x = 36$

∴ La hora es 2:36

Usando la relación II)

La hora es 2 : 2α



Para hallar el valor de α, en el gráfico se tiene:

$12\alpha = 180 + 2\alpha$

$10\alpha = 180$

$\alpha = 18$

∴ La hora es 2 : 36

En algunos problemas, es conveniente emplear la siguiente fórmula.

a. Cuando el horario adelanta al minutero.

$$\alpha = 30H - \frac{11}{2}M$$

b. Cuando el minutero adelanta al horario.

$$\alpha = \frac{11}{2}M - 30H$$

Es necesario que el lector, antes de emplear la fórmula, lo demuestre, basándose en las relaciones dadas anteriormente.

NOTA "S"

* El ángulo que se debe considerar para el uso de la fórmula es de la aguja que está más cercana de la marca de las 12 hacia la otra aguja en sentido horario.
* Cuando se va a aplicar la fórmula para hallar el ángulo entre las manecillas hay que considerar 12 como 0.

Ejemplo: ¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj a las 2:38?

Resolución: Primero graficaremos, para ver en que caso estamos.

Hora H: M
Hora 2: 38

En el gráfico, el minutero adelanta al horario

$$\alpha = \frac{11}{2}M - 30H$$

$$\alpha = \frac{11}{2}(38) - 30(2) = 209 - 60$$

$$\therefore\ \alpha = 149°$$

NOTA "S"

Si pidieran el mayor ángulo que forman las agujas a las 2:38

β: mayor ángulo.

$\beta = 360 - 149$

$\therefore\ \beta = 211°$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. El campanario de una iglesia toca seis campanadas en 10 segundos, ¿en cuánto tiempo tocará 12 campanadas?

Rpta.: ....

2. El tiempo transcurrido del día excede en 6 horas al tiempo que falta para acabar el día. ¿Qué hora es?

Rpta.: ....

3. Son las 10 a.m. y un reloj empieza a adelantarse 3 minutos cada hora.¿Qué hora marcará este reloj dentro de seis horas?

Rpta.: ....

4. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 8h 20min?

Rpta.: ....

5. ¿A qué hora entre las 5 y las 6, las manecillas del reloj forman un ángulo recto por primera vez?

Rpta.: ....

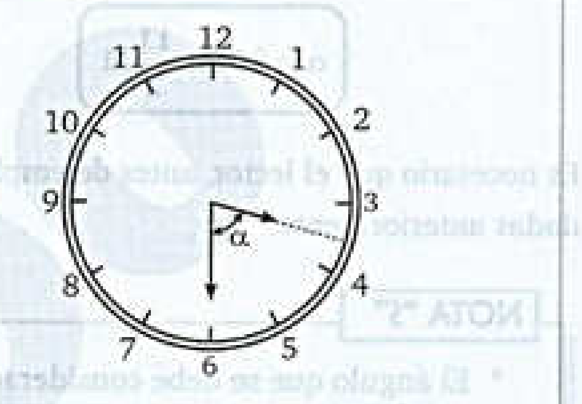
6. Siendo las 6:00 a.m. un reloj empezó a adelantarse 3 minutos cada hora. ¿Cuántos minutos de adelanto tendrá a las 4:00 p.m.?

Rpta.: ....

7. El campanario de una iglesia toca 10 campanadas en 18 segundos, ¿en cuánto tiempo tocará 15 campanadas?

Rpta.: ....

8. Hallar "α":



Rpta: ....

9. Hallar "α":

Rpta: ....

10. Si los ángulos formados por las agujas de un reloj están en relación de 1 a 5. ¿Cuál es la medida del menor ángulo?

Rpta: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Un reloj indica la hora con igual número de campanadas. Si para indicar que son las 4:00 demoró 5s, ¿qué hora habrá señalado en otro momento el cual de moró 10s para indicar la hora?

Resolución: Una manera práctica de desarrollar este tipo de problemas es empleando el siguiente cuadro.

Hora	N° campanadas	N° Intervalos	Tiempo total
4	4	3	5
x	x	x − 1	10

(−1: de N° campanadas a N° Intervalos)

$$3\times10=(x-1).5$$

$$x=7$$

∴ La hora que habrá señalado es 7:00 horas.

PROBLEMA 2 Un reloj indica la hora con tantas campanadas con el doble del número de horas que indica. Si a las 5 demoró 18 segundos, ¿qué hora será cuando para indicar la hora demore 42 segundos?

Resolución: En la tabla ubicamos los datos del problema.

Hora	N° campanadas	N° Intervalos	Tiempo total
5	10	9	18
x	2x	2x − 1	42

(×2: de Hora a N° campanadas; −1: de N° campanadas a N° Intervalos)

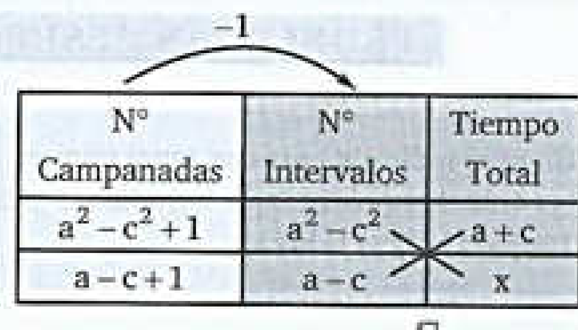
$$9.(42)=18.(2x-1)$$

$$x=11$$

∴ Será las 11 horas.

PROBLEMA 3 El reloj de Valeria toca (a^2-c^2+1) campanadas en $(a+c)$ seg. ¿Cuánto tardará en tocar $(a-c+1)$ campanadas? $(a\neq c)$

Resolución:


(−1)

N° Campanadas	N° Intervalos	Tiempo Total
a^2-c^2+1	a^2-c^2	$a+c$
$a-c+1$	$a-c$	x

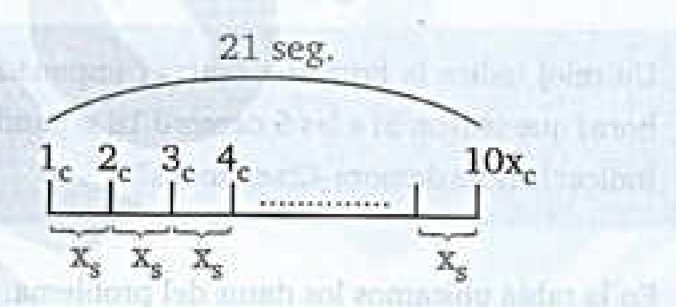
$$x=\frac{(a-c)(a+c)}{a^2-c^2}$$

$$x=\frac{a^2-c^2}{a^2-c^2}$$

$\therefore\ x=1$

PROBLEMA 4 El campanario de una iglesia estuvo tocando durante 21 s. Si se escucharon tantas campanadas como 10 veces el tiempo que hay entre campanada y campanada. ¿Cuanto tiempo empleará ese campanario para tocar 11 campanadas?

Resolución:



Tiempo total = N° Intervalos × tiempo de c/intervalo

Dato: $21=(10x-1)\times x$

$$10x^2-x-21=0$$

$$\begin{matrix}5x & +7\\ 2x & -3\end{matrix}\quad \begin{matrix}x=-7/5\\ x=3/2\end{matrix}$$

Tiempo total para 11 campanadas $=10\times\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ Tiempo total para 11 campanadas $=15$ seg.

NOTA "S"

* Tiempo que hay entre campanada y campanada: x
* N° de campanadas: 10x
* N° de intervalos: 10x −1

PROBLEMA 5 La mitad del tiempo transcurrido del día es igual a la sexta parte de lo que falta transcurrir. ¿Qué hora es?

Resolución: De los datos:

Planteando:

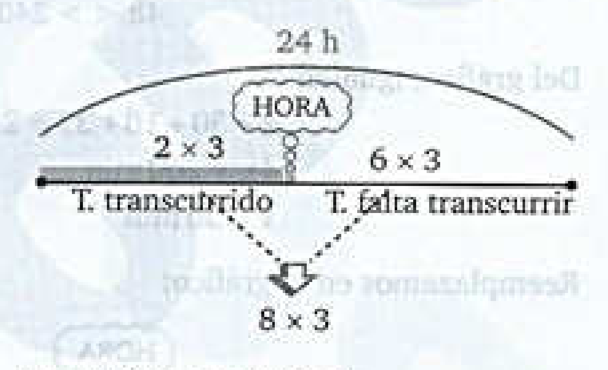
$$\frac{x}{2} = \frac{24 - x}{6}$$

$$3x = 24 - x$$

$$4x = 24$$

$$\therefore \; x = 6$$

Otra forma: Por proporciones:

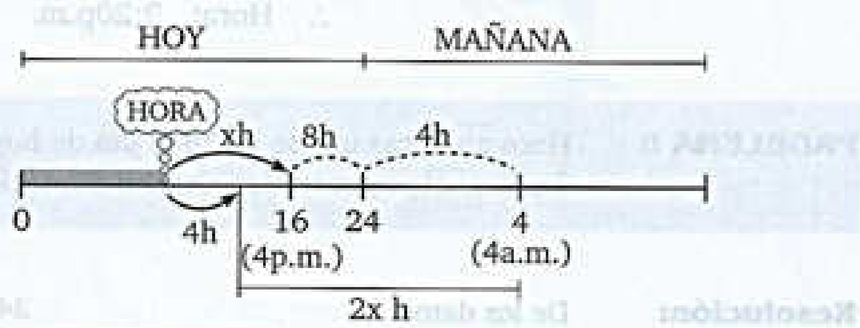


∴ Hora: 6 (transcurrido)

PROBLEMA 6 Si lo que falta para las 4 p.m. es igual a la mitad de lo que faltará para las 4 a.m. de mañana dentro de 4 horas. ¿Qué hora es?

Resolución:

De los datos:



Del gráfico se observa:

$$x + 8 + 4 = 4 + 2x$$

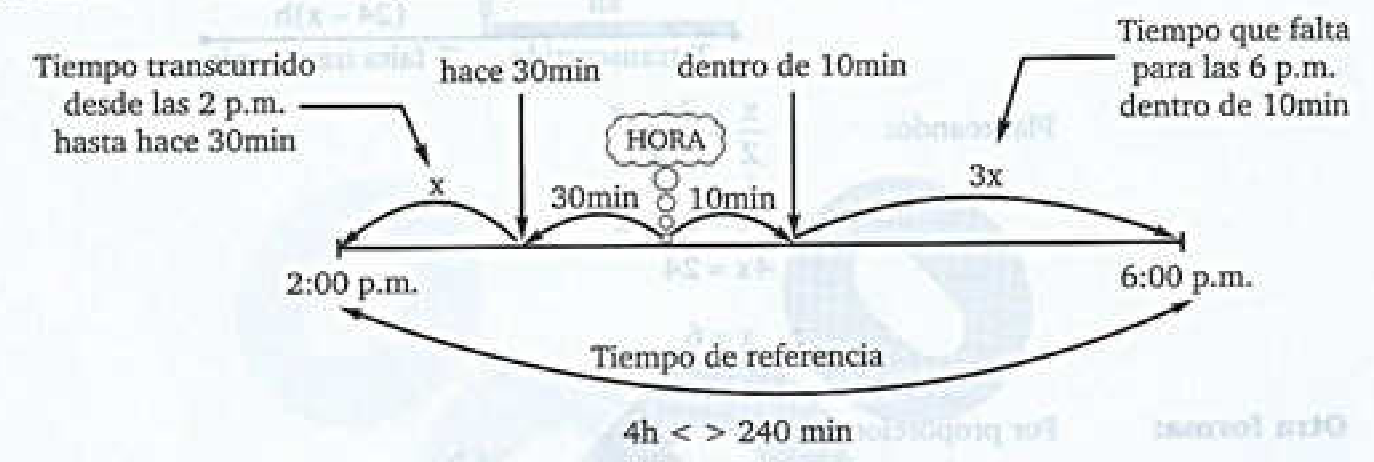
$$8 = x$$

∴ La hora se encuentra 8h antes de las 16h es decir:

$$16 - 8 = 8 \text{ a.m.}$$

PROBLEMA 7 Dentro de 10 minutos, faltará para las 6:00 p.m. tantos minutos como el triple del número de minutos que había transcurrido desde las 2:00 p.m. hasta hace 30 minutos. ¿Qué hora es?

Resolución: Tenemos el siguiente gráfico:



4h < > 240 min

Del gráfico, igualamos:

$$x + 30 + 10 + 3x = 240\,\text{min}$$
$$4x = 200\,\text{min}$$
$$x = 50\,\text{min}$$

Reemplazamos en el gráfico:

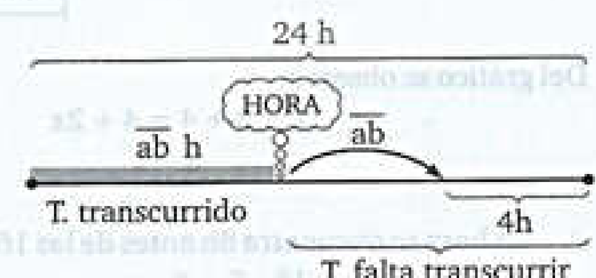
Hora: 2:00p.m. + 80min

Hora: 2:00p.m. + 1h20min

∴ Hora: 3:20p.m.

PROBLEMA 8 Hace $\overline{ab}$ horas que se inició el día de hoy y dentro de $\overline{ab}$ horas faltarán 4 h para finalizar el presente día. ¿Qué hora será dentro de a + b horas, si es impar?

Resolución: De los datos:



Se deduce: $\overline{ab} + a \times b = 20$

$10a + b + ab = 20$

1er caso (a = 1): $10 + 2b = 20 \rightarrow b = 5$

➪ HORA: 15h, dentro de 6h (a + b) = 21 h (IMPAR) ✓

2do caso (a = 2): $20 + 3b = 20 \rightarrow b = 0$

➪ HORA: 20h, dentro de 2h (a + b) = 22 h(PAR) ×

∴ Será 21 h

PROBLEMA 9 En 1988 antes del mediodía Dora se dio cuenta que las horas transcurridas del año excedían en 500 horas a las horas que faltaban transcurrir. Indicar la fecha y la hora en que Dora hizo dicha observación.

Resolución:

Planteando: $24x - 24(366 - x) = 500$

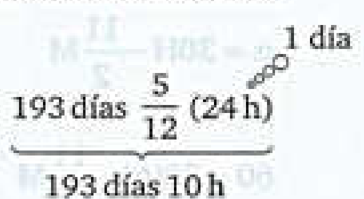
$$x = \frac{2321}{12} = 193\frac{5}{12} \text{ días}$$

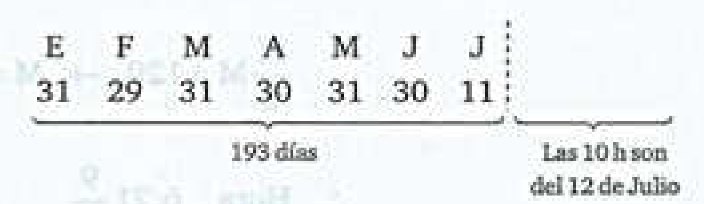
NOTA "S"

1988 año bisiesto

ya que : $88 = \overset{\circ}{4}$

El tiempo transcurrido desde el inicio es:



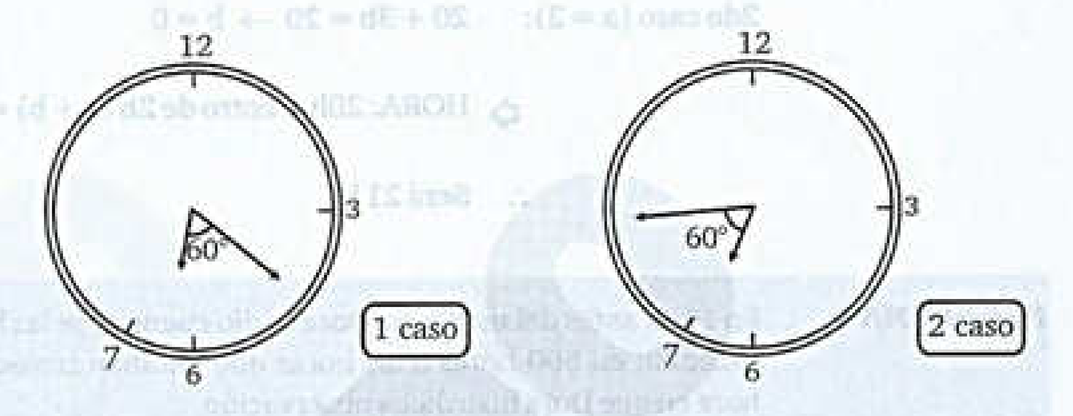


E	F	M	A	M	J	J
31	29	31	30	31	30	11

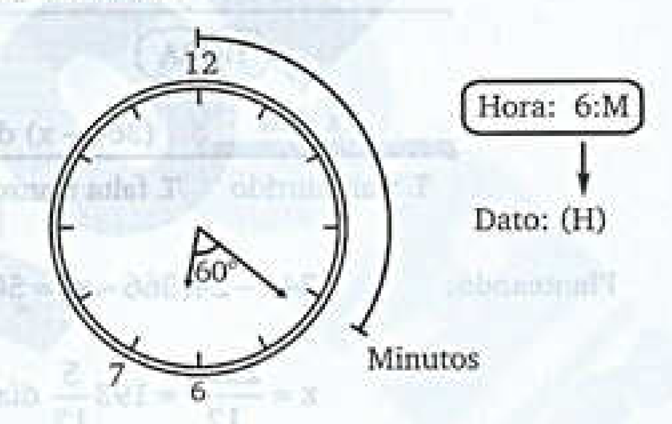
∴ 12 de julio

PROBLEMA 10 ¿A qué hora entre las 6 y las 7 las agujas de un reloj forman un ángulo de 60° por primera vez?

Resolución: Veamos los dos casos en que las agujas forman un ángulo de 60° entre las 6 y las 7.



Como nos piden la primera vez que las agujas formaron un ángulo de 60° nos quedamos con el primer caso.



El horario adelanta al minutero.

$$\alpha = 30H - \frac{11}{2}M$$

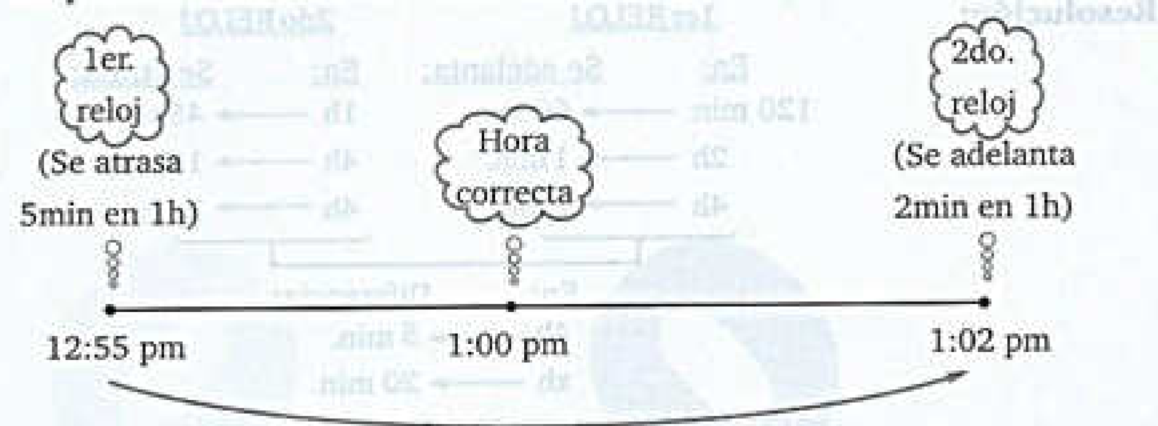
$$60 = 30(6) - \frac{11}{2}M$$

$$\frac{11}{2}M = 120 \rightarrow M = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$$

$$\therefore \text{ Hora } \quad 6{:}21\frac{9}{11}$$

PROBLEMA 11 Un reloj se atrasa 5 minutos cada hora y otro se adelanta 2 minutos cada hora. Si ambos se sincronizan a las 12:00, ¿después de cuántas horas el segundo estará adelantado 35 minutos respecto del primero?

Resolución: Después de una hora de funcionar ambos relojes se observa:



Se observa que en 1h los relojes defectuosos tienen una diferencia o uno adelanta al otro en 7 min.

Entonces:
Sea "x" horas que transcurren para una diferencia de 35 min.

En:	Diferencia acumulada:
1 h	7 min
x h	35 min

$$\therefore \quad x = \frac{35}{7} = 5h$$

PROBLEMA 12 Siendo las 8:00 a.m. un reloj empezar a adelantarse a razón de 2 minutos cada hora. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir como mínimo para que vuelva a marcar la hora correcta?

Resolución:

NOTA "S"

Para que un reloj defectuoso que se atrasa o se adelanta vuelva a marcar la hora correcta, nuevamente debe acumular un adelanto o un atraso de: 12h < > 720min

En:	Se adelanta:
1 h ⟶	2 min.
x h ⟶	720 min.

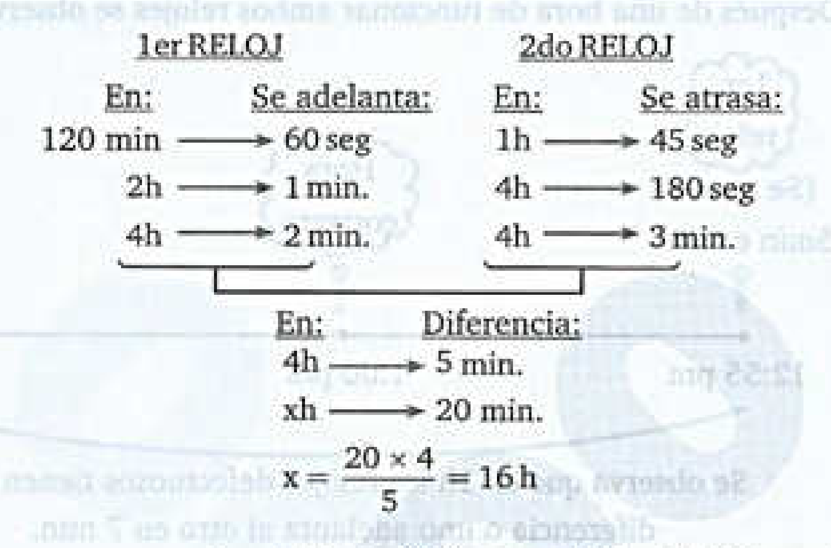
$$\Rightarrow x = \frac{720}{2} = 360\,h$$

Pasando a días: $\frac{360}{4} = 15$ días

$\therefore$ Marcar la hora correcta después de 15 días

PROBLEMA 13 El guardián de una fábrica sincroniza dos relojes a las 2 a.m. Uno de ellos se adelanta 12 segundos cada 24 minutos y el otro se atrasa 45 segundo cada hora. Cuando vuelve a mirar los relojes, observa que la diferencia entre la hora del reloj adelantado y la hora que marca el reloj atrasado es de 20 minutos. ¿Qué hora es realmente?

Resolución:

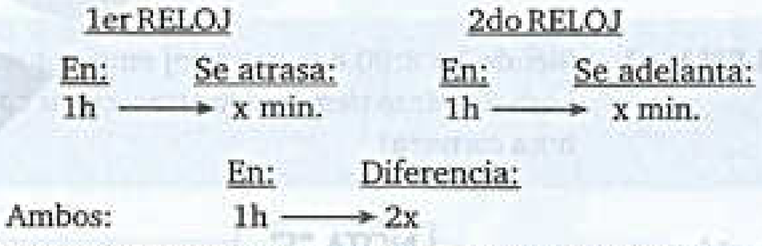


$$x = \frac{20 \times 4}{5} = 16\,h$$

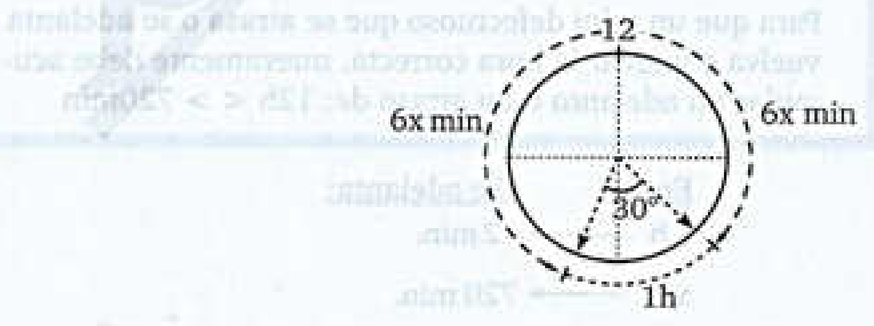
∴ La hora: 2:00 a.m. + 16 h = 18:00 p.m. < > 6:00 p.m.

PROBLEMA 14 Un reloj se atrasa tanto como el otro se adelanta. Si inicialmente marcaban las 12 y luego de 6 horas el ángulo formado por ambos horarios es 30°, Hallar la hora marcada para el segundo reloj en dicho momento.

Resolución:



Luego de 6 h se habrán separado 6(2x min) = 12x min pero según dato:



La separación de ambos horarios debe ser de 11h:

$$12x \text{ min} = 11(60 \text{ min}) \rightarrow x = 55$$

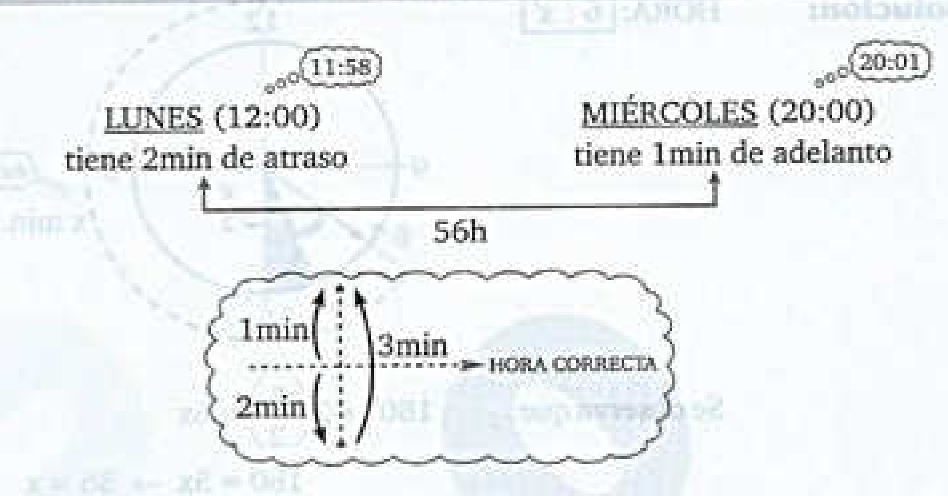
Para el 2do reloj: Partió de las 12m y en 6h se habrá adelantado:

$$6\ (55\text{min}) = 330 \text{ min} <> 5h\ 30\text{min}$$

∴ H. Marcada: 12:00 + 6h + 5h 30 min = 23:30 min <> 11:30 p.m.

PROBLEMA 15 Antonio advirtió el lunes a las 12:00 p. m. que su reloj marcaba 11:58 a. m. ; el miércoles a las 8:00 p.m. observó que su reloj marcaba 8:01 p.m. ¿Qué día y a qué hora marcó la hora correcta?

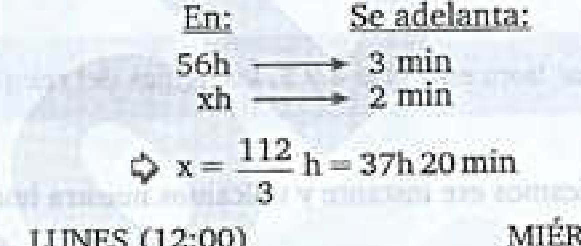
Resolución:



Observamos que en 56h su reloj se adelantó 3 min y para que marque la hora correcta sólo debe adelantarse 2 min.

En:	Se adelanta:
56h ⟶	3 min
xh ⟶	2 min

$$\Rightarrow x = \frac{112}{3} h = 37h\ 20\,min$$



∴ Marcó la hora correcta el día miércoles a las 1:20 a.m.

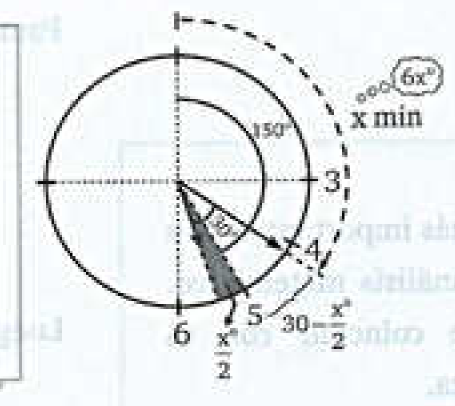
PROBLEMA 16 ¿A qué hora entre las 5 y las 6 las manecillas de un reloj forman un ángulo de 30° po primera vez?

Resolución: HORA: $\boxed{5 : x'}$

NOTA "S"

Relación Usada

Tiempo	Ángulo barrido por el horario	Ángulo barrido por el minutero
$x_{min.}$	$\left(\frac{x}{2}\right)^{\circ}$	$6x^{\circ}$



$$\Rightarrow 6x + 30 - \frac{x}{2} = 150°$$

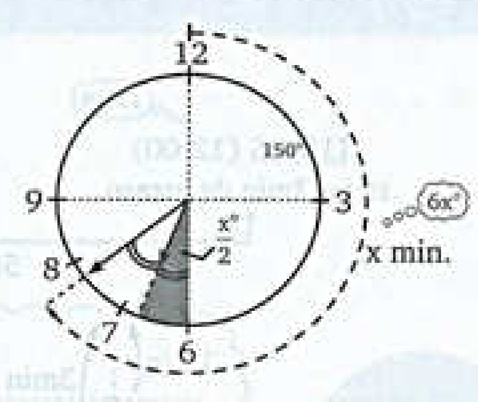
$$\frac{11x}{2} = 120$$

$$x = \frac{240}{11} = 21\tfrac{9}{11}$$

∴ Hora: $5 : 21\tfrac{9}{11}$ min

PROBLEMA 17 ¿A qué hora inmediatamente después de las 6:00 al minutero adelanta al horario tanto como el horario adelanta a la marca de las 6?

Resolución: HORA: $\boxed{6 : x'}$



Se observa que: $180° + 2\left(\frac{x}{2}\right) = 6x$

$180 = 5x \rightarrow 36 = x$

$\therefore$ Hora: 6 : 36

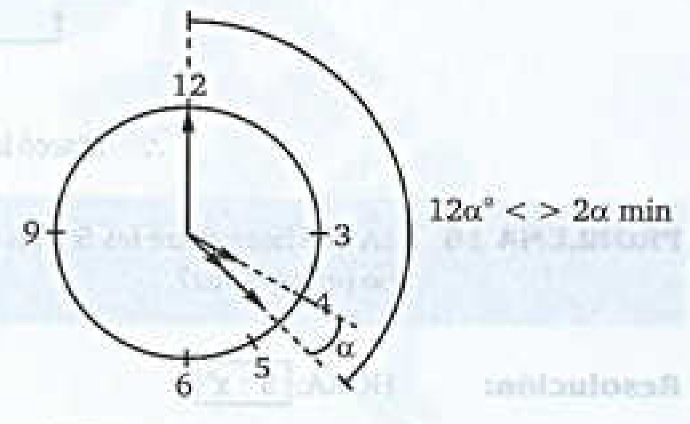
PROBLEMA 18 ¿A qué hora entre las 4 y 5, las agujas del reloj están superpuestas?

Resolución: Graficamos ese instante y ubicamos nuestra hora de referencia a las 4:00

NOTA "S"

Relación usada:

Horario: α° Min:12x° < > 2x min



Para hallar el valor de α, observemos el gráfico

$12\alpha = 120 + \alpha$

$11\alpha = 120$

$\alpha = \frac{120}{11} \rightarrow 2\alpha = \frac{240}{11}$

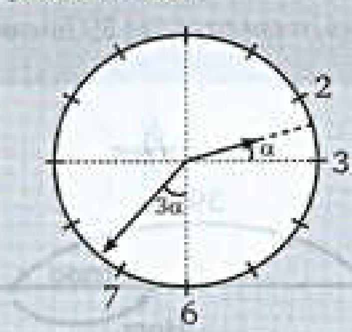
Luego, la hora será: $4: \frac{240}{11}$

$\therefore$ Hora es $4{:}21\,\frac{9}{11}$

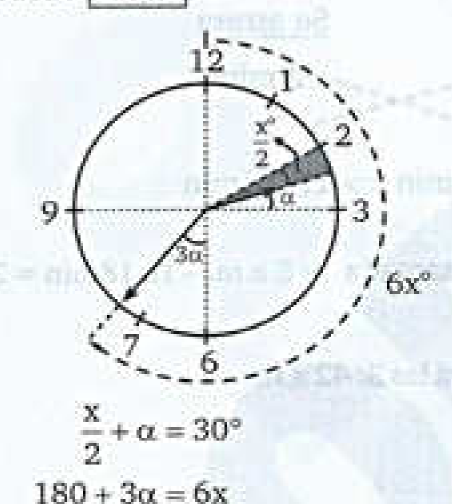
NOTA "S"

No olvides que lo más importante no es la gráfica sino el análisis matemático. Tu resultado debe coincidir con tu aproximación gráfica.

PROBLEMA 19 ¿Qué hora es en el siguiente reloj?



Resolución: HORA: 2 : x



NOTA "S"

Relación usada

Tiempo	∠ barrido H	∠ barrido M
x min	$\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$	$(6x)^\circ$

$$\frac{x}{2}+\alpha=30^\circ$$

$$180+3\alpha=6x$$

Resolvemos ambas ecuaciones:

$$180+3\left[30-\frac{x}{2}\right]=6x$$

$$x=36$$

∴ Hora: 2 : 36

PROBLEMA 20 Un reloj en lugar de tener 12 divisiones, sólo tiene 15 y gira una sola vez en torno a su eje en un día. ¿Qué hora indicara este reloj cuando sean las 4 p.m.?

Resolución: Por regla de tres: 1 día: 24 h 1 día: 15 h

RELOJ NORMAL	NUEVO RELOJ (NUEV. HORAS)
24	15
(4 pm) 16	x

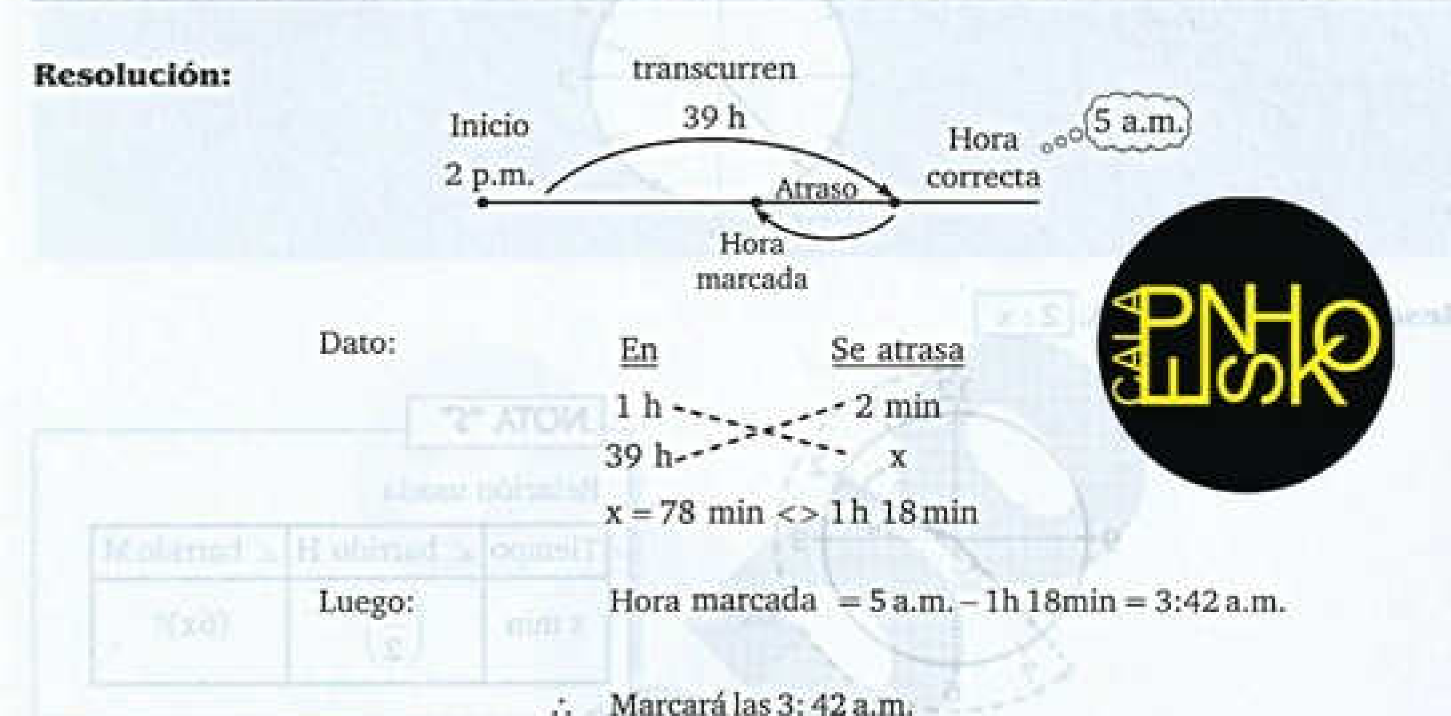
$$\Rightarrow x=\frac{16\times 15}{24}$$

$$x=10$$

∴ Hora en el nuevo reloj: 10 : 00

PROBLEMA 21 Un reloj se atrasa 2 minutos por cada hora transcurrida. Si comienza a funcionar a las 2 p.m. entonces, transcurridas 39 horas, sus agujas marcarán las:

Resolución:



Dato:

En	Se atrasa
1 h	2 min
39 h	x

$x = 78$ min <> 1h 18 min

Luego: Hora marcada $= 5$ a.m. $-$ 1h 18min $= 3{:}42$ a.m.

$\therefore$ Marcará las 3: 42 a.m.

PROBLEMA 22 Un reloj digital marca la hora en el formato horas: minutos, desde las 00:00 hasta las 23:59. Si en determinado momento muestra las 20:08, ¿cuántos minutos deben pasar como mínimo para que aparezcan de nuevo los mismos 4 dígitos en el reloj, en algún orden?

Resolución: Hora marcada: 20:08

x: minutos que deben pasar como mínimo para que aparezcan de nuevo los mismos 4 dígitos en el reloj, en algún orden.

Las posibilidades son: 00:28 ; 02:08 ; 08:02 ; 08:20

Así que la más cercana es 00:28

Desde: 20:08 a 24:00 hay 3horas y 52 minutos $= 3(60)+52 = 232$ minutos

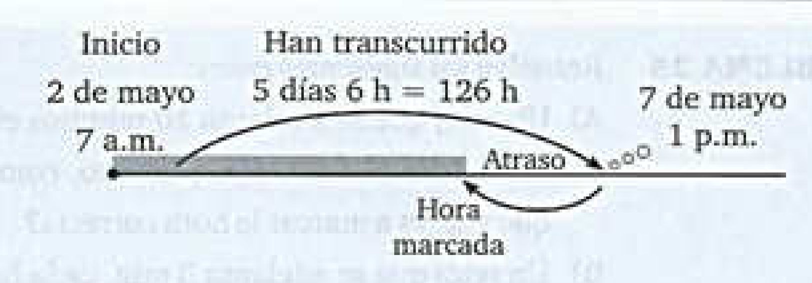
Desde: 00:00 a 00:28 hay 28 minutos, entonces:

$$x = 232 + 28 = 260$$

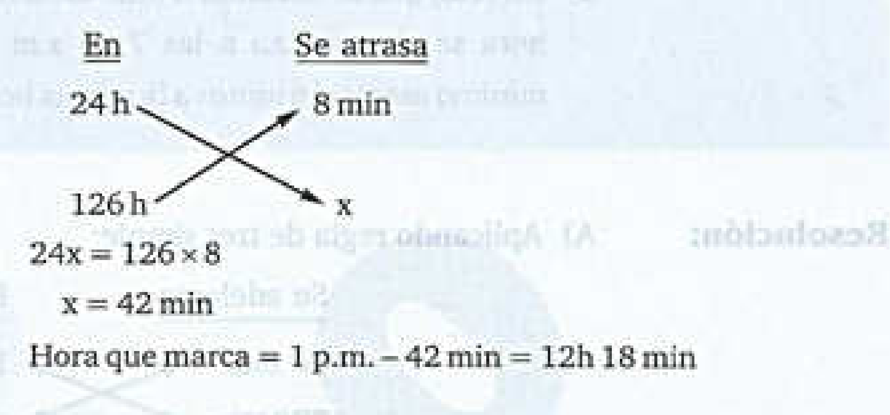
$\therefore$ Deben pasar 260 minutos.

PROBLEMA 23 Un reloj se atrasa 8 minutos cada 24 horas. Si éste marca la hora correcta 7 a.m. el 2 de mayo, ¿qué hora marcará a la 1 p.m. del 7 de mayo?

Resolución:



Dato: En / Se atrasa



$24x = 126 \times 8$

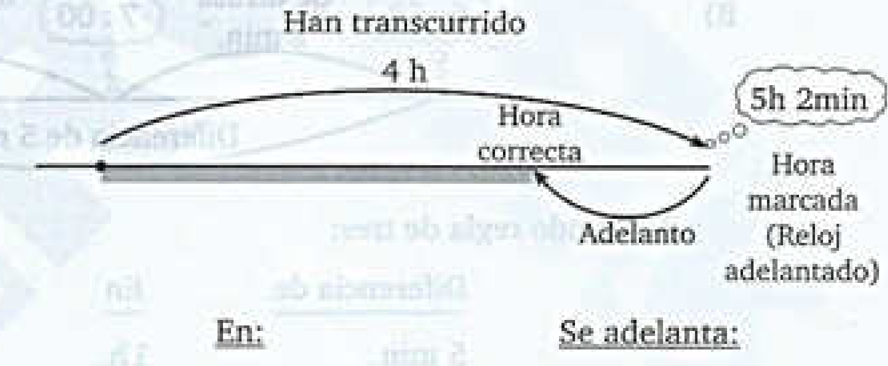
$x = 42$ min

Hora que marca = 1 p.m. – 42 min = 12h 18 min

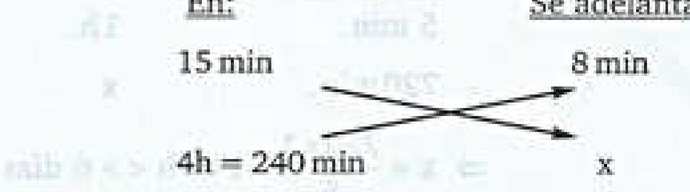
$\therefore$ Marcará las 12h 18 min

PROBLEMA 24 Un reloj se adelanta 2 minutos cada 15 minutos. Si ahora marca las 5h 2min y hace 4 horas que se adelanta, la hora correcta sería:

Resolución:



Dato: En: / Se adelanta:



$15x = 240 \times 2$

$x = 32$ min

Hora correcta = 5h 2min – 32 min = 4h 30 min

$\therefore$ Marcará las 4h 30 min

PROBLEMA 25 Resuelva los siguientes casos:

A) Un reloj que se adelanta 10 minutos en cada hora, es sincronizado hoy al medio día (12 m). ¿Qué tiempo, como mínimo, deberá transcurrir para que vuelva a marcar la hora correcta?

B) Un reloj que se adelanta 3 min. cada hora y otro que se atrasa 2 min. cada hora se sincronizan a las 7:00 a.m. ¿Dentro de cuánto tiempo como mínimo marcarán juntos a la misma hora?

Resolución: A) Aplicando regla de tres simple:

Se adelanta	En
10 min.	1 h.
720 min.	x

$$\Rightarrow x = \frac{720 \times 1}{10} = 72 \text{ h}$$

72 h < > 3 días

∴ Debe transcurrir como mínimo 3 días.

NOTA "S"

Para que dos relojes defectuosos (que se adelantan o atrasan) vuelvan a marcar la misma hora es necesario que exista una diferencia entre lo que marcan de:

12h < > 720 min.

B)

Aplicando regla de tres:

Diferencia de	En
5 min.	1 h.
720 min.	x

$$\Rightarrow x = \frac{720 \times 1}{5} = 144 \text{ h} <> 6 \text{ días}$$

∴ Dentro de 6 días.

NOTA "S"

Para que un reloj defectuoso que sufre adelantos o atrasos, vuelva a marcar la hora correcta, es necesario que acumulen un adelanto o atraso total de:

12h < > 720 min.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Las horas transcurridas del día es igual a la suma de las cifras de las horas que faltan transcurrir para que acabe el día. ¿Qué hora será dentro de 3h?

A) 6 a.m. B) 7 p.m. C) 8 a.m.
D) 9 a.m. E) 10 a.m.

2. Karen se casó en el mes de abril de 1992 cuando la fracción transcurrida de dicho mes era igual a la fracción transcurrida del año. ¿A qué hora se casó?

A) 3 a.m. B) 2 a.m. C) 10 a.m.
D) 0:00 E) 11 a.m.

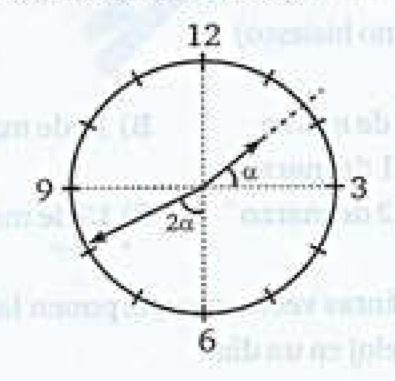
3. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 2:30?

A) 100º B) 105º C) 70º
D) 60º E) 80º

4. ¿Cada cuánto tiempo las agujas de un reloj forman un ángulo llano?

A) 1h $5\frac{5}{11}$ min B) 1h $10\frac{1}{11}$ min C) 1h 5 min
D) 1h $5\frac{1}{11}$ min E) 1h $5\frac{3}{11}$ min

5. ¿Qué hora indican las agujas?



A) 11 : 42 B) $11:42\frac{6}{7}$ C) $11:42\frac{3}{7}$
D) $11:40\frac{1}{7}$ E) $11:42\frac{4}{7}$

6. Determinar el ángulo que forman las manecillas de un reloj a las 2:22.

A) 60º B) 61º C) 70º
D) 79º E) 90º

7. ¿A qué hora entre las 8 y 9 las agujas de un reloj estará superpuestas, y a que hora tendrán sentidos opuestos?

A) 8:20 B) 8:43 C) 8:45
D) 8:30 E) 8:50

8. Un reloj demora en dar 11 campanadas 5 segundos más que en dar 8 campanadas. ¿Cuántos segundos menos demorará en dar 15 campanadas que en dar 27 campanadas?

A) 30 seg. B) 10 seg. C) 20 seg.
D) 40 seg. E) 5 seg.

9. Un campanario demora en tocar "n" campanadas; tantos segundos como campanadas ha tocado. ¿Cuánto tardará en tocar n^2 campanadas?

A) n^2+1 B) n^2+2 C) n^2+3
D) n^2+4 E) n^2+5

10. Rodito sale de su casa a las 1 p.m. (según su reloj) y llega a la academia a las 2 p.m. (según el reloj de la academia). Luego se percata que su reloj estaba atrasado 5 min y el de la academia adelantado 5 min ¿qué tiempo se demoró Rodito en llegar a la academia?

A) 30' B) 40' C) 50'
D) 60' E) 70'

11. Un reloj empieza adelantarse 3' por hora a partir de las 10:00 a.m. del día lunes. ¿Qué hora será en realidad cuando marque las 8:30 p.m. del mismo día?

A) 6 p.m. B) 7 p.m. C) 8 p.m.
D) 9 p.m. E) 10 p.m.

12. Siendo las 8:00 a.m. de un día sábado un reloj se empieza a atrasar 6 min por hora. ¿Dentro de cuánto tiempo volverá a marcar nuevamente la hora correcta?

A) 4 días B) 8 días C) 5 días
D) 12 días E) 10 días

13. Un reloj se adelanta 10 min por hora y otro se atrasa 12 min por hora, si se sincronizan a las 5:00 p.m. ¿Dentro de cuánto tiempo marcarán la hora correcta por 3ra vez?.

A) 45 días B) 46 días C) 47 días
D) 48 días E) 49 días

14. Se construye un nuevo reloj cuya esfera se divide en 8 partes iguales. Cada "nueva hora" equivale a 40 "nuevos minutos"; y cada "nuevo minuto" equivale a 40 "nuevos segundos". Cuando sea realmente las 3:27', ¿qué hora marcará el nuevo reloj?

A) 2:00 B) 2:06' C) 2:10'
D) 2:12' E) 2:16'

15. Carlos sale de la oficina y al marcar su tarjeta de salida ve que son las 6h 25' p.m. Al llegar a su casa ve que su reloj son las 8h 15' p.m. Luego se entera que el reloj de su oficina está atrasado 12' y su reloj estaba adelantado en 10'. ¿Cuanto tiempo demoró de la oficina a su casa?

A) 1h 20' B) 1h 28' C) 1h 30'
D) 1h 45' E) 1h 50'

16. A las 9:00 a.m. del día lunes un reloj empieza a adelantarse 13 minutos por hora. ¿Qué hora marcará la próxima semana, el mismo día y la misma hora?

A) 9:56 a.m. B) 10:00 a.m.
C) 10:12 a.m.
D) 10:16 a.m. E) 10:20 a.m.

17. Un reloj marca las horas con igual número de campanadas y las medias horas con una campanada. ¿Cuántas campanadas habrá dado en total en un día?

A) 170 B) 172 C) 174
D) 178 E) 180

18. Un reloj se atrasa un minuto por hora. Si empieza correctamente a las 12 del día miércoles 13 de octubre. ¿Cuánto volverá a señalar la hora correcta?

A) 10 de noviembre
B) 11 de noviembre
C) 12 de noviembre
D) 14 de noviembre
E) 15 de noviembre

19. ¿Qué fecha marcará la hoja de un almanaque de escritorio, cuando las hojas arrancadas excedan a los 3/8 de la hojas que faltan por arrancar en 2? (considerar año no bisiesto)

A) 9 de marzo B) 10 de marzo
C) 11 de marzo
D) 12 de marzo E) 13 de marzo

20. ¿Cuántas veces se superponen las agujas de un reloj en un día?

A) 20 veces B) 21 veces C) 22 veces
D) 23 veces E) 24 veces

21. Hallar la medida del menor ángulo que forman las agujas de un reloj a las 11:30?

A) 130° B) 150° C) 165°
D) 175° E) 180°

22. Un reloj de alarma da 145 "bip" en 20 seg. ¿Cuánto se demorará para dr 37 "bip"?

A) 2s B) 3s C) 4s
D) 5s E) 6s

23. En el instante de comenzar un año bisiesto un reloj señala las 11h 6' 40" a.m. Se supone que va adelantado. Este reloj se atrasa el primer día 4 segundos, el segundo día 12 segundos, el tercer día 20 segundos, y así sucesivamente. Al comenzar un día del año, el reloj marcará la hora exacta. ¿Cuál es ese día?

A) 10 abril B) 11 abril C) 12 abril
D) 13 abril E) 14 abril

24. La campana de un reloj indica las horas con igual número de campanadas. Para indicar las "n" horas tarda 4 segundos. ¿Cuántas horas habrán transcurrido desde el instante en que empleó "n" segundos para indicarla, hasta el instante en que utilizó "2n" segundos para indicar la hora?

A) $\frac{n^2-n}{4}$ B) $\frac{n^2-n}{2}$ C) $\frac{n^2-1}{4}$
D) $\frac{n^2-2}{3}$ E) $\frac{n^2-n}{3}$

25. Un reloj señala las tres en punto. ¿A qué hora coincidirán las agujas por primera vez a partir de esa hora?

A) $3h\left(16\frac{3}{11}\right)min$ B) $2h\left(16\frac{3}{11}\right)min$
C) $3h\left(14\frac{3}{11}\right)min$
D) $3h\left(16\frac{4}{11}\right)min$ E) $3h\left(16\frac{3}{7}\right)min$

26. ¿Qué hora será dentro de $5\frac{1}{4}$ h, sabiendo que en estos momentos el tiempo transcurrido es excedido en 5h por los que faltan transcurrir del día?

A) 2:45 p.m. B) 2:50 p.m.
C) 2:55 p.m.
D) 3:00 p.m. E) 3:05 p.m.

27. La campana de un campanario tarda 5 segundos en tocar 3 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en un tiempo de 25 segundos?

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

28. Mónica empezó a estudiar después de las 4h, pero antes de las 5h, en el momento justo que las agujas del reloj estaban superpuestas, y terminó de estudiar antes de las 11h, pero después de las 10h, cuando las agujas formaban un ángulo de 180°. ¿Cuánto tiempo estuvo estudiando?

A) 2 horas B) 3 horas C) 4 horas
D) 5 horas E) 6 horas

29. ¿A qué hora entre las 2 y las 3 las agujas de un reloj se superponen?

A) $2h\left(10\frac{9}{11}\right)min$ B) $2h\left(11\frac{3}{11}\right)min$
C) $2h\left(10\frac{10}{11}\right)min$
D) $3h\left(11\frac{7}{11}\right)min$ E) $3h\left(10\frac{5}{7}\right)min$

30. ¿A qué hora entre las 3 y 4 las manecillas de un reloj están en línea recta?

A) $3h\left(49\frac{3}{11}\right)min$ B) $3h\left(49\frac{3}{17}\right)min$
C) $3h\left(47\frac{3}{11}\right)min$
D) $3h\left(49\frac{1}{11}\right)min$ E) $3h\left(50\frac{3}{7}\right)min$

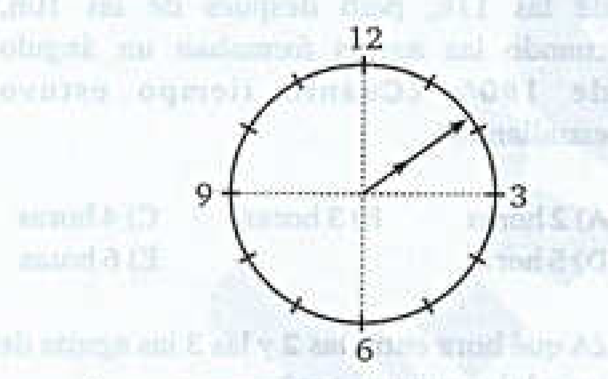
31. Calcular la medida del ángulo convexo que forman las agujas de un reloj a las 12 horas con 30 minutos.

A) 160° B) 165° C) 170°
D) 130° E) 180°

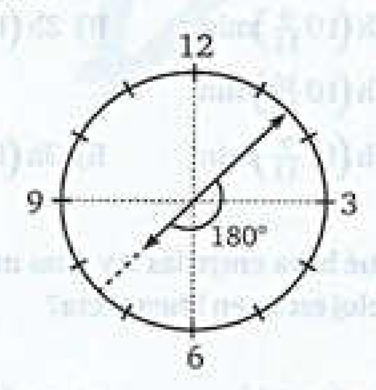
32. Salí de mi casa en la mañana cuando las manecillas de un reloj, que da las horas con una campanada, formaba un ángulo de 180° y daba una campanada. ¿Cuántas campanadas sonaron en mi ausencia, si cuando volví en la noche del mismo día escuché una campanada y el ángulo que formaban las manecillas del reloj era de 90°?

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

33. Un alumno sale de su casa cuando las agujas están marcando:



y llega el mismo día cuando las gujas están marcando:



¿Cuánto tiempo estuvo fuera de cada?

A) 2 h B) 4 h C) 6 h
D) 8 h E) 5 h

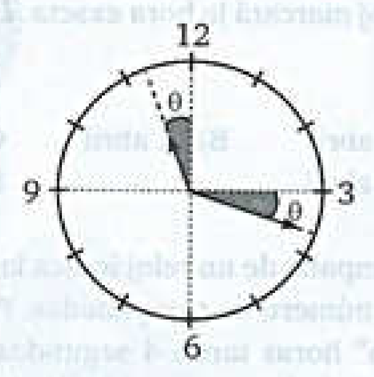
34. En la tarde de un determinado día, un niño de 1m de estatura proyectó una sombra de $\sqrt{3}$ m. En ese instante, ¿cuál es el ángulo que forman las agujas del reloj?

A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

35. Hallar el ángulo que forman las agujas a las 4:20' 20"

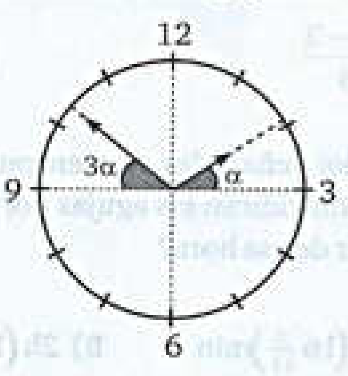
A) $\frac{47°}{6}$ B) 6° C) 8°
D) $\frac{49°}{6}$ E) $\frac{53°}{6}$

36. Hallar la hora que indican las agujas del reloj.



A) 11 : 12 B) $11:18\frac{2}{13}$
C) $11:18\ \frac{6}{13}$
D) $11:16\frac{2}{13}$ E) $11:19\frac{6}{13}$

37. ¿Qué hora indican las agujas del reloj?

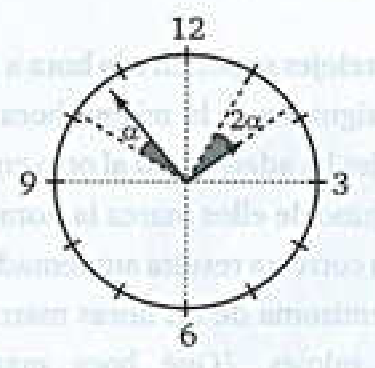


A) 2:41 B) 2:42 C) 2:48
D) 2:47 E) 2:46

38. Cada cuánto tiempo las agujas del reloj forman un ángulo recto.

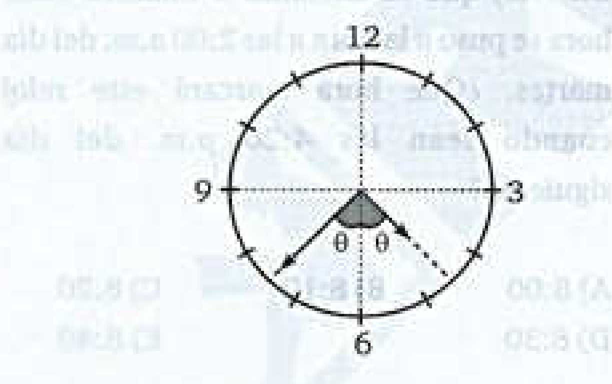
A) 10' B) 20' C) $32\frac{8}{11}'$
D) $23\frac{2}{11}'$ E) $13\frac{2}{11}'$

39. ¿Qué hora es?



A) $1:51\frac{1}{23}'$ B) $1:52\frac{4}{23}'$ C) $1:53\frac{4}{13}'$
D) $1:54\frac{2}{23}'$ E) $1:53\frac{1}{11}'$

40. Hallar la hora que indican las agujas del reloj.

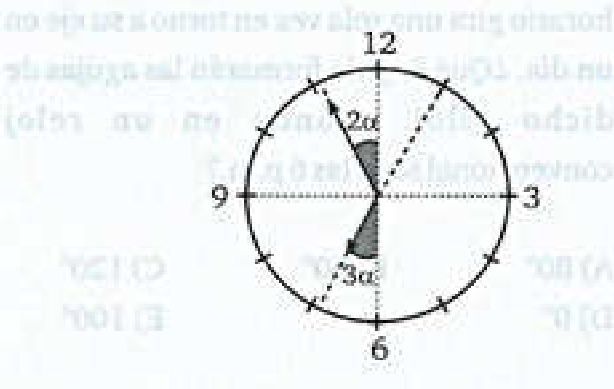


A) 4 : 32 B) 4 : 36 C) 4 : 37
D) $4:36\frac{12}{13}$ E) $4:38\frac{2}{13}$

41. Una persona en estado etílico observa su reloj y confunde el horario co el minutero y viceversa, expresando lo siguiente "son las 4:42" ¿Qué hora es realmente?

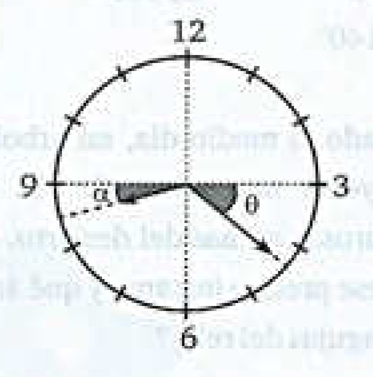
A) 6:42 B) 4:20 C) 8:42
D) 8:24 E) 10:24

42. ¿Qué hora es?



A) $6:51\frac{1}{16}$ B) 6 : 55 C) $6:56\frac{16}{19}$
D) $6:55\frac{1}{19}$ E) $6:53\frac{11}{19}$

43. Se sabe que: $2\alpha + 3\theta = 171°$. Hallar la hora que indica las agujas del reloj



A) 8 : 21' B) $8:22\frac{7}{17}'$ C) 8 : 23'
D) 8 : 24' E) $8:21\frac{1}{2}'$

44. ¿Qué hora es ...?, preguntó Walter a Gerardo; respondiendo este último. "El producto de cifras que componen el tiempo transcurrido es igual al tiempo que falta transcurrir", mejor dime el ángulo que forman las manecillas (horario y minutero) del reloj en éste instante replicó Walter, a lo que Gerardo contesto presurosamente.

A) 120° B) 90° C) 150°
D) 130° E) 140°

45. Un nuevo reloj tiene 16 marcas horarias y el horario gira una sola vez en torno a su eje en un día. ¿Qué ángulo formarán las agujas de dicho reloj, cuando en un reloj convencional sean las 6 p.m.?

A) 80° B) 60° C) 120°
D) 0° E) 100°

46. Un nuevo reloj tiene 8 marcas horarias. El día consta de 8 nuevas horas y la nueva hora tiene 64 nuevos minutos ¿Qué ángulo forman las agujas del nuevo reloj, cuando un reloj convencional marca las 3 p.m.?

A) 90° B) 105° C) 135°
D) 140° E) 165°

47. Pasado el medio día, un arbolito de 3,9 m proyecta una sobra de 5,2 m sobre las calurosas arenas del desierto. ¿Qué hora es en ese preciso instante y qué ángulo forman las agujas del reloj?

A) 2:28 p.m. – 76°
B) 2:36 p.m. – 86°
C) 3:28 p.m. – 96°
D) 4:32 p.m. – 86°
E) 3:21 p.m. – 86°

48. En una mañana soleada una persona de $\sqrt{3}$ m proyecta una sombra de 1m ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj en ese preciso instante?

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 80° E) 100°

49. Dos relojes se ponen a la hora a las 12:00. Al día siguiente a la misma hora, uno de los relojes ha adelantado al otro en 4 minutos y ninguno de ellos marca la hora correcta. La hora correcta resulta aumentado 1 minuto a la semisuma de las horas marcadas por los dos relojes. ¿Qué hora marca el reloj adelantado?

A) 12:01 B) 12:02 C) 12:03
D) 12:04 E) 12:05

50. Un reloj que se adelanta 6 minutos cada hora se puso a la hora a las 2:00 a.m. del día martes. ¿Qué hora marcará este reloj cuando sean las 4:20 p.m. del día siguiente?

A) 8:00 B) 8:10 C) 8:20
D) 8:30 E) 8:40

CAPACIDADES

- Desarrollar y mejorar el concepto de fracción.
- Relacionar el tema con situaciones vivenciales
- Desarrollar la habilidad operativa en el manejo de fracciones.

Los números han surgido a lo lago de la historia por la necesidad que ha tenido el hombre de contar, de medir y de repartir, entre otras. Luego de la aparición de estos números, los matemáticos los sistematizaron y formalizaron como sistemas numéricos, los cuales a su vez sirven de base para desarrollar otras teorías matemáticas, de gran utilidad para el desarrollo de la humanidad.

Los primeros número que se utilizaron fueron los naturales, sin embargo, estos números no fueron suficientes para representar todas las situaciones cotidianas. Por ello, se dio el surgimiento de otros números como los enteros, los racionales, etc.

Por ejemplo, la necesidad de utilizar fracciones se observa al querer representar que la cantidad de grano de una producción llenó la mitad del granero; es muy difícil expresarlo si sólo se pueden utilizar números naturales, lo mejor es expresarlo como $\frac{1}{2}$.

En la vida diaria es común utilizar fracciones, por ejemplo, si se tiene que una receta de cocina rinde para 6 personas y se quiere preparar una cena para dos, entonces se debe tomar la tercera parte de cada ingrediente y así adaptarla para menos personas.

Es curioso notar que la aparición de las fracciones se dio antes de que se utilizaran los números negativos; así se marca el hecho que a los números racionales se les encontró una aplicación práctica mucho antes que a los negativos.

En la historia, el primer documento del que se tiene referencia sobre los números racionales es un "papirus" egipcio que data de 1900 a.n.e. En este papiro se nota las serias dificultades que tuvieron para darle significado a las fracciones con numerador distinto de 1.

Los griegos también tuvieron esta dificultad, ya que lograron encontrarle significado a las fracciones con numerador 1 $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$, pero no así a fracciones como $\frac{5}{3}$ ó $\frac{2}{3}$. Dada esta limitación, ellos representaban una fracción como $\frac{4}{15}$ en forma de suma de dos fracciones simples $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$, lo que hace que cualquier operación sencilla se vuelva más complicada.

Los babilonios y los romanos también trabajaron con fracciones, ellos no se dieron ninguna limitación para el numerador, sin embargo, en sus instrumentos de medición se utilizó la base 60, lo que los llevó a utilizar fracciones con un denominador fijo de 60.

Así, por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ la representaban como $\frac{36}{60}$, lo cual también complicada los cálculos.

Esta numeración en base tiene influencia aún en nuestros días, un ejemplo claro es la medición del tiempo; una hora tiene 60 minutos y cada minuto tiene 60 segundos.

Después de algún tiempo se logró darle significado a los números racionales y en la actualidad los matemáticos han logrado formalizar la teoría del conjunto de los números racionales y encontrar algunas características sobre él.

INTRODUCCIÓN

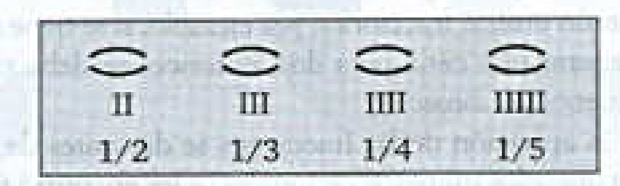
No siempre ha conocido el hombre las fracciones, pues sólo las introdujo cuando comenzó a medir y contar. Establecer claramente el significado de lo que son las fracciones, operar con ellas y llegar a su actual notación fue algo que durante muchos siglos constituyó el gran dolor de cabeza de sucesivas generaciones de matemáticos.

Los egipcios, desde hace cerca de 4 000 años conocieron ya las fracciones, pues en el Papiro de Rhind (1900 a.n.e.) se daban tablas que mostraban cómo cualquier fracción se podía expresar por una adecuada suma de fracciones unitarias; porque al principio los egipcios sólo usaron las fracciones unitarias: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, etc., conociendo sólo 2/3 y 3/4 como las no unitarias.

Así: 5/6 representaban como 1/2 + 1/3
7/12 representaban como 1/3 + 1/4
7/8 representaban como 1/2 + 1/4 + 1/8
2/43 representaban como 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301

Para representar las fracciones de numerador 1 utilizaron el símbolo ⊂⊃, debajo del cual escribían el número que indicaba el denominador.

Ejemplos:



CONCEPTO

Para que una fracción sea considerada como tal debe cumplir las siguientes condiciones:

$$f = \frac{a}{b}$$ ← NUMERADOR (a), ← DENOMINADOR (b) — TÉRMINOS

Donde: a y $b \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$a \neq \overset{o}{b}$; es decir el cociente de la división no debe ser exacta.

Son fracciones: $\frac{2}{3}; \frac{9}{2}; \frac{7}{5}; \frac{29}{2}; ....$

No son fracciones: $\frac{2}{2}; \frac{8}{4}; \frac{17}{-3}; \frac{0,2}{9}; \frac{\pi}{5}; \frac{\sqrt{2}}{7}; ....$

NOTA "S"

$-\frac{17}{3}; -\frac{3}{2}$ Se le denomina números fraccionarios

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

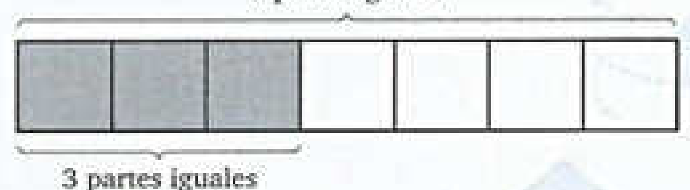
Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

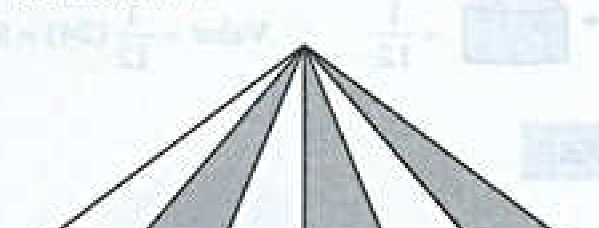
Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FRACCIÓN



$\Rightarrow \quad f = \dfrac{3}{7}$



$\Rightarrow \quad f = \dfrac{3}{6}$

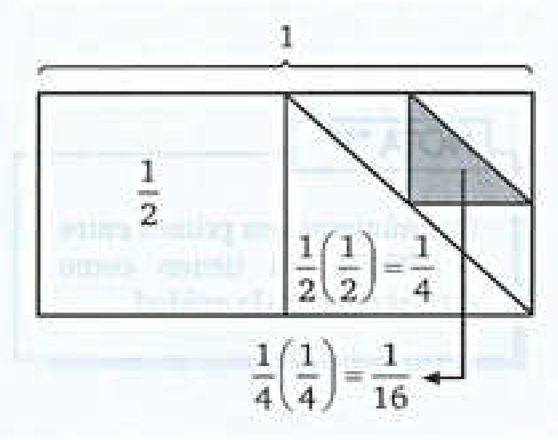
OPERACIONES CON FRACCIONES

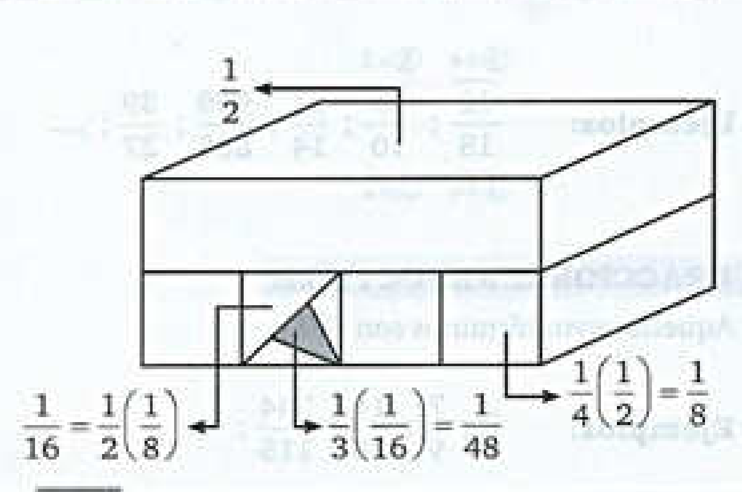
- $\dfrac{x}{y} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{xb + ay}{yb}$
- $\dfrac{x}{y} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{xb - ya}{yb}$
- $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{9}{7} = \dfrac{35 \times 2 + 21 \times 1 + 15 \times 9}{105} = \dfrac{226}{105}$

  MCM: 105
- $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{7} = \dfrac{2 \times 9}{3 \times 7}$
- $\dfrac{2}{3} \div \left(\dfrac{6}{7}\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{6} = \dfrac{14}{18}$
- $\dfrac{\;\dfrac{1}{2}\;}{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{1 \times 3}{2 \times 7} = \dfrac{3}{14}$
- $3\dfrac{1}{2} = \dfrac{3 \times 2 + 1}{2} = \dfrac{7}{2}$

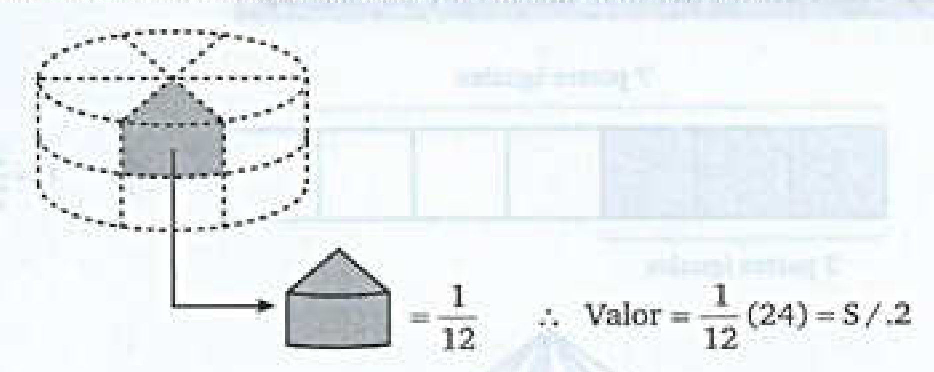
FRACCIÓN DE FRACCIÓN

Consiste en calcular una fracción de otra:





Aplicación: ¿Qué precio tiene la tajada de queso? si el valor total es S/.24?



$= \frac{1}{12}$ $\therefore$ Valor $= \frac{1}{12}(24) = S/.2$

PRINCIPALES TIPOS DE FRACCIONES

I. FRACCIÓN PROPIA

Es aquella que es menor que la unidad, también se le reconoce por que el numerador es el menor término entre ambos.

Ejemplos: $\frac{1}{5};\frac{2}{3};\frac{7}{11};\frac{1111}{3333};\frac{2+m}{11+m};\frac{m^2+10}{m^3+12};\frac{99^9}{999^9};....(m\in\mathbb{N})$

II. FRACCIÓN IMPROPIA

Es aquella que es mayor que la unidad, también se le reconoce por que el denominador es ahora el menor término (caso inverso al anterior).

Ejemplos: $\frac{3}{2};\frac{11}{7};\frac{9}{5};\frac{111}{75};\frac{9999}{222};\frac{m^2+10}{m^2+3};\frac{77^2}{5^3}$

OBSERVACIÓN

Se deduce que entre estas 2 fracciones la mayor es siempre la fracción impropia.

F. IMPROPIA > F. PROPIA

III. FRACCIÓN REDUCTIBLE

Aquella cuyos términos tienen factores comunes diferentes a la unidad.

Ejemplos: $\frac{\overbrace{12}^{③\times4}}{\underbrace{18}_{③\times6}};\frac{\overbrace{15}^{⑤\times3}}{\underbrace{10}_{⑤\times2}};\frac{21}{14};\frac{999}{888};\frac{39}{27};....$

IV. FRACCIÓN IRREDUCTIBLE

Aquella cuyos términos son PESI.

Ejemplos: $\frac{2}{3};\frac{7}{9};\frac{11}{25};\frac{244}{115};....$

NOTA "S"

Dos números son primos entre si (P.E.S.I.) si tienen como divisor común a la unidad

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

- ¿Qué fracción es mayor?

$$A = \frac{2}{3} \qquad B = \frac{3}{5}$$

1ra forma (Homogenizando)

$$\underbrace{\frac{2\times5}{3\times5}}_{\frac{10}{15}} > \underbrace{\frac{3\times3}{5\times3}}_{\frac{9}{15}}$$

Rpta: A

2da forma (Multiplicación cruzada)

$$\overbrace{\frac{2}{3}}^{10} > \overbrace{\frac{3}{5}}^{9}$$

Rpta: A

- ¿Qué fracción es mayor?

$$\underbrace{\frac{11}{13}}_{A} \; ; \; \underbrace{\frac{9}{10}}_{B}$$

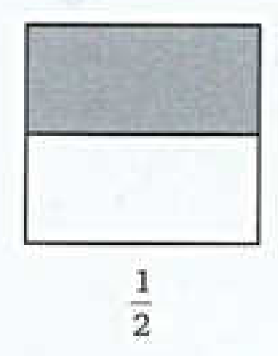
Solución por multiplicación cruzada:

$$\overbrace{\frac{11}{13}}^{110} < \overbrace{\frac{9}{10}}^{117}$$

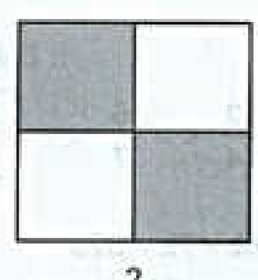
Rpta: B

FRACCIONES EQUIVALENTES

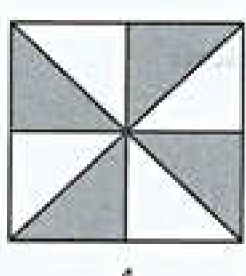
Son aquellas que representan a una sola fracción:



$\frac{1}{2}$

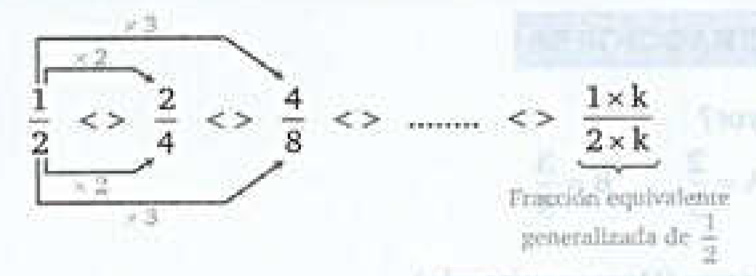


$\frac{2}{4}$



$\frac{4}{8}$

Fracciones equivalentes de $\frac{1}{2}$



En forma general:

$$\frac{a}{b} <> \frac{ak}{bk} \; : k = 1; 2; 3; 4; \ldots ;$$

Fracción Irreductible — Fracción Equivalente

OBSERVACIÓN

Toda fracción es equivalente de sí misma: (k = 1)

Ejemplos:

EXPRESIÓN		F. IRREDUCT.		F. EQUIVALENTE
$\frac{6}{10}$	<>	$\frac{3}{5}$	<>	$\frac{3k}{5k}$
$\frac{12}{24}$	<>	$\frac{1}{2}$	<>	$\frac{k}{2k}$
$2\frac{1}{5}$	<>	$\frac{11}{5}$	<>	$\frac{11k}{5k}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	<>	$\frac{5}{6}$	<>	$\frac{5k}{6k}$
$n+\frac{1}{9}$	<>	$\frac{9n+1}{9}$	<>	$\frac{(9n+1)k}{9k}$
$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$	<>	$\frac{m+n}{mn}$	<>	$\frac{(m+n)k}{mnk}$

Ejemplo: Hallar la fracción equivalente de $\frac{12}{14}$ de manera que el producto de sus términos sea: 378

Resolución:

F. Equivalente

$$\frac{12}{14} <> \frac{6}{7} <> \frac{6k}{7k}$$

⇨ $6k \times 7k = 378$

$k^2 = 9 \rightarrow k = 3$

$$\therefore \frac{6\times 3}{7\times 3} = \frac{18}{21}$$

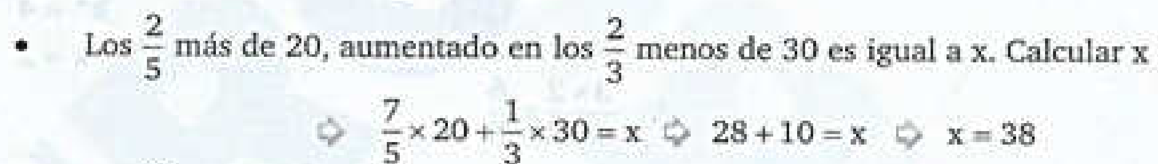
OBSERVACIÓN

PIERDO		QUEDA
$\frac{1}{2}$	....	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	....	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{7}$	....	$\frac{5}{7}$
$\frac{9}{11}$	....	$\frac{2}{11}$
$\frac{1}{x}$	....	$\frac{x-1}{x}$
$\frac{a}{b}$	....	$\frac{b-a}{b}$
$\frac{x}{10}$	....	$\frac{10-x}{10}$

GANO		TENGO
$\frac{1}{2}$	....	$\frac{3}{2}$
$\frac{2}{3}$	....	$\frac{5}{3}$
$\frac{2}{7}$	....	$\frac{9}{7}$
$\frac{1}{11}$	....	$\frac{12}{11}$
$\frac{1}{x}$	....	$\frac{x+1}{x}$
$\frac{a}{b}$	....	$\frac{a+b}{11}$
$\frac{x}{10}$	....	$\frac{10+x}{10}$

Ejemplos de aplicación:

- $\frac{2}{3}$ más de 60 ⇨ $\frac{5}{3}\times 60 = 100$
- $\frac{2}{3}$ menos de 60 ⇨ $\frac{1}{3}\times 60 = 20$



- Los $\frac{2}{5}$ más de 20, aumentado en los $\frac{2}{3}$ menos de 30 es igual a x. Calcular x

  ⇨ $\frac{7}{5}\times 20 + \frac{1}{3}\times 30 = x$ ⇨ $28 + 10 = x$ ⇨ $x = 38$

- Los $\frac{2}{13}$ menos de qué número, es 220?

  ⇨ $\frac{11}{13}\times N = 220$ ⇨ $N = 260$

- Los $\frac{7}{9}$ menos de qué número es 20?

  ⇨ $\frac{2}{9}N = 20$ ⇨ $N = 90$

- Yolanda disminuyó su peso en los $\frac{3}{5}$, si al inicio pesaba 100kg ¿cuánto pesa ahora?

  ⇨ $\frac{2}{5}(100kg) = 40kg$

- ¿Que fracción más es 20 respecto de 18?

  20   18 (Base de comparación)

  2 más

  ⇨ $f = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

PROBLEMAS APLICATIVOS

Aplicación 1: Calcular la fracción equivalente de $\frac{1}{n}$; de manera que el producto de sus términos sea 63.

Resolución:

F. EQUIV.

$$\frac{1}{n} <> \boxed{\frac{k}{nk}} \Rightarrow k \times nk = 63$$

$$n \cdot k^2 = 7 \times 3^2$$

$$n = 7 \;;\; k = 3$$

$$\therefore \frac{3}{21}$$

Aplicación 2: Calcular la fracción equivalente de $\frac{36}{48}$ de manera que la suma de los cuadrados de sus términos sea igual a 100.

Resolución:

F. EQUIV.

$$\frac{\not{36}}{\not{48}} <> \frac{3}{4} <> \boxed{\frac{3k}{4k}} \Rightarrow (3k)^2 + (4k)^2 = 100$$

$$25k^2 = 100$$

$$k^2 = 4$$

$$k = 2$$

$$\therefore \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

Aplicación 3: Calcular: $\frac{m}{n}$, si es propia e irreductible, sabiendo que el producto de los términos de la fracción equivalente de $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ es igual a 630.

Resolución:

F. EQUIVALENTE

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} <> \frac{m+n}{mn} <> \boxed{\frac{(m+n)k}{mnk}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\overset{2}{m} + \overset{5}{n})}_{7}\underbrace{mn}_{10}\underbrace{k^2}_{9} = 630$$

$$m = 2 \;;\; n = 5 \;;\; k = 3$$

$$\therefore \frac{2}{5}$$

Aplicación 4: Luego de ir perdiendo $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ de lo que le iba quedando, Pedro suma mentalmente la cantidad que tenía al inicio y lo que le quedó al final, obteniendo 140 soles. ¿Cuánto perdió?

Resolución: Inicialmente: $5k$ Asumimos este valor para mayor facilidad de resolver el problema.

Queda: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}(5k) = 2k$

$\Rightarrow 5k + 2k = 140$
$k = 20$

Se observa que perdió 3k.

$\therefore \quad 3(20) = S/.60$

Aplicación 5: Los $\frac{2}{3}$ de "A" es igual a $\frac{1}{5}$ menos de "B". Si la suma de A + B es igual a 110, calcular: A – B

Resolución: $\frac{2}{3}A = \frac{4}{5}B \Rightarrow 10A = 12B$
$5A = 6B$

$A = 6k \;;\; B = 5k$

$\Rightarrow 6k + 5k = 110$
$k = 10$

$\therefore \quad 6k - 5k = k = 10$

Aplicación 6: Un recipiente está lleno de agua la mitad de lo que no está lleno, luego se derrama la tercera parte de lo que no se derrama, si aún queda 30 litros ¿qué capacidad tiene el recipiente?

Resolución:

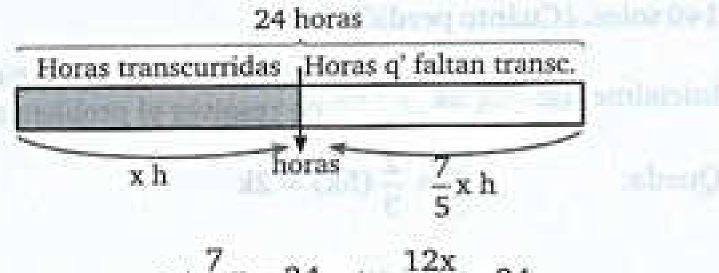
LLENO	NO ESTÁ LLENO
1×40	2×40

NO DERRAMA	DERRAMA
3×10	1×10
30ℓ	

$\therefore \quad 40 + 80 = 120$

Aplicación 7: Las horas que faltan transcurrir del día, es igual a los $\frac{7}{5}$ de lo que ha transcurrido ¿qué hora es?

Resolución:



$$x+\frac{7}{5}x=24 \rightarrow \frac{12x}{5}=24$$
$$x=10$$

$\therefore$ Son las 10:00 a.m.

RELACIÓN PARTE – TODO

En esta oportunidad relacionaremos geométricamente 2 cantidades, donde una de ellas será la base de comparación y se colocará en el denominador.

Ejemplo 1: ¿Qué fracción representa $\underbrace{\text{5 cerditos}}_{\text{Lo que se compara}}$ de un total de $\underbrace{\text{10 cerditos}}_{\text{Base de comparación}}$?

$$\therefore \quad f=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 2: ¿Qué parte es $\frac{1}{3}$ $\underbrace{\text{de } 2\frac{1}{3}}_{\text{Base de comparación}}$?

$$\therefore \quad f=\frac{\frac{1}{3}}{2\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{7}{\cancel{3}}}=\frac{1}{7}$$

Ejemplo 3: ¿Qué fracción representa "x" de "y"?

$$\therefore \quad f=\frac{x}{y}$$

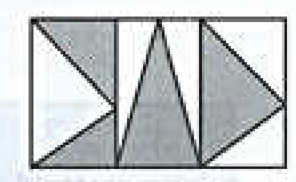
Ejemplo 4: ¿Qué fracción representa la región sombreada respecto a $\underbrace{\text{la no sombreada}}_{\text{Base de comparación}}$?

$$\therefore \quad f=\frac{\text{sombreada}}{\text{no sombreada}}$$

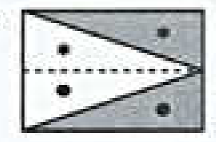
Ejemplo 5: ¿Qué fracción representa los hombres respecto de los no hombres?

$$\therefore \quad f=\frac{\text{hombres}}{\text{no hombres}}$$

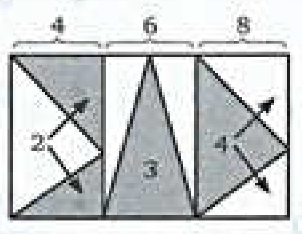
Ejemplo 6: ¿Qué fracción representa la región no sombreada respecto al triple de la región sombreada?



Resolución:



La región sombreada representa la mitad del total.

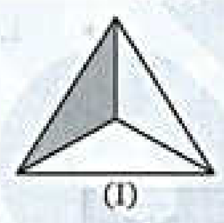


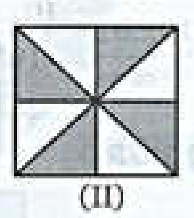
TOTAL: 18

- Sombreada: 9
- No sombreada: 9

$$\therefore \quad f = \frac{9}{3(9)} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 7: Qué fracción representa el doble de la región sombreada de (I) y (II) respecto de la región no sombreada de (I) y (II), si la región (I) es el doble de la región (II).


(I)


(II)

Resolución: Cada parte sombreada de la región (I): a
Cada parte sombreada de la región (II): b
Por dato: $3a = 2(8b)$
$3a = 16b \Rightarrow a = 16$
$b = 3$

$$\therefore \quad f = \frac{2(\text{somb.})}{\text{no somb}} = \frac{\not{2}(a+4b)}{\not{2}a+\not{4}b} = \frac{a+4b}{a+2b} = \frac{16+12}{16+6} = \frac{28}{22} = \frac{14}{11}$$

Ejemplo 8: ¿Qué fracción de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ ... de $\frac{20}{21}$ de 42, es la tercera parte de 15?

Resolución:

Observación:

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{20}{21}\times 42 = 4$$

Que fracción de $\boxed{4}$ es $\boxed{\frac{15}{3}} \rightarrow 5$

$$\therefore \quad f = \frac{5}{4}$$

FRACCIÓN GENERATRIZ

• DECIMAL EXACTO

$$0,\overline{abc} = \frac{2}{1000}$$

- $0,2 = \frac{2}{10}$
- $0,21 = \frac{21}{100}$
- $0,02 = \frac{2}{100}$
- $0,020 = \frac{2}{100}$
- $0,0\overline{a0b} = \frac{\overline{a0b}}{10000}$
- $\underbrace{0,00...021}_{10\ \text{cifras}} = \frac{21}{\underbrace{100...00}_{10\ \text{cifras}}}$
- $0,312 = \frac{312}{10^3}$
- $0,020001 = \frac{20001}{10^6}$
- $\underbrace{0,10...01}_{99\ \text{cifras}} = \frac{10...01}{10^{99}}$
- $1,123 = \frac{1123}{1000}$

• DECIMAL PERIÓDICO PURO

$$0,\widehat{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

- $0,22... = 0,\widehat{2} = \frac{2}{9}$
- $0,232323... = 0,\widehat{23} = \frac{23}{99}$
- $0,\widehat{023} = \frac{23}{999}$
- $0,\widehat{0020} = \frac{20}{9999}$
- $0,\widehat{0200} = \frac{200}{9999}$

• DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

$$0,m\widehat{ab} = \frac{\overline{mab} - m}{990}$$

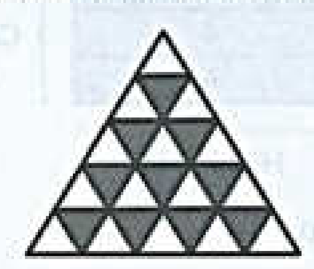
- $0,2313131... = 0,2\widehat{31} = \frac{231-2}{990}$
- $0,0023\widehat{15} = \frac{2315-23}{990000}$
- $0,032555... = 0,032\widehat{5} = \frac{325-32}{9000}$
- $0,0a0\widehat{b} = \frac{\overline{a0b}-a}{9900}$
- $0,0\widehat{a0b} = \frac{\overline{a0b}}{9990}$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. De las aves de un corral $\frac{1}{3}$ son gallinas, $\frac{1}{4}$ son patos y los 15 restantes son pavos. ¿Cuántas aves hay en el corral?

   Rpta.: ....

2. En la figura cada triangulito tiene 1 cm^2 de área. ¿Qué fracción de la región sombreada es la no sombreada?



   Rpta.: ....

3. Hallar una fracción equivalente a $\frac{12}{28}$ tal que la suma de sus términos sea 120.

   Rpta.: ....

4. De una bolsa de caramelos Pepito comió los $\frac{7}{15}$, luego comió $\frac{1}{8}$ del resto. Si aún quedan 42 caramelos, ¿cuántos caramelos tenía la bolsa?

   Rpta.: ....

5. Paquito debía 180 soles. Si pagó $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ del resto de la deuda, ¿cuánto debe todavía?

   Rpta: ....

6. Un caño A puede llenar un depósito en 3 horas y un caño B puede llenar el mismo depósito en 6 horas. Si se abren los dos caños juntos, ¿en qué tiempo se llenará el depósito?

   Rpta.: ....

7. Gasté 30 soles y aún me queda $\frac{4}{9}$ de lo que tenía. ¿Cuánto tenía?

   Rpta: ....

8. Los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{7}$ de los $\frac{5}{8}$ de un número es igual a los $\frac{9}{14}$ de 40. Halle dicho número.

   Rpta: ....

9. Un caño A llena un tanque en 8 horas y un caño B llena el mismo tanque en 12 horas. Si se abren los caños, ¿qué parte del tanque llenan en una hora?

   Rpta: ....

10. Un caño puede llenar una piscina en 10 horas mientras que un desagüe puede vaciarla en 15 horas. Si se abren juntos el caño y el desagüe, ¿qué parte de la piscina llenan en una hora?

   Rpta: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Los 2/3 de los profesores de un colegio son mujeres. 12 de los profesores hombres son solteros mientras que los 3/5 de los profesores hombres son casados. ¿Cuál es el total de profesores?

Resolución: Método gráfico:

(3 PARTES IGUALES) TOTAL PROFESORES

MUJERES	MUJERES	HOMBRES	
30	30	6	SOLTEROS: 12 (2/5)
		6	
		6	CASADOS (3/5)
		6	
		6	

$\therefore$ Total de profesores: 90

OTRA FORMA:

Prof. hombres: $\underbrace{\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}(15x)\right)}_{\text{casados}} = 3x$

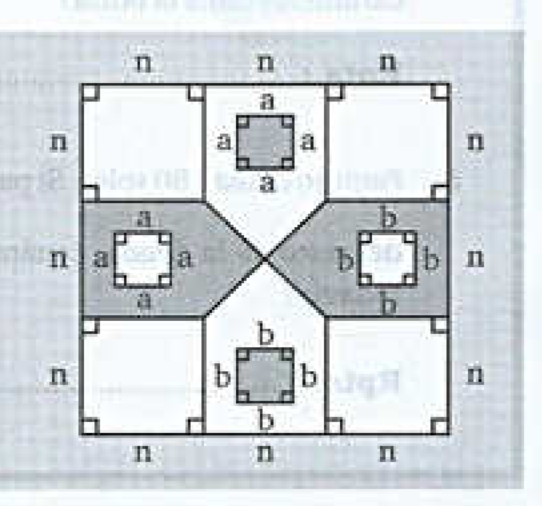
$\frac{1}{3}(15x) = \boxed{5x}$

solteros : $2x = 12$

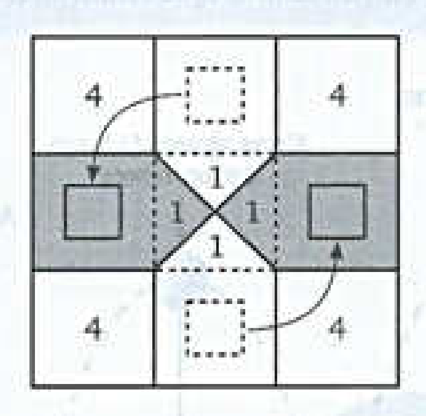
$x = 6$

$\therefore$ Total de profesores 90

PROBLEMA 2 Valeria tiene una chacra de 2 hectáreas, debido a las sequías de ese año la parte cultivada fue las regiones sombreadas que se muestran. ¿Qué parte de la zona no cultivada es la zona cultivada?



Resolución: Trasladando adecuadamente el cuadradito sombreado pequeño en el cuadradito pequeño que no está sombreado.



Todos los cuadrados valen 4.

Área total: 9(4) = 36
- Cultivada: 10
- No cultivada: 26

$$\therefore \frac{10}{26} <> \frac{5}{13}$$

PROBLEMA 3 En una batalla de la Segunda Guerra Mundial, resultaron muertos la vigésima parte del número de hombres de los ejércitos participantes, fueron heridos la doceava parte del mismo, más 60, y los que quedaron ilesos representan la mitad del total, más 820. ¿Cuántos hombres quedaron ilesos luego de esa batalla?

Resolución: Sea el total de hombres: 60n

* Muertos: $\frac{1}{20}(60n) = 3n$

* Heridos: $\frac{1}{12}(60n) + 60 = 5n + 60$

* Ilesos: $52n - 60$

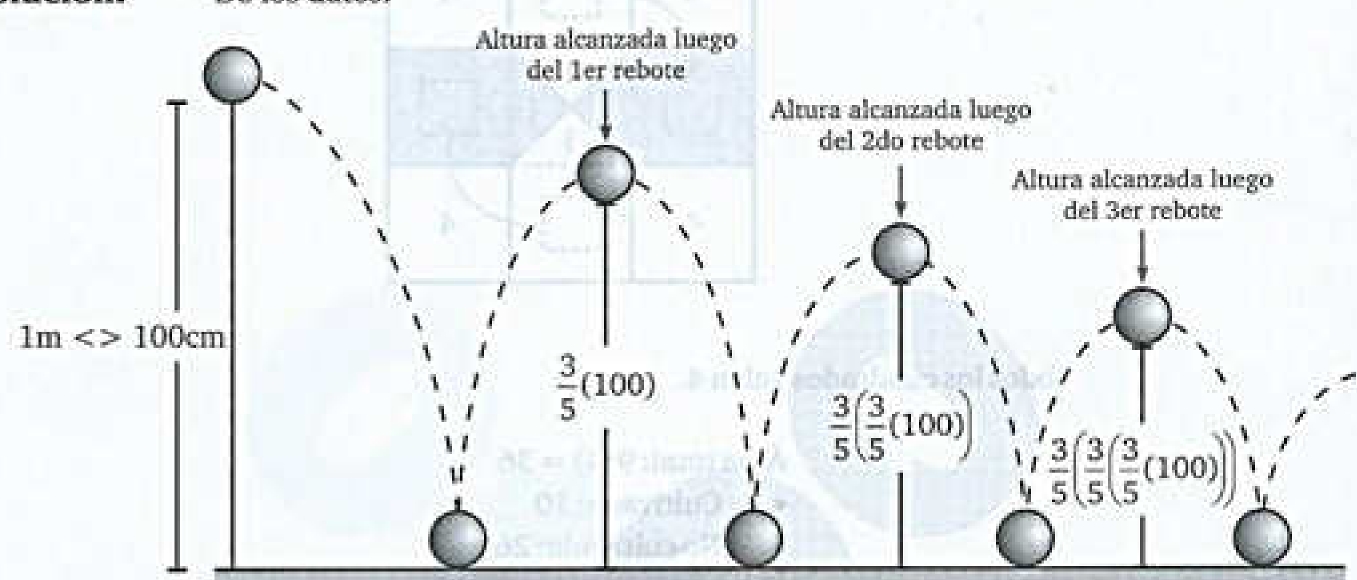
Del dato: los ilesos representan la mitad del total, más 820:

$$52n - 60 = 30n + 820$$
$$n = 40$$

$$\therefore \text{ N° de ilesos} = 52(40) - 60 = 2020$$

PROBLEMA 4 Una pelota pierde las 2/5 partes de su altura en cada rebote que da. si se le deja caer desde un metro de altura, ¿qué altura alcanzará después del tercer rebote?

Resolución: De los datos:



Entonces la altura alcanzada en el 3er rebote es:

$$\frac{3}{5}\left(\frac{3}{\cancel{5}}\left(\frac{3}{\cancel{5}}\overset{4}{(\cancel{100})}\right)\right)=\frac{108}{5}\text{ cm}$$

NOTA "S"

1. Pierde: $\frac{2}{5}(100)$ Se eleva: $\frac{3}{5}(100)$

2. En cada rebote se eleva la fracción elevada al número de rebotes multiplicado por la altura inicial. En el problema: $\left(\frac{3}{5}\right)^3(100)=\frac{108}{5}$

PROBLEMA 5 Si al denominador de una fracción propia e irreductible se le añade 3 , se volvería equivalente a 1/2; en cambio si al numerador se le suma 4 unidades, ambos términos se hacen iguales. ¿Cuánto se le debe sumar a ambos términos de la fracción original para que sea igual a $0,\overline{81}$?

Resolución: Sea: $\frac{a}{b}$ la fracción propia (a < b) e irreductible

1ra condición: $\frac{a}{b+3} <> \frac{1k}{2k} \rightarrow 2a = b+3$

2da condición: $\frac{a+4}{b} \rightarrow a+4=b$

De ambas condiciones:

$$2a = \underbrace{(a+4)}_{b} + 3 \rightarrow a = 7;\ b = 11$$

Para obtener $0,\widehat{81}$ hay que sumar x a cada término:

$$\frac{7+x}{11+x} = 0,\widehat{81}$$

$$\frac{7+x}{11+x} = \frac{81}{99}$$

$$\therefore \quad x = 11$$

PROBLEMA 6 Se tiene un barril lleno con agua, alcohol y vino donde los 2/5 del total, más 8 litros son agua; los 2/8 del total, menos 3 litros son alcohol y los 3/9 del total menos 2 litros son vino. ¿Qué parte de la cantidad de vino es el alcohol?

Resolución: Se asume un volumen que se pueda dividir entre 5, 4 y 3, para mayor rapidez en la solución de problema (60k)

- $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ • $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

<u>VOLUMEN TOTAL</u>: 60k

60k		
	20k – 2	Vino : $\frac{1}{3}(60k) - 2 = 20k - 2$
	24k + 8	Agua : $\frac{2}{5}(60k) + 8 = 24k + 8$
	15k – 3	Alcohol : $\frac{1}{4}(60k) - 3 = 15k - 3$

Sumando: $59k + 3 = 60k$

$3 = k$

$$\therefore \quad f = \frac{OH}{VINO} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$$

PROBLEMA 7 Hallar la mayor fracción en cada uno de los casos:

i) $\underbrace{\frac{3a^2 - b}{3a(a-1) + 3a}}_{\alpha}$; $\underbrace{\frac{\overline{xx} + \overline{bb} + 1}{10x + 9b - 1}}_{\beta}$

ii) $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{1}{8}$

iii) $\frac{13}{17}$; $\frac{101}{111}$

Resolución: Para cada caso utilizaremos los criterios correspondientes que son:

i) Sabemos que "Toda F. impropia es mayor que la F. propia"

$$\text{Simplificado} \rightarrow \underbrace{\frac{3a^2-b}{3a^2}}_{\substack{\text{F. PROPIA} \\ (\alpha)}} \qquad \underbrace{\frac{11x+11b+1}{10x+9b-1}}_{\substack{\text{F. IMPROPIA} \\ (\beta)}}$$

$\therefore\ \beta$ (mayor)

ii) Homogenizando los numeradores a 12, por conveniencia pues en los denominadores sería más complicado homogenizar:

$$\frac{4\times3}{7\times3};\ \frac{3\times4}{5\times4};\ \frac{6\times2}{11\times2};\ \frac{1\times12}{8\times12}$$

$\therefore$ El mayor es aquel que tiene menor denominador: $\frac{3}{5}$

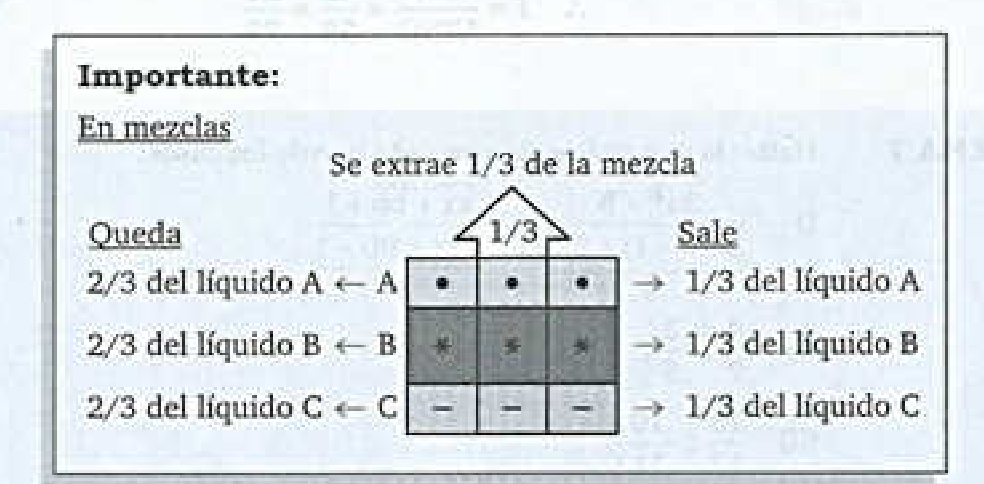
iii) Aplicando el criterio de la multiplicación en aspa:

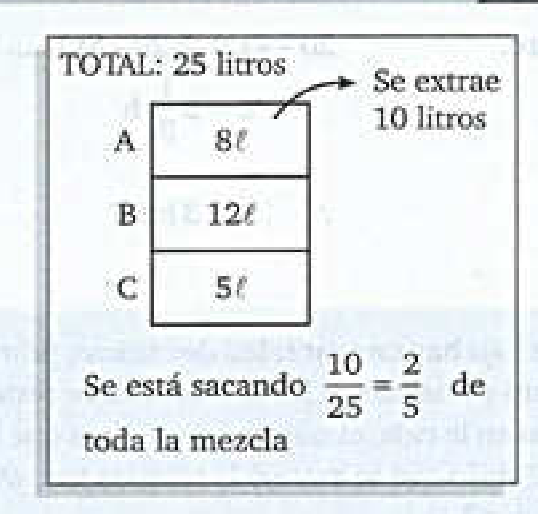
$$\overset{1443}{\frac{13}{17}} \quad \overset{1717}{\frac{101}{111}}$$

$\therefore \frac{101}{111}$ (mayor)

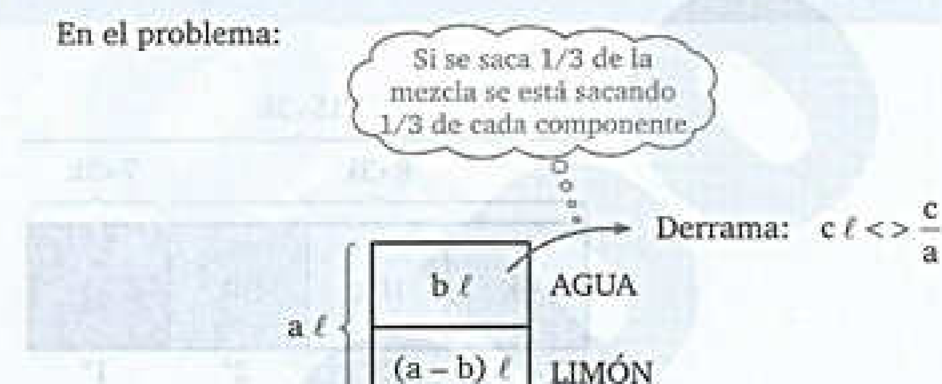
PROBLEMA 8 Se tiene "a" litros de limonada, compuesto por "b" litros de agua. Un descuidado vendedor derrama "c" litros de limonada. ¿Cuanto de jugo de limón queda en el recipiente?

Resolución:





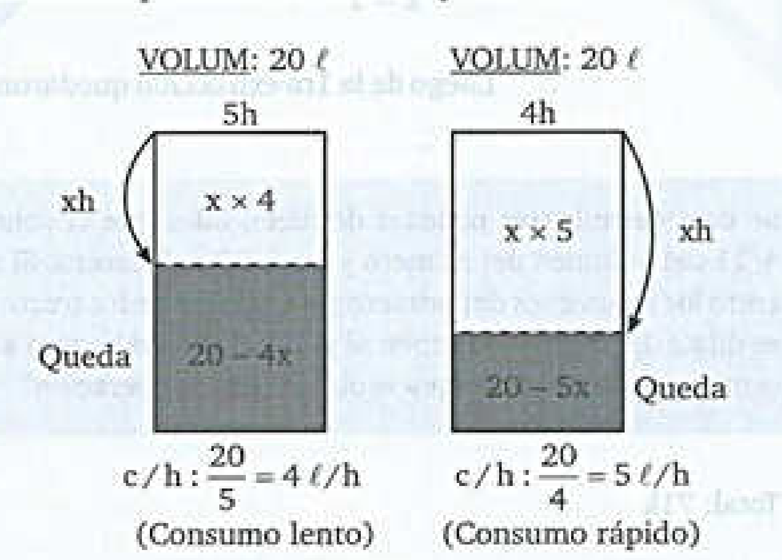
En el problema:



$\therefore$ Queda limón: $\left(\dfrac{c-a}{a}\right)(a-b)$

PROBLEMA 9 Dos automóviles con igual capacidad de sus tanques, consumen la gasolina en 5 h y 4 h respectivamente, ¿después de qué tiempo de que ambos están en marcha el volumen de gasolina que queda en uno de los tanques es el doble de lo que queda del otro?

Resolución: Asumimos 20ℓ pues se divide entre 5 y 4 horas:



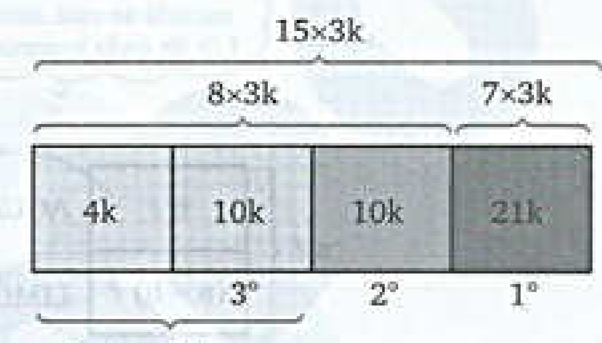
Por dato: $20-4x = 2(20-5x)$ .... "uno es el doble del otro"

$$x = 3\frac{1}{3}\ h$$

$$\therefore \quad x = 3\,h\,20'$$

PROBLEMA 10 En una caja hay una cantidad de canicas, primero se sacan los 7/15, luego los 5/12 del resto y finalmente los 5/7 del último resto. Si se agregaran 5 canicas a las que quedan en la caja, el número de canicas que habría en la caja, sería equivalente a los 3/7 de lo que se extrajo la primera vez. ¿Cuántas canicas quedó de la primera extracción?

Resolución:



$$2°: \ \frac{5}{12}(24k) = 10k$$

$$3°: \ \frac{5}{7}(14k) = 10k$$

Planteando: $4k + 5 = \frac{3}{7}(21k)$

$$k = 1$$

∴ Luego de la 1ra extracción quedaron 24k < > 24(1)

PROBLEMA 11 Se deja derretir tres pedazos de hielo, tales que el volumen del segundo es los 4/11 del volumen del primero y los 6/13 del tercero. Si se sabe que la diferencia entre los volúmenes del primero y del tercero de los trozos es 231 cm^3 y que el agua se dilata 1/10 de su volumen al pasar el estado líquido al estado sólido, ¿cuántos centímetros cúbicos de agua se obtiene en esa operación?

Resolución: Total: 71k

1er pedazo : 33k ← Ponemos esta cantidad convenientemente

$\frac{4}{11}$ del primero

2do pedazo : 12k

$\frac{6}{13}$ del tercero

3er pedazo : 26k ← Ponemos esta cantidad convenientemente

Dato: Diferencia entre el primero y el tercero.

$$33k - 26k = 231$$
$$k = 33$$

El agua se dilata $\frac{1}{10}$ de su volumen al pasar del estado líquido al estado sólido.

Sea "N" cm^3 que se obtiene en la operación; entonces:

$$\frac{11}{10}N = 71(33)$$

$$\therefore \quad N = 2130$$

PROBLEMA 12 Una persona gasta $\frac{1}{n}$ de dinero, luego gasta $\frac{1}{(n-1)}$ el resto, luego $\frac{1}{(n-2)}$ del nuevo resto y así sucesivamente hasta que por último gastó una cantidad que viene a ser la mitad del último resto. ¿Cuánto tenía al inicio?

Resolución: Se deduce que la última vez que gasta, lo hace gastando $\frac{1}{2}$ del resto, es decir "a" (dato) entonces le quedará la otra mitad también igual a "a".

(Último)° .... 5° 4° 3° 2° 1°

Gasta : $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \cdots\cdots \frac{1}{n-4} \quad \frac{1}{n-3} \quad \frac{1}{n-2} \quad \frac{1}{n-1} \quad \frac{1}{n}$

Cantidad inicial : T

Le queda : $\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} \cdots\cdots \frac{\cancel{(n-3)}}{\cancel{(n-2)}} \times \frac{\cancel{(n-2)}}{\cancel{(n-1)}} \times \frac{\cancel{(n-1)}}{n} T = a$

$$\therefore \quad T = na$$

PROBLEMA 13 Un adulto y un niño caminan juntos. El adulto da pasos de 3/4 de metro y el niño de 1/2 metro. ¿Qué distancia habrán recorrido cuando el niño ha dado 1000 pasos más que el adulto?
ADMISIÓN UNMSM 2014-I

Resolución: De los datos:

Adulto → 1 paso → 3/4 metro
Niño → 1 paso → 1/2 metro

En 3 metros:

Adulto → 4 pasos
Niño → 6 pasos
Diferencia 2 pasos

Luego:

Diferencia de pasos (niño - adulto)	En:
2 pasos	3m
1000 pasos	x

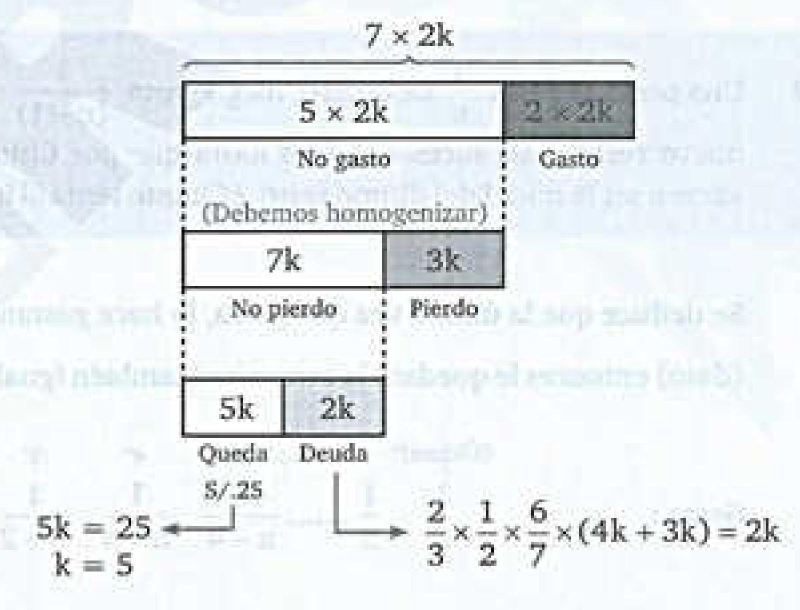
Aplicamos una regla de 3 simple

$x = 1500$

∴ Distancia que han recorrido es 1500 metros.

PROBLEMA 14 De una cantidad de dinero se gastó 2/5 de lo que no gastó, luego de lo que quedaba se perdió 3/7 de lo que no se perdió; finalmente del resto se pagó una deuda que era igual a los 2/3 de la mitad de los 6/7 de lo que se gastó y perdió en total, quedándole aún 25 soles. ¿Cuánto era la cantidad inicial?

Resolución:



∴ Cantidad inicial: $14k = 14(5) = S/.70$

PROBLEMA 15 Se tiene 3 caños para llenar un tanque. El primero puede llenarlo en 72 horas, el segundo en 36 horas y el tercero en 40 horas. Si estando vacío el tanque se abren simultáneamente los 3 caños, ¿en qué tiempo llenarían los 4/5 de los 3/4 del tanque?

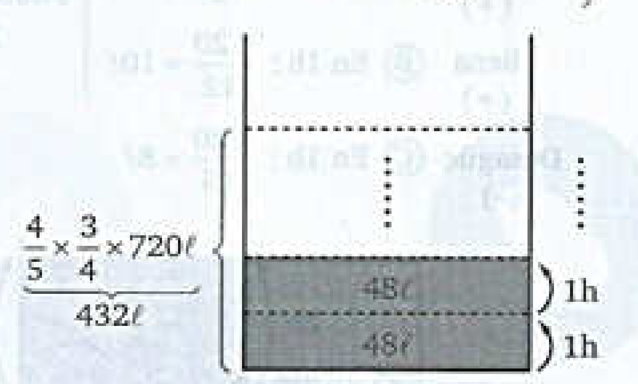
Resolución: Volumen total: 720l (es múltiplo de 72; 36 y 40)

1er caño: En 1h: $\frac{720}{72} = 10\ell$

2do caño: En 1h: $\frac{720}{36} = 20\ell$

3er caño: En 1h: $\frac{720}{40} = 18\ell$

Los 3 juntos en 1h llenan: $10 + 20 + 18 = 48\ell$



∴ # de horas para llenar los 432 ℓ : $\frac{432}{48} = 9h$

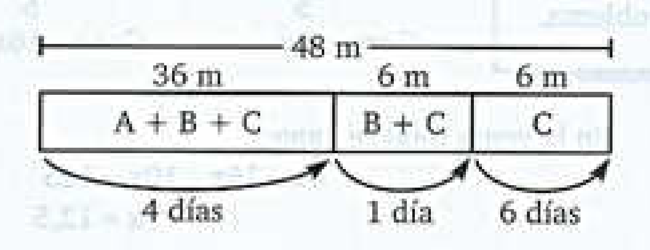
PROBLEMA 16 Una obra puede ser hecha por "A" y "B" en 6 días, por "B y C" en 8 días, y por "A y C" en 12 días. La obra es empezada por los 3 juntos y cuando ya han hecho las 3/4 partes "A" se retira, "B y C" continúan hasta que hayan hecho la mitad de lo que quedaba, entonces se retira "B", terminando "C" lo que falta de la obra. ¿En cuántos días se hizo la obra?

Resolución: Sea una obra de 48 m de pared

(Este número es múltiplo de 6, 8 y 12)

Obreros		Obra (48 m)		1 día	
A + B	→	6 días	→	8 m	...(I)
B + C	→	8 días	→	6 m	
A + C	→	12 días	→	4 m	
2(A + B + C)		→		18 m	
A + B + C		→		9 m	...(II)

De (I) y (II) se deduce que C en un día → 1 m



∴ La obra se realizó en 11 días.

PROBLEMA 17 Un caño A tarda en llenar un tanque 8 h, otro caño B tarda 12 h y un caño de desagüe tarda en desocupar todo el tanque en 15 h. Estando vacío el tanque se abren A, B y C en ese orden con intervalo de 2 h ¿en qué tiempo se llenará los 19/20 del tanque?

Resolución: VOLUMEN TOTAL: 120 ℓ

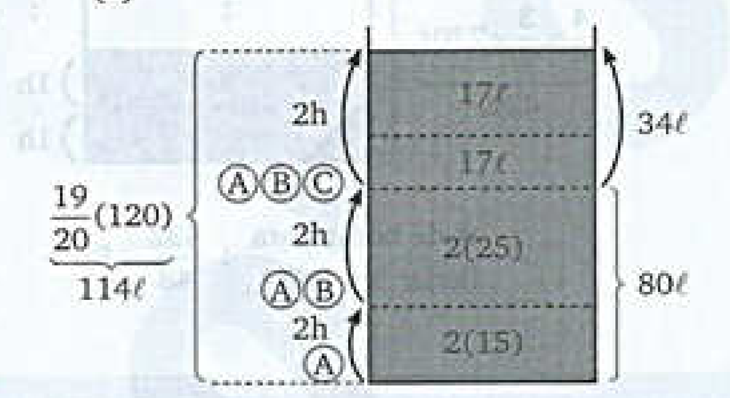
llena (+) Ⓐ En 1h : $\frac{120}{8} = 15\ell$
llena (+) Ⓑ En 1h : $\frac{120}{12} = 10\ell$
} Juntos en 1h 25ℓ

Desagüe (−) Ⓒ En 1h : $\frac{120}{15} = 8\ell$

} Juntos en 1h $15 + 10 - 8 = 17\ell$

NOTA "S"

120 litros es un múltiplo común de 8, 12 y 15



∴ Tiempo de llenado para los 114ℓ : 2h + 2h + 2h = 6h

PROBLEMA 18 Un lote de cierta mercadería se vende de la siguiente manera: La quinta parte ganando 1/5 de su precio de costo, la mitad del resto ganando 2/5 de su precio de costo, finalmente se vende lo restante con una pérdida de 1/4. Si en la venta total se ganó 125 soles. ¿Cuál es el costo de todo el lote?

Resolución: Costo total = 100x

$\frac{1}{5}$ Costo = 20x	$\frac{2}{5}$ Costo = 40x	$\frac{1}{4}$ Costo = 40x

Gana $= \frac{1}{5}(20x)$ Gana $= \frac{2}{5}(40x)$ Pierde $= \frac{1}{4}(40x)$

Gana = 4x Gana = 16x Pierde = 10x

NOTA "S"

Se asume el costo total 100x para un mejor planteo del problema.

En la venta total se gana:

$$4x + 16x - 10x = 125$$

$$x = 12,5$$

∴ Costo total: 100(12,5) = 1250

PROBLEMA 19 Un recipiente contiene 72 litros de vino. Se extraen 12 litros y se reemplazan con agua, enseguida se extraen 18 litros de la mezcla y se reemplazan con agua, y por último se extraen 16 litros de la nueva mezcla y se reemplazan con agua, la relación de agua y vino al final de la mezcla es:

Resolución:

Se extrae del total: $\frac{18}{72}=\frac{1}{4}$

Se extrae del total: $\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$

Se trabaja con lo que queda de vino en cada proceso:

$$\frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}(72)\right)\right)=35$$

(se extrae $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$)

NOTA "S"

Se trabaja con lo que queda de la sustancia diferente al agua (en fracción)

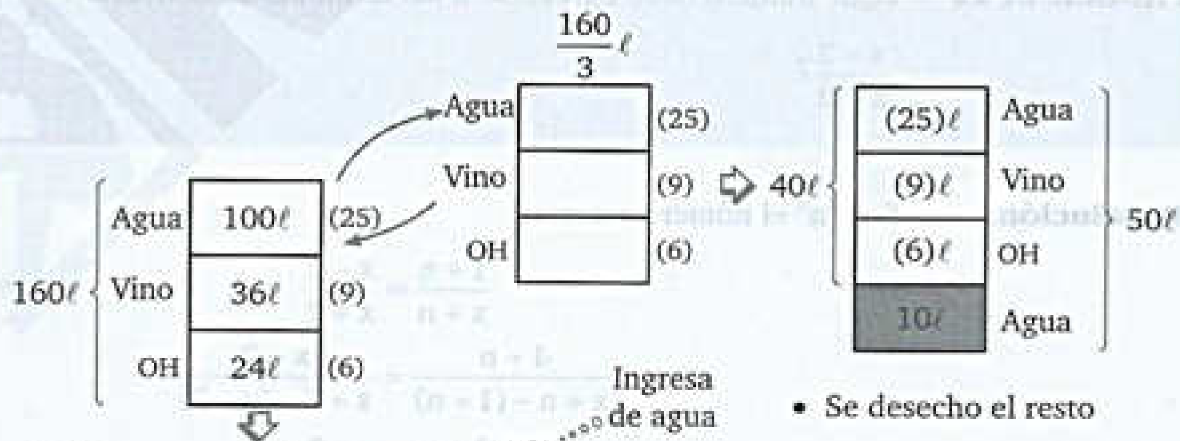
Entonces queda de agua:

$$72-35=37$$

$\therefore$ Piden: $\frac{37}{35}$

PROBLEMA 20 En un recipiente de 160ℓ de capacidad se llena 100 ℓ de agua, 36 ℓ de vino y el resto de OH; luego se extrae la tercera parte y se reemplaza por agua, lo extraído se vierte en un recipiente de 50 ℓ de capacidad pero que ya contiene 10 ℓ de agua, lo que no logra ingresar se desecha. ¿Qué fracción representa el agua que hay en el 2do recipiente respecto la cantidad de agua en el 1er recipiente?

Resolución:



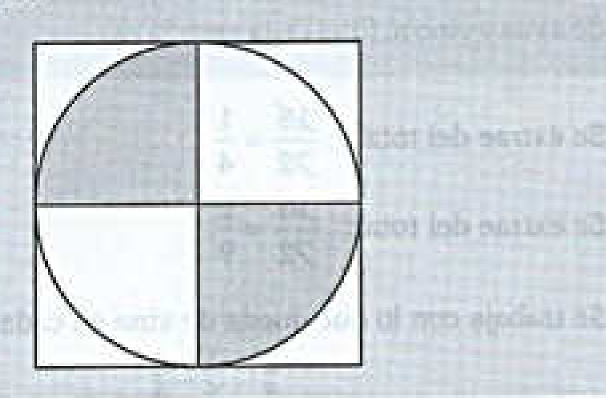
Del dato se reemplaza por agua: $\frac{160}{3}\ell$

Queda de agua: $\frac{2}{3}(100)+\frac{160}{3}=\frac{360}{3}=120\ell$

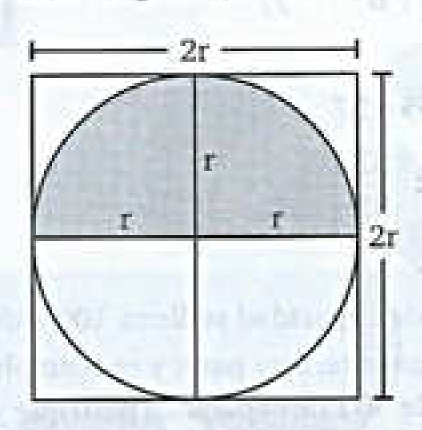
En el 2do recipiente: $10\ell+25\ell=35\ell$

$$\therefore\quad f=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$$

PROBLEMA 21 Milk compra un cuadro en forma de cuadrado el cual tiene 2 colores blanco y negro. ¿Qué parte representa el área de la región sombreada con respecto al área de la región cuadrangular? SAN MARCOS 2006-I



Resolución: Trasladando regiones, tenemos:



Nos piden:

$$\frac{\text{área región sombreada}}{\text{área región cuadrangular}}=\frac{\frac{\pi r^2}{2}}{(2r)^2}$$

$$\frac{\text{área región sombreada}}{\text{área región cuadrangular}}=\frac{\pi \cdot \cancel{r^2}}{8\cancel{r^2}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{área región sombreada}}{\text{área región cuadrangular}}=\frac{\pi}{8}$$

PROBLEMA 22 ¿Qué número debe agregarse a los términos de la fracción $\frac{1}{x}$ para que resulte $\frac{x-2}{x+2}$?

Resolución: Sea "n" el número a sumar:

$$\frac{1+n}{x+n}=\frac{x-2}{x+2}$$

$$\frac{1+n}{x+n-(1+n)}=\frac{x-2}{x+2-(x-2)}$$

$$\frac{1+n}{x-1}=\frac{x-2}{4}$$

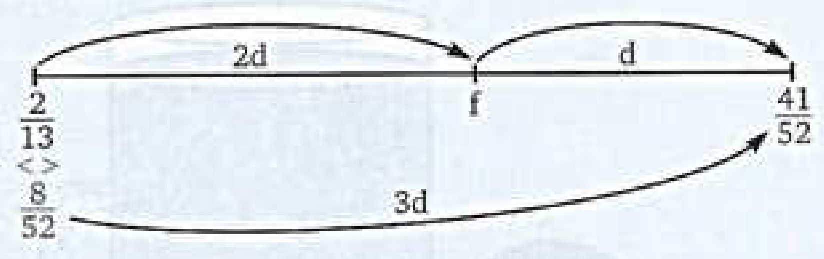
$$1+n=\frac{x^2-3x+2}{4}$$

$$n=\frac{x^2-3x+2}{4}-1$$

$$\therefore\ n=\frac{x^2-3x-2}{4}$$

PROBLEMA 23 Una fracción f está ubicada entre 2/13 y 4 1/52 y su distancia a la primera fracción es el doble de su distancia de la segunda fracción. Halla una fracción equivalente a f tal que la suma de sus términos sea 410.

Resolución: Sea la fracción "f"; de los datos:



Entonces : $\frac{41}{42}-\frac{8}{52}=3d \rightarrow d=\frac{11}{52}$

Hallamos el valor de la fracción "f":

$$f=\frac{41}{52}-\frac{11}{52}=\frac{30}{52}=\frac{15}{26}$$

Piden una fracción equivalente a: $\frac{15}{26}$

$$\left.\begin{matrix}\frac{15n}{26n}\end{matrix}\right\}410$$

$$41n=410 \rightarrow n=10$$

$\therefore$ La fracción equivalente es: $\frac{150}{260}$

PROBLEMA 24 Un barril contiene vino en su cuarta parte y el resto es agua. Se extrae la novena parte y se reemplaza con agua, y después se extrae la sexta parte de lo que queda y se reemplaza con vino. ¿Cuál es la relación entre los volúmenes finales de agua y vino?

Resolución: Sea el total de litros: x $\quad \frac{1}{4}x$ (vino) $\quad \frac{3}{4}x$ (agua)

Trabajamos con lo que va quedando de vino en cada proceso.

Se agrega 1/6 de vino; Se extrae 1/6; Se extrae 1/9

$$\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}\left(\frac{8}{9}\left(\frac{1}{4}(x)\right)\right)=\frac{19}{54}x$$

Entonces lo que queda de agua es:

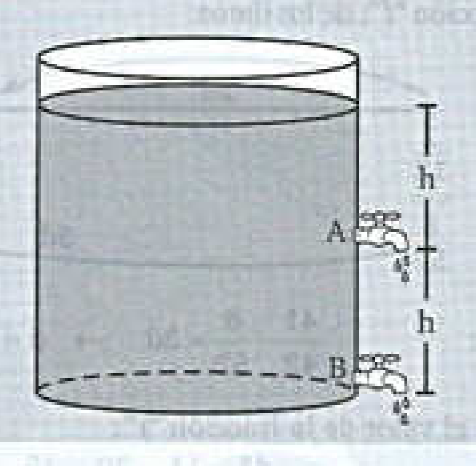
$$x-\frac{19}{54}x=\frac{35}{54}x$$

Piden: $\dfrac{\frac{35}{54}x}{\frac{19}{54}x}=\frac{35}{19}$

NOTA "S"

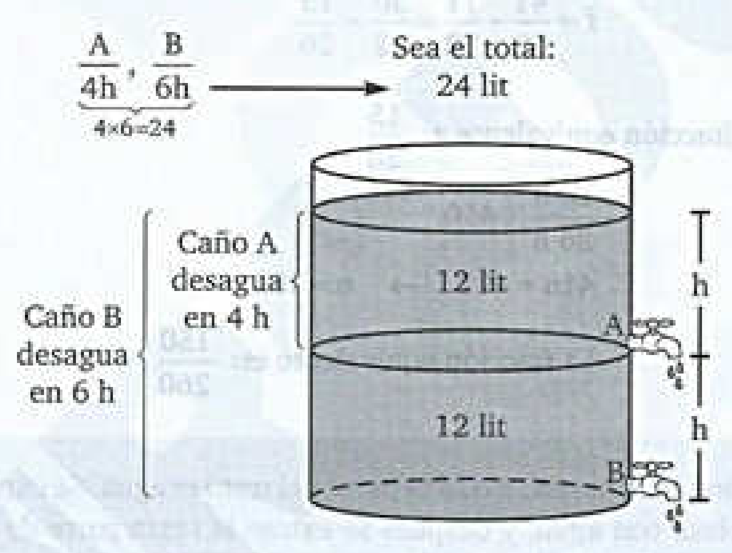
Cuando se extrae 1/6 del total y ya no se reemplaza con agua sino con vino entonces lo que ingresa a la mezcla es 1/6 del total

PROBLEMA 25 Se tiene un depósito como muestra el gráfico el caño A desagua el contenido que está sobre él en 4 h mientras que el caño B lo realiza en 6 h. Si se llena el recipiente, ¿cuántas horas debe de pasar luego de abrir las llaves simultáneamente para que el recipiente quede vacío?



Resolución:

$\underbrace{\dfrac{A}{4h}, \dfrac{B}{6h}}_{4\times 6=24} \longrightarrow$ Sea el total: 24 lit



En 1 h	Caño A	→	3 litros
	Caño B	→	4 litros
	Juntos A y B	→	7 litros

Del gráfico observamos que juntos harán 12 litros en:

$$\frac{12}{7}h$$

Luego en los 12 litros restantes solo trabajara el caño B, desaguando su contenido en:

$$\frac{12}{4} = 3h$$

∴ El número de horas que debe transcurrir para vaciar el recipiente es:

$$\frac{12}{7} + 3 = \frac{33}{7}h$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Entre los 3/2 de los 4/7 de un número y los 2/3 de 1/7 del mismo número existe una diferencia de 32. ¿De qué número se trata?.

A) 40 B) 41 C) 39
D) 43 E) 42

2. ¿Cuánto le falta a 4/11 para ser igual a los 2/3 de los 4/9 de los 6/11 de 7?

A) 73/88 B) 66/71 C) 74/95
D) 11/13 E) 76/99

3. Los 2/3 de 7/8 de 3/4 del triple de x es igual a los 21/160 de x^2. Hallar 2x/5.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 3

4. El 8 por n de n^2 es 16 y el 5 por m de $5m^2$ es 50. ¿Qué parte es m^2 respecto de n^3?

A) 25/3 B) 11/2 C) 13/5
D) 1/8 E) 25/2

5. Sea $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Calcule: $3a + 2b$

Si: $\frac{a}{11} + \frac{b}{5} = 1,0\widehat{36}$

A) 9 B) 15 C) 21
D) 18 E) 25

6. Si se cumple que:

$$0,\widehat{ab} - 0,a\overline{b} = \frac{1}{220}$$

Halle: $(a-b)^2$

A) 1 B) 4 C) 0
D) 9 E) 25

7. Cuando a ambos términos de una fracción positiva se le suma 4, la fracción aumenta 4/15. ¿Cuál es esta fracción, sabiendo que sus términos se diferencian en 3?

A) 3/5 B) 7/10 C) 11/14
D) 9/11 E) 6/5

8. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de numerador 75 existen, de modo que sean mayores a 1/5?

A) 160 B) 170 C) 140
D) 138 E) 139

9. Una plancha de madera pierde al ser aserrada 2/9 de su ancho y 3/10 de su largo, quedando así un área de 2744 metros cuadrados. Determinar el ancho original de la plancha, sabiendo que el lago original era 80 metros.

A) 60 m B) 58 m C) 70 m
D) 63 m E) 48 m

10. En une examen de admisión existen 3 pruebas eliminatorias, en la primera prueba se elimina 1/3 de los postulantes, en la segunda 1/4 y en la tercera 1/2. Si ingresaron 15 postulantes. ¿Cuántos fueron los postulantes?

A) 65 B) 71 C) 40
D) 50 E) 60

11. Una camisa cuesta 5 veces lo que cuesta una corbata. Si compro ambos artículos, me rebajan la camisa en 3/10 y la corbata en 1/5, de su precio respectivamente y así quedaría beneficiado con una rebaja de S/.714. ¿Cuál es el precio de la corbata?

A) 500 B) 450 C) 280
D) 360 E) 420

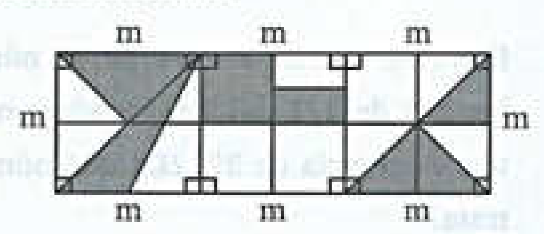
12. En una batalla entre los ejércitos A y B sólo participan los 3/7 del ejército A y los 5/9 del ejército B si fallecen 1/4 y 1/2 de los combatientes respectivamente y ahora los efectivos de A son los 9/70 de los de B. Hallar en qué relación se encontraban los ejércitos originalmente.

A) 1/3 B) 1/5 C) 1/7
D) 1/8 E) 1/9

13. Julio y Percy comienzan a jugar con igual suma de dinero, cuando Percy ha perdido los 5/9 del dinero con que empezó a jugar, lo que ha ganado Julio es 36 soles más que la mitad de lo que le queda a Percy. ¿Con cuánto empezaron a jugar?

A) 105 B) 107 C) 106
D) 112 E) 108

14. ¿Qué parte de la región no sombreada es la región sombreada?



A) 3/7 B) 5/9 C) 3/11
D) 1/9 E) 5/7

15. En la caja hay una cantidad de libros; primero se sacan los 7/15, luego los 5/12 del resto y finalmente los 5/7 del último resto. Si se agregan 5 libros a los que quedan en la caja, el número de libros sería equivalente a los 3/7 de lo que se extrajo la primera vez. ¿Cuántos libros quedaron luego de la primera extracción?

A) 21 B) 30 C) 26
D) 32 E) 24

16. Un vendedor tiene 2 canastas de manzanas con igual cantidad en cada una. De la primera canasta se retira la quinta parte y la coloca en la otra, luego de esta regresa la cuarta parte a la primera, que con éste aumento tendría 44 manzanas. ¿cuántas manzanas tenía cada canasta inicialmente?

A) 50 B) 60 C) 30
D) 45 E) 40

17. Sonia, tenía cierta cantidad de dinero, primero gastó los 3/5 en zapatos, luego gastó los 3/4 del resto en dulces, y por último gastó 1/5 de lo que le quedaba en pasajes, quedándole sólo 20 soles. ¿Cuánto tenía al inicio?

A) 245 B) 255 C) 248
D) 253 E) 250

18. Josefina va al mercado y gasta en carne los 2/3 del dinero que llevó, más S/.4; en menestras gastó 1/6 de lo que le quedaba, más S/.6; en frutas gastó los 3/7 del nuevo resto, más S/.6. ¿Cuánto llevó al mercado si regresó con S/.4?

A) 96,6 B) 76,5 C) 90,4
D) 93,7 E) 95,5

19. De un recipiente lleno con 80 L de vino retiro 2/3 de lo que no retiro, luego, de lo que queda saco 1/3 de lo que no aco; enseguida, del resto extraigo la tercera parte, ¿cuando quedó de vino al final?

A) 24 L B) 30 L C) 60 L
D) 45 L E) 96 L

20. En una fiesta se observa que la relación del número de hombres al de mujeres es como 6 es a 7. Después de las 6 p.m. se retiran 1/5 de los asistentes, de los cuales 2/3 son mujeres Hallar la nueva relación entre hombres y mujeres.

A) 71/73 B) 66/71 C) 77/79
D) 37/43 E) 87/98

21. Con 1/17 del contenido de un cilindro se puede llenar las 2/3 partes de un balde. Si se tiene 2 cilindros llenos y se quiere llenar 68 baldes del mismo volumen que el anterior. ¿Cuántos cilindros más del mismo volumen que los anteriores se necesitarán?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Después del primer encuentro con el enemigo el ejército A perdió 1/8 de sus efectivos y el ejército B 1/9 del suyo. En el resto de la campaña los dos ejércitos perdieron el mismo número de hombres, resultando al final que el ejército A perdió 90 soldados y el B, 105 soldados. si el número de sobrevivientes del ejército B es el doble de los sobrevivientes del ejército A, ¿cuántos hombres iniciaron el combate?

A) 1/3 B) 1/7 C) 2/7
D) 5/8 E) 2/3

23. En un recipiente donde sólo hay leche y agua los 3/4 del contenido, más 7 litros, es leche y 1/3 del contenido, menos 20 litros, es agua ¿cuál es la relación entre la cantidad de leche y de agua?

A) 31/8 B) 23/7 C) 18/5
D) 11/3 E) 31/7

24. ¿Averiguar en qué día y hora del mes de abril de 1952 se verificó que la fracción transcurrida del mes fue igual a la fracción transcurrida del año?

A) 8 abril, 3 a.m.
B) 5 abril, 3 a.m.
C) 7 abril, 3 a.m.
D) 9 abril, 3 a.m.
E) 11 abril, 4 a.m.

25. Un automovilista observa que 1/5 de lo recorrido equivale a 2/6 de lo que falta por recorrer. ¿Cuántas horas habrá empleado hasta el momento, si todo el viaje lo hace en 32 horas?

A) 23 B) 21 C) 22
D) 24 E) 20

26. A un alambre de 130 metros de longitud se dan tres cortes, de manera que la longitud de cada trozo resultante es igual al anterior, aumentado en su mitad. ¿Cuál es la longitud del trozo mayor?

A) 38 B) 46 C) 45
D) 60 E) 54

27. Un niño pierde las 2/3 partes del número de canicas que tenía y, luego pierde 1/3 del resto, finalmente gana 1/5 del nuevo resto quedandole entonces 24 canicas. ¿Cuántas canicas tenía al principio?

A) 60 B) 70 C) 80
D) 90 E) 100

28. ¿Cuántas fracciones impropias e irreductibles de denominador 3 son menores que 20?

A) 24 B) 36 C) 44
D) 38 E) 42

29. Las fracciones irreductibles $\frac{\sqrt[3]{a(b+4)}}{\sqrt[3]{cd}}$ y $\frac{b}{d}$ son iguales y originan el número decimal 0,mn. Calcular: $\frac{n+m}{c-a}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

30. ¿Cuántas fracciones equivalentes a 69/119 existen, tal que sean de la forma ab/ba?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

31. Hallar una fracción equivalente a $0,\widehat{2}$ cuyo numerador esté entre 15 y 35 y el denominador entre 50 y 75.

A) 11/16 B) 15/37 C) 16/72
D) 16/73 E) 23/41

32. La fracción 23/55 está comprendida entre 2 fracciones homogéneas cuyo denominador común es 19 y los numeradores son 2 números consecutivos. Halle estos dos números.

A) 7 y 8 B) 19 y 20 C) 6 y 7
D) 20 y 21 E) 8 y 9

33. Hallar la suma de los términos de una fracción equivalente a 4/11, si al sumarle 11 a cada termino se obtiene $0,52\overline{27}$.

A) 40 B) 42 C) 43
D) 44 E) 45

34. Para llenar una piscina. Sandra demora 6 horas utilizando la llave A. Si cuando la piscina está llena hasta la tercera parte se abren dos llaves B y C que suministran el doble y el triple de A, respectivamente, cada hora, ¿cuánto demorará en terminar de llenar la piscina?

A) 30h B) 18h C) 24h
D) 20h E) 16h

35. Se cuenta que tres equipos de obreros que pueden hacer el mismo trabajo en 8; 10 y 12 días, respectivamente. Se toma la mitad del primero, la tercera parte del segundo y los tres cuartos del tercero. ¿En cuántos días quedarán terminados los 19/30 del trabajo?

A) 5 B) 6 C) 4
D) 8 E) 10

36. Dos grifos A y B pueden llenar un estanque en 6 horas. El grifo "A", funcionando sólo, puede llenarlo en 15 horas. Estando vacío el estanque, se abre el grifo "B". ¿En cuántas horas lo llenará?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

37. Una piscina es llenada por un caño en 20 minutos y un desagüe la puede vaciar totalmente en 36 minutos. Estando vacía la piscina, se abre el caño de llenado y 4 minutos más tarde, el desagüe. ¿En cuánto tiempo se habrá llenado la piscina, desde el momento en que se abrió el desagüe?

A) 24 B) 30 C) 32
D) 36 e) 40

38. El caño A llena el recipiente mostrado en 20 horas, estando cerrado B. El desagüe B retira la parte que le corresponde en 30 horas, estando cerrado el caño A. Si se abren los dos caños a la vez estando el recipiente vacío ¿en qué tiempo se llenará el recipiente?

A) 30 h
B) 40 h
C) 35 h
D) 28 h
E) 25 h

A
B
h
h/4

39. A puede hacer un trabajo en 10 días mientras que a B le tomaría 15 días; al hacerlo A; B y C pueden realizar este trabajo conjuntamente en 5 días. Los 3 inician sus labores, al llegar a 1/4 de a obra A y B se retiran. ¿Cuánto tiempo le tomará a C terminar dicho trabajo sólo?

A) $22\frac{1}{2}$ B) $23\frac{1}{3}$ C) $22\frac{1}{5}$
D) $23\frac{1}{5}$ E) $22\frac{1}{8}$

40. Ronald y Ángel pueden hacer una obra en 20 días. Después de 14 días Ronald se retira, y Ángel termina lo que falta en 9 días. Si en lugar de Ronald se hubiera retirado Ángel, ¿en qué tiempo Ronald hubiera terminado lo que faltaba?

A) 19 B) 16 C) 18
D) 20 E) 15

41. A 180 litros de una mezcla alcohólica con 2/5 de alcohol se le añade 90ℓ de H_2O. ¿Cuántos litros de OH puro se deberán agregar a esta mezcla para obtener la concentración inicial de OH?

A) 11 B) 50 C) 60
D) 70 E) 58

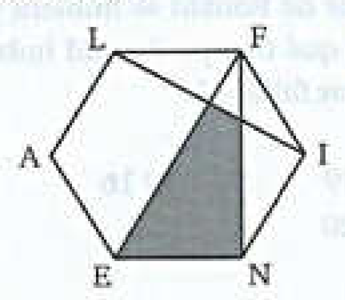
42. Un comerciante vende sus pantalones de la siguiente manera: del total que tenía 1/3 más 4, a 50 soles cada uno; luego vende los 3/5 de lo que les quedan a 40 soles cada uno y finalmente vende la mitad de lo que le quedaba, mas 4 a 30 soles cada uno con lo que se le acaban los pantalones. Hallar la suma de cifras de la cantidad de pantalones y la cantidad que recaudó.

A) 7; 1520 B) 8; 1250 C) 9; 1520
D) 9; 1250 E) 9; 1400

43. Se tiene un tanque lleno de agua el cual tiene dos caños de desagüe. El primero colocado en el fondo y el segundo a 2/5 de la altura respecto del fondo. Se abren los dos caños al mismo tiempo y al cabo de 5 horas el agua esta al nivel del segundo caño, 10 horas más tarde el tanque quedó vacío. Si por el primer caño ha salido en total 90 litros. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

A) 180 ℓ B) 150 ℓ C) 270 ℓ
D) 225 ℓ E) 300 ℓ

44. Que parte de la región no sombreada es el doble de la región sombreada si el exágono es regular de lado 5.



A) 11/36 B) 13/27 C) 13/51
D) 22/25 E) 17/51

45. Un recipiente contiene 36 L de agua y 24 de alcohol puro, se extraen 10 L de la mezcla y se reemplazan por alcohol puro. Luego, de la nueva mezcla se extraen 24 L y se vuelve a reemplazar por alcohol, finalmente, de la mezcla resultante se extraen 20 litros que son reemplazados por agua. ¿Qué parte de la cantidad final de alcohol puro es la cantidad que queda de agua?

A) 1/3 B) 7/8 C) 8/7
D) 2/5 E) 2/3

46. Dos obreros pueden hacer una obra en 16 días, pero si laboran el segundo de ellos con un tercero, culminan la obra en 14 días. ¿Qué tiempo tardarán el primero y el tercero juntos, si los tres trabajando juntos terminarían la obra en 8 días?

A) 6 B) 8 C) 10
D) 5 E) 7

47. Si de un depósito que está lleno los 2/3 de lo que no está lleno, se extrae los 2/3 de lo que no se extrae, ¿qué fracción del volumen del depósito quedaría con líquido?

A) 2/5 B) 3/7 C) 1/10
D) 11/13 E) 2/9

48. Gasté los 2/5 de lo que no gasté, regalando luego los 2/3 de lo que no regalé y presté el doble de lo que no presté. ¿Cuánto tenía al inicio, si la tercera parte de lo que me quedó al final es igual a S/.10?

A) 60 B) 100 C) 36
D) 48 E) 54

49. Si en 80 L de agua de mar existen 2 kg de sal, ¿cuántos litros de agua pura hay que agregar para que en cada 10 litros de la mezcla resultante existan 1/6 kg de sal?

A) 40 B) 60 C) 80
D) 100 E) 120

50. Un vagón lleno de cal pesa 27 toneladas y lleno hasta sus 3/5 pesa los 7/4 del peso del vagón vacío. ¿Cuántas toneladas pesa el vagón vacío?

A) 15 B) 12 C) 13
D) 18 E) 16

El Tanto por Cuanto

CAPACIDADES

- Conocer lo que es el tanto por ciento.
- Conocer las aplicaciones del tanto por ciento.
- Conocer la utilidad del tanto por ciento en muchos aspectos de nuestra vida.

PORCENTAJES DE GRASA

	Mujer	*Hombre*
Esencial.	10 - 12%	2 - 4%
Atleta/fit.	14 - 20%	6 - 13%
Normal.	21 - 24%	14 - 17%
Sobrepeso.	25 - 31%	18 - 25%
Obesidad.	+31%	+25%

* Los hombre tienen menos grasa que la mujer, los rangos son DIFERENTES

* La grasa esencial es la que te mantiene vivo!!

INTRODUCCIÓN

En el que hacer cotidiano muchas veces nos encontramos con frases que dicen:

"..... hoy mejoré en un 50% ......"

"...... el presidente PPK tiene una desaprobación del 75%"

"..... el poder adquisitivo del salario mínimo vital disminuyó en éstos 10 últimos años en 10% ......?

Todo esto nos indica cuánto tomamos de una cantidad referencias igual a 100, pero tiene tantas aplicaciones ya sea en cálculos matemáticos o en el comercio y es por ello que se desarrolla apliamente, cuidando claro el enfoque razonado y lógico que debemos dar al alumno en general.

No olvidemos que el concepto de tanto por ciento surgió por el comercio y al igual que el tanto por mil (0/00) se usaban de manera cotidiana en la aritmética elemental, pero con el transcurrir del tiempo y por la versatilidad de su uso y aplicaciones prevaleció hasta nuestros días como herramienta en los cálculos comerciales e interpretaciones estadísticas.

Es importante también recalcar que cuando no se tiene muy claro el concepto se puede dejar de engañar y manipular por rótulos comunes hoy en las grandes tiendas comerciales:

"¡Hoy! descuento 40% + 40% en ropas"

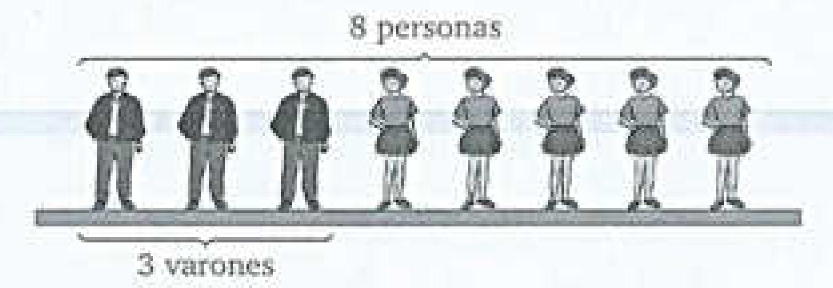
"... estamos liquidando a la competencia .... 75% de "nuestros alumnos ingresan a San Marcos ..."

(No se dice respecto a que cantidad se está aplicando, "nuestros" alumnos pudieron ser 10000 e ingresaron 7500 y de la competencia sus alumnos fueron 5 e ingresaron 5, y el 100% de sus alumnos ingresó)

Por ello debemos comprender con claridad que es el tanto por ciento y como se aplica en los diversos c+alculos, pero para eso primero desarrollaremos el concepto de "Tanto por cuánto" pues el tanto por ciento es un caso particular de él.

CONCEPTO

En una reunión se observa que 3 de cada 8 personas son varones.



Si nos basamos en lo estudiado en el capítulo de fracciones, diremos que los varones representan 3/8. Entonces podemos decir que:

$$\underbrace{\text{"3 de cada 8"}} = \frac{3}{8}$$

$$\text{El 3 por 8} = \frac{3}{8}$$

Luego:

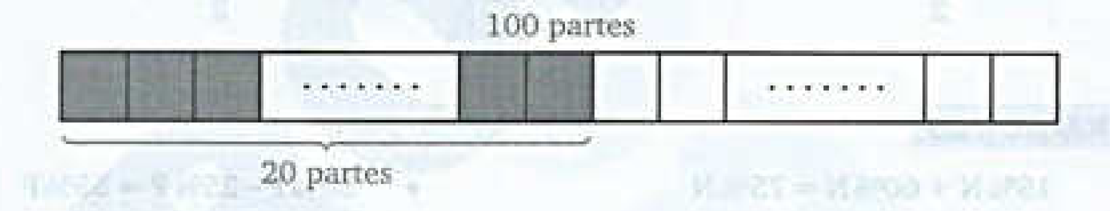
- El 15 por 40 $= \frac{15}{40}$
- El 60 por 50 $= \frac{60}{50}$

$$\text{El "m" por "n"} = \frac{m}{n}$$

↓ tanto ↓ cuanto

EL TANTO POR CIENTO

El tanto por ciento es un caso particular del tanto por cuanto, que surge como consecuencia de tomar 100 como valor referencial.



Lo que está representado es:

- El 20 por $\underbrace{100} = \frac{20}{100}$
- El 20 $\underbrace{\text{por ciento}}_{\%} = \frac{20}{100}$
- El 20% $= \frac{20}{100}$

Luego:

- El 45% $= \frac{45}{100}$
- El 130% $= \frac{130}{100}$

$$\text{El a\%} = \frac{a}{100}$$

Ejercicio:

- Calcule el 9 por 15 del 60% de 75

$$\frac{9}{15}\times\frac{60}{100}\times 75=27$$

- Calcule el 20% del 40% del 125% de 200

$$\frac{20}{100}\times\frac{40}{100}\times\frac{125}{100}\times 200=20$$

EQUIVALENCIAS

- $10\%=\frac{1}{10}$
- $20\%=\frac{1}{5}$
- $25\%=\frac{1}{4}$
- $33,\hat{3}\%=\frac{1}{3}$
- $50\%=\frac{1}{2}$
- $66,\hat{6}\%=\frac{2}{3}$
- $75\%=\frac{3}{4}$
- $100\%=1$
- $125\%=\frac{5}{4}$
- $150\%=\frac{3}{2}$

OPERACIONES

- $15\%N+60\%N=75\%N$
- $A+10\%A=?$
  $100\%A+10\%A=110\%A$
- $80\%P-25\%P=55\%P$
- $X-35\%X=?$
  $100\%X-35\%X=65\%X$

¿Qué tanto por ciento de "a" es "b"?

- ¿Qué tanto por ciento de 48 es 12?

$$\frac{12}{48}\times 100\%$$

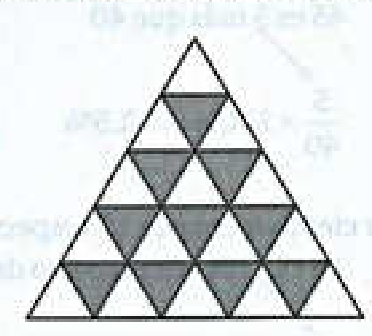
Rpta: 25%

- ¿Qué tanto por ciento es 80 respecto de 32?

$$\frac{80}{32}\times 100\%$$

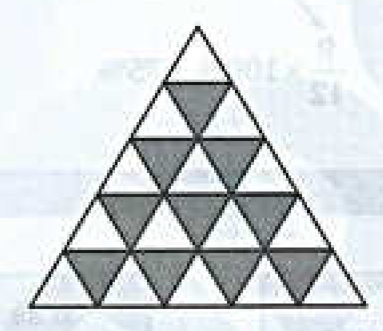
Rpta: 250%

Ejemplo: En el siguiente gráfico todos los triangulitos son iguales:



¿Qué tanto por ciento del total está sombreado?
¿Qué tanto por ciento representa la región sombreada respecto de la sombreada?

Resolución: Asumimos que cada triangulito tiene área 1 u^2



Área total = 25 u^2
Región sombreada = 10 u^2
Región no sombreada = 15 u^2

¿Qué tanto por ciento del total está sombreado?

$$\frac{10}{25} \times 100\% = 40\%$$

¿Qué tanto por ciento representa la región sombreada respecto de la no sombreada?

$$\frac{10}{15} \times 100\% = 66,\hat{6}\%$$

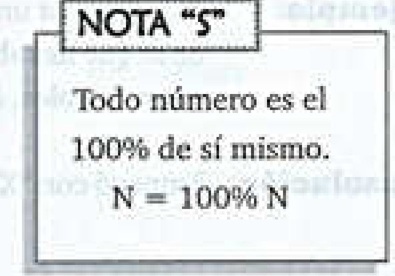
Ejercicio:

- ¿60 es el 20% más de que número?

$$60 = 120\% \times N$$

- ¿El 25% menos de que número es 18?

$$75\%\, N = 18$$
$$N = 24$$


NOTA "S"

Todo número es el 100% de sí mismo.

$N = 100\%\, N$

- ¿Qué tanto por ciento más es 140 respecto de 120?

140 es 20 más respecto de 120

$$\frac{20}{120} \times 100\% = 16,\hat{6}\%$$

- ¿Qué tanto por ciento más que 40 es 45?

  45 es 5 más que 40

  $$\frac{5}{40}\times 100\% = 12,5\%$$

- ¿Qué tanto por ciento menos es 15 respecto de 20?

  15 es 5 menos respecto de 20

  $$\frac{5}{20}\times 100\% = 25\%$$

- ¿Qué tanto por ciento menos que 12 es 3?

  3 es 9 menos que 12

  $$\frac{9}{12}\times 100\% = 75\%$$

OBSERVACIÓN

Si pierdo, gasto o saco	Me queda
15%	85%
60%	40%
72%	28%
x%	(100 – x)%

Si aumento gano o agrego	Resulta
10%	110%
45%	145%
120%	220%
x%	(100 + x)%

Ejemplo: Alex entra a un casino y decide jugar a las cartas. En el primer juego pierde el 20% de lo que llevaba; en el segundo juego pierde el 60% de lo que le quedaba. Si al final tiene 64 soles, ¿con cuánto empezó a jugar?

Resolución: Empezó con "X" soles

$$X \xrightarrow{-20\%} \underset{\text{Queda}}{80\%X} \xrightarrow{-60\%} \underset{\text{Le queda al final}}{40\%(80\%X)}$$

Donde: $40\%(80\%X) = 64$

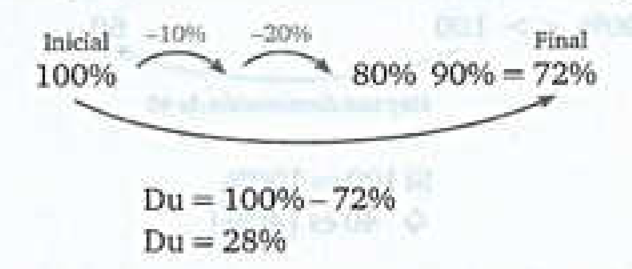
$$\frac{40}{100}\times\frac{80}{100}X = 64$$

$$\therefore \quad X = 200$$

APLICACIONES DEL TANTO POR CIENTO

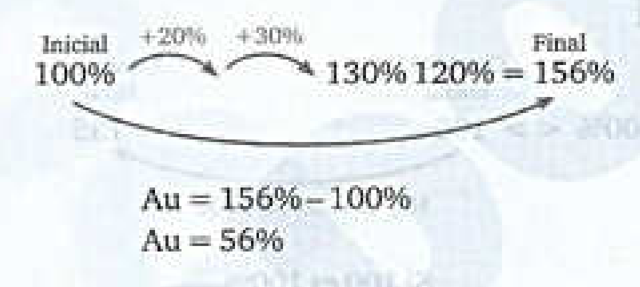
DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

- ¿A qué descuento único equivalen 2 descuentos sucesivos de 10% y 20%?



$$Du = 100\% - 72\%$$
$$Du = 28\%$$

- ¿A qué aumento único equivalen 2 aumentos sucesivos del 20% y 30%?



$$Au = 156\% - 100\%$$
$$Au = 56\%$$

OBSERVACIÓN

- Para 2 descuentos sucesivos de a% y b%

$$Du = \left(a + b - \frac{a \times b}{100}\right)\%$$

Ejemplo: Para 2 descuentos sucesivos de 10% y 20%

$$Du = \left(10 + 20 - \frac{10 \times 20}{100}\right)\% = 28\%$$

- Para 2 aumentos sucesivos de a% y b%

$$Au = \left(a + b + \frac{a \times b}{100}\right)\%$$

Ejemplo: Para 2 aumentos sucesivos de 20% y 30%

$$Au = \left(20 + 30 + \frac{20 \times 30}{100}\right)\% = 56\%$$

Ejemplo: Un mismo articulo es vendido en 2 tiendas; en la primera ofrecen un descuento del 20% más 20% y en la segunda un descuento del 10% más 30%. ¿Cuál de las dos tiendas vende más barato?

Resolución:

TIENDA (1)

Dsctos. 20% más 20%

$$Du = \left(20 + 20 - \frac{20 \times 20}{100}\right)\%$$

$$Du = 36\%$$

TIENDA (2)

Dsctos. 10% más 30%

$$Du = \left(10 + 30 - \frac{10 \times 30}{100}\right)\%$$

$$Du = 37\%$$

$\therefore$ La segunda vende más barato

VARIACIÓN PORCENTUAL

Toda cantidad antes de sufrir una variación representa un 100%

- 100% <> 100 (Cantidad Inicial) → 60 (Cantidad Final)

  Hay una disminución de 40

  Si 100 es 100%
  ⇨ 40 es **40%**

  ∴ La disminución es 40%

NOTA "S"

En general la variación porcentual se calcula:

$$\frac{\text{aumento o disminución}}{\text{cantidad inicial}}\times 100\%$$

- 100% <> 100 (Cantidad Inicial) → 135 (Cantidad Final)

  Hay un aumento de 35

  Si 100 es 100%
  ⇨ 35 es **35%**

  ∴ El aumento es 35%

- 100% <> 12 (Cantidad Inicial) → 9 (Cantidad Final)

  Hay una disminución de 3

  Si 12 es 100%
  ⇨ 3 es **25%**

  ∴ La disminución es 25%

OBSERVACIÓN

- Cantidad Inicial 12 → Cantidad Final 9

  Hay una disminución de 3

  $$\frac{3}{12}\times 100\% = 25\%$$

- Cantidad Inicial 150 → Cantidad Final 200

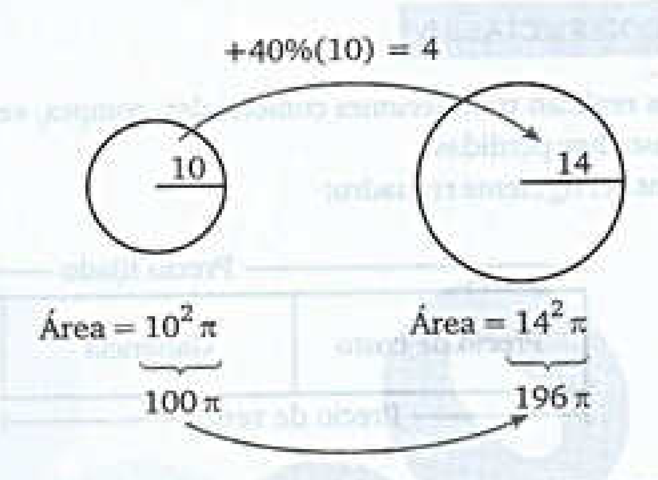
  Hay una disminución de 50

  $$\frac{50}{150}\times 100\% = 33,\hat{3}\%$$

Ejemplo: Si el radio de un círculo aumenta en 40%, ¿en qué tanto por ciento aumenta su área?

Resolución: Asumimos que el radio del círculo es 10.

> **NOTA "S"**
>
> En variaciones porcentuales con figuras geométricas las constantes no se consideran.
> Ejm:
> $\frac{b\times h}{\not{2}}$; $\not{\pi}\, r^2$; $\not{\frac{4\pi}{3}}R^3$



Hay un aumento de 96π

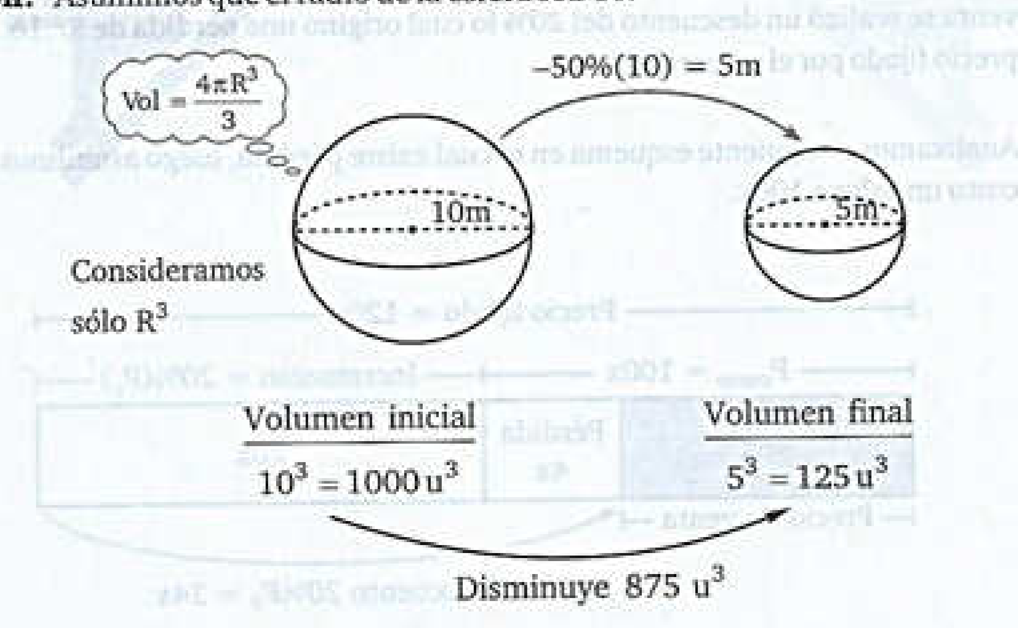
↓

$$\frac{96\pi}{100\pi}\times 100\% = 96\%$$

Observe que la constante "π" se elimina en la operación. Si por error involuntario no se hubiera colocado la constante "π" al calcular el área, esto no afectaría la respuesta.

Ejemplo: Si el radio de una esfera disminuye en 50%, ¿en qué porcentaje disminuye su volumen?

Resolución: Asumimos que el radio de la esfera sea 10.

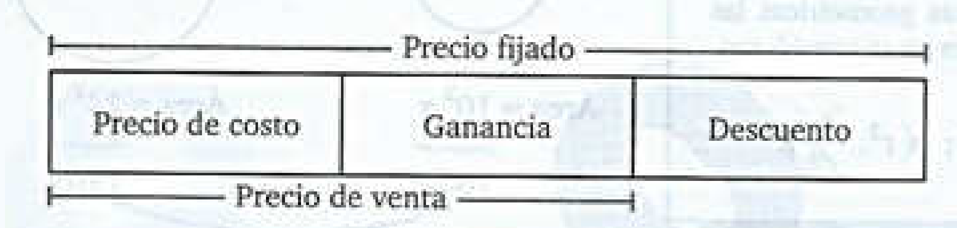


$$\text{Variación Porcentual} = \frac{875}{1000} \times 100\% = 8{,}75\%$$

$\therefore$ Su volumen disminuye en 8,75%

APLICACIONES COMERCIALES

Cada día las personas realizan transacciones comerciales, compra, venta, con el fin de obtener ganancia, aunque en algunos casos hay pérdidas.
Hay que tener en cuenta el siguiente recuadro:



* Se debe considerar en estos casos que el descuento o la rebaja es un tanto por ciento del precio fijado.
* Tanto la ganancia, como la pérdida son expresiones que se obtienen a partir del costo.

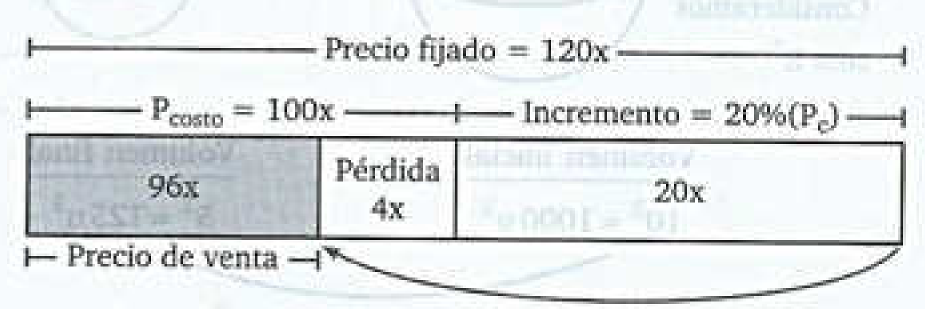
Del cuadro anterior se puede deducir que:

* $P_V = P_c + G$
* $P_F = P_V + D$
* Incremento = G + D

Donde: P_V : Precio de venta
P_c : Precio costo
P_F : Precio fijado
G : Ganancia
D : Descuento

Ejemplo: Para fijar el precio de un artículo se incrementó su costo en 20%, pero al momento de la venta se realizó un descuento del 20% lo cual originó una pérdida de S/.16. ¿Cuál fue el precio fijado por el comerciante?

Resolución Analizamos el siguiente esquema en el cual existe pérdida, luego asumimos al precio de costo un valor a 100x.



$$\text{Pérdida} = P_{costo} - P_{venta}$$
$$16 = 4x$$
$$4 = x$$

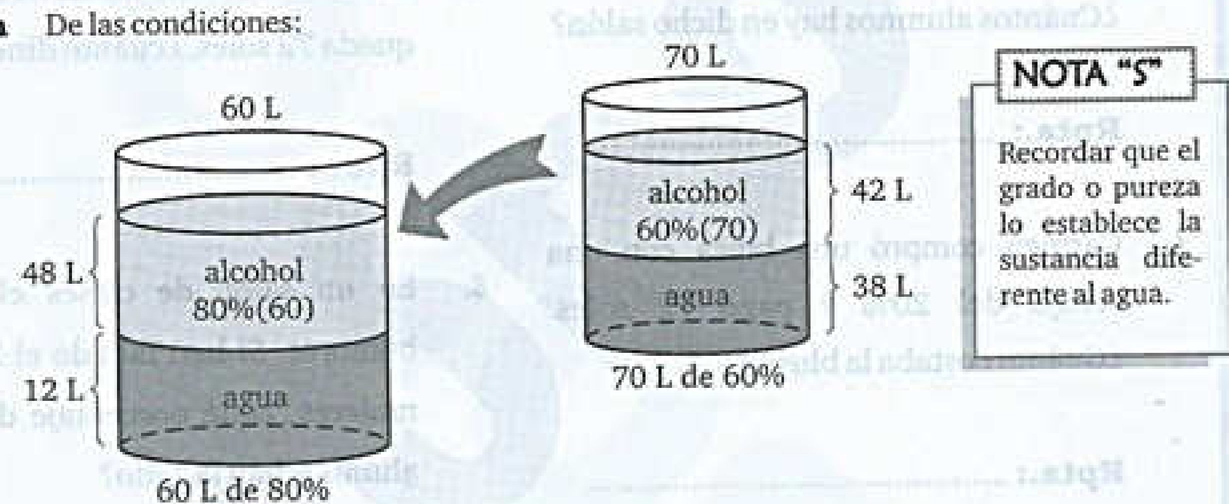
$$\text{Precio fijado} = 120x$$

$\therefore$ Precio fijado es S/.480

PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS

Un recipiente contiene 60 litros de alcohol al 80% se vierte en él 70 litros de alcohol de 60°. Si de la mezcla se extrae el 10%, ¿cuánto alcohol queda al final?

Resolución De las condiciones:



Luego de la mezcla resultante:

$\therefore$ Queda de alcohol = 90%(90) = 81 litros

CÁLCULO DEL GRADO O CONCENTRACIÓN DE UNA MEZCLA

$$\frac{\text{Cantidad de alcohol, vino, ácido, etc.}}{\text{Cantidad total}} \times 100\%$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. El 40% del 80% de un número es igual al 20% del 75% de 1600. Hallar dicho número.

Rpta.: ....

2. En un salón de clases el 60% son hombres y el resto son 20 mujeres. ¿Cuántos alumnos hay en dicho salón?

Rpta.: ....

3. Carmen compró una blusa con una rebaja del 20% y pagó 72 soles. ¿Cuánto costaba la blusa?

Rpta.: ....

4. Si el lado de un cuadrado aumenta en 20%. ¿En qué porcentaje aumenta su área?

Rpta.: ....

5. Un comerciante vende un televisor en S/. 900 ganando el 20% del costo. ¿Cuál es el costo del televisor?

Rpta.: ....

6. Calcule

¿A qué aumento único equivale 2 aumentos sucesivos de 10% y 40%?

¿A que descuento único equivale 2 descuentos sucesivos de 20% y 30%?

Rpta.: ....

7. Gasté el 40% de mi dinero y aún me queda 72 soles, ¿cuánto dinero tenía?

Rpta.: ....

8. En un salón de clases el 60% son hombres. Si han faltado el 20% de las mujeres, ¿qué porcentaje del total de alumnos han faltado?

Rpta.: ....

9. Si el lado de un cuadrado disminuye en 20%, ¿en qué porcentaje varía su área?

Rpta.: ....

10. Se tienen 80 litros de alcohol de 75% de pureza. ¿Cuántos litros de alcohol puro contiene la mezcla?

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 En una granja, de las aves que hay, el 20% son pollos, el 50% son patos y el resto son pavos. Si se vende el 40% de los pollos, el 60% de los patos y el 80% de los pavos; ¿qué tanto por ciento de las aves aún quedan?

Resolución:

NOTA "S"

Cuando un problema no menciona el total, es recomendable asumir el valor de 100x

Se vende: $40\%(20x) + 60\%(50x) + 80\%(30x) = 62x$

Queda: $100x - 62x = 38x$

De 100x aves quedan 38x

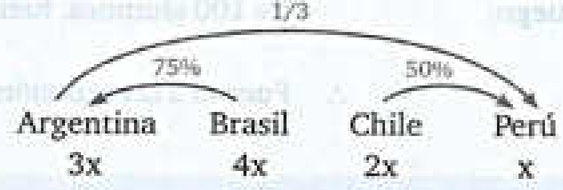
$\therefore$ Queda el 38%

PROBLEMA 2 En un campamento participan, en total, 240 niños de Argentina, Brasil, Chile y Perú. El número de niños del Perú es el 50% del número de niños de Chile y 1/3 del de Argentina. El número de niños de Argentina es el 75% del número de niños de Brasil. ¿Cuántos niños de Perú hay en el campamento?

Resolución: TOTAL: 240 NIÑOS

De acuerdo a como depende el número de niños de un país respecto a otro, lo conveniente es empezar en Brasil.

Como Argentina es $75\% = \dfrac{3}{4}$ de Brasil, en Brasil pondremos "4x", y de ahí calcularemos para los oros países.



Total de niños: $3x + 4x + 2x + x = 240 \rightarrow x = 24$

$\therefore$ De Perú son 24 niños

PROBLEMA 3 En un salón de clase de 40 alumnos, el 60% son mujeres. ¿Cuántas mujeres deben retirarse para que los hombres representen el 80% del nuevo total?

Resolución:

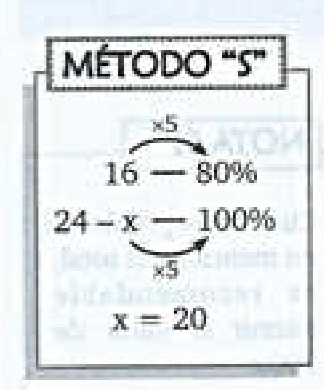
TOTAL DE ALUMNOS
40

MUJERES: $60\%(40) = 24$ → $-x$ → $24 - x$

HOMBRES: 16 → 16

Sea "x" el número de mujeres que retiran.

NUEVO TOTAL: $40 - x$

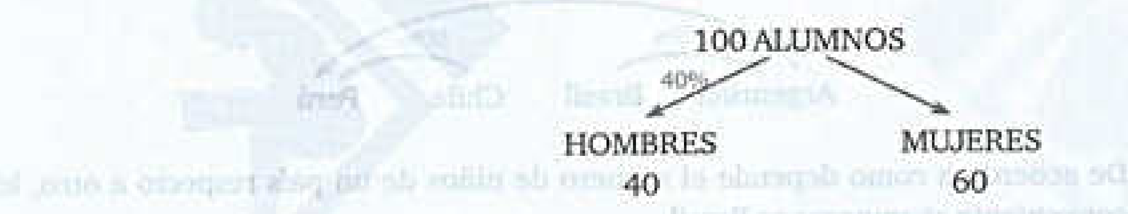


$$16 = 80\%(40 - x)$$
$$x = 20$$

∴ Deben retirarse 20 mujeres

PROBLEMA 4 En un colegio el 40% de los alumnos son hombres. A una excursión han ido el 20% de los hombres y el 30% de las mujeres. ¿Qué porcentaje del total de alumnos fueron a la excursión?

Resolución: Vamos a asumir que el total de alumnos es 100



Fueron a la excursión:

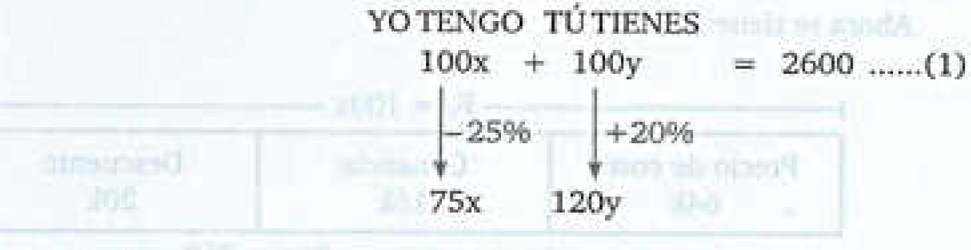
$$20\%(40) + 30\%(60) = 26$$

Luego: De 100 alumnos, fueron a la excursión 26

∴ Fueron a la excursión el 26%

PROBLEMA 5 Si yo tuviera 25% menos de lo que tengo y tú tuvieras 20% más de lo que tienes, entonces tendríamos igual cantidad de dinero. Si entre los dos tenemos S/.2600, ¿cuánto más que tú tengo yo?

Resolución:



Por dato:

$$75x = 120y$$
$$5x = 8y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{8}{5} \left.\right\} \begin{matrix} x = 8k \\ y = 5k \end{matrix}$$

En (1):

$$100(8k) + 100(5k) = 2600$$
$$k = 2$$

$$x = 16\ ;\ y = 10$$

Luego:

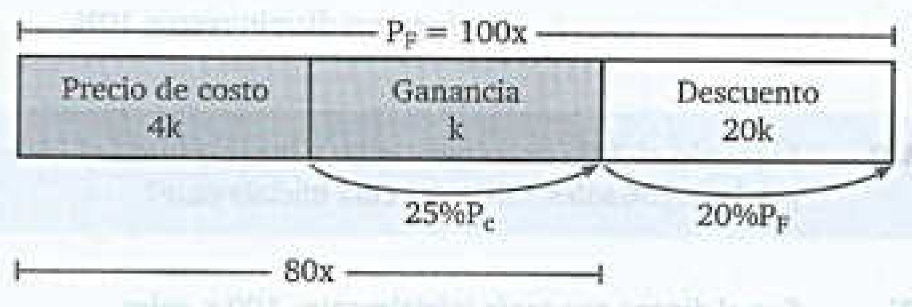
Yo tengo: 100(16) = S/.1600
Tú tienes: 100(10) = S/.1000

∴ Más que tú, tengo S/.600

PROBLEMA 6 Un artículo se vende con una ganancia del 25% luego de haberle hecho un descuento del 20%. Si no se hubiera rebajado la ganancia hubiera sido de S/.360 ¿Cuánto es el precio de venta?

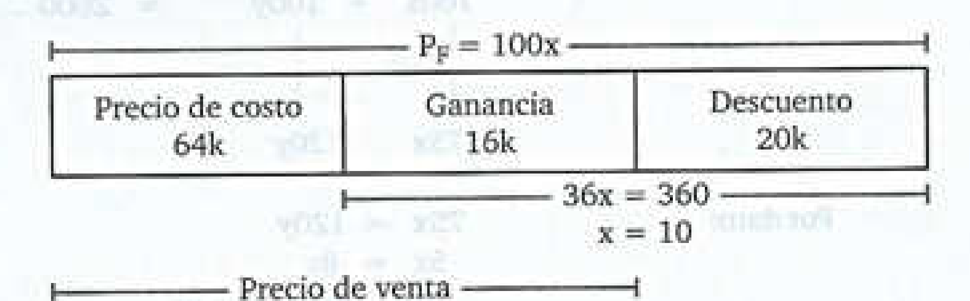
Resolución: Ubiquemos los datos en el siguiente cuadro:

Vamos a asumir 100x como precio fijado y 4k al precio de costo.



$$5k = 80k$$
$$k = 16x$$

Ahora se tiene:



Nos piden: Precio de venta = 80x

$\therefore$ Precio de venta es S/.800

PROBLEMA 7 En una tienda comercial el número de artículos que se venden aumentó en un 20% pues el precio de venta de cada uno disminuyó en 25%. ¿En qué porcentaje variaron los ingresos de la tienda?

Resolución: Para resolver este problema debemos tener en cuenta la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix}\text{N° de artículos}\\ \text{que se venden}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Precio de venta}\\ \text{de c/u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Ingresos de}\\ \text{la tienda}\end{pmatrix}$$

Ahora recuerda que toda cantidad antes de sufrir una variación representa un 100%

$$\begin{pmatrix}\text{N° de artículos}\\ \text{que se venden}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Precio de venta}\\ \text{de c/u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Ingresos de}\\ \text{la tienda}\end{pmatrix}$$

100% 100% 100%

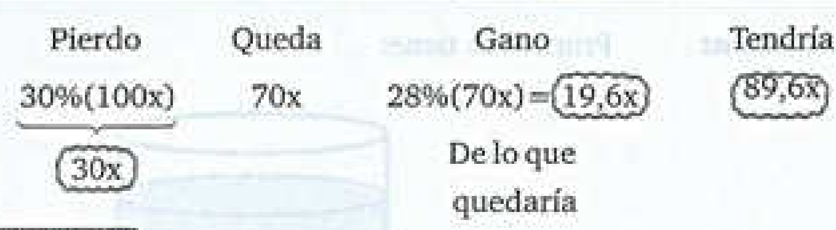
120% –25%

$$120\% \times 75\% = 90\%$$

$\therefore$ Los ingresos disminuyeron 10%

PROBLEMA 8 Si pierdo el 30% de lo que tengo y luego ganara el 28% de lo que me quedaría, perdería 156 soles. ¿Cuánto tenía inicialmente?

Resolución: Sea el dinero que tenía inicialmente: 100 x soles



NOTA "S"

También podemos trabajar de manera directa con los porcentajes.
128%(70%(100x)) = 89,6x

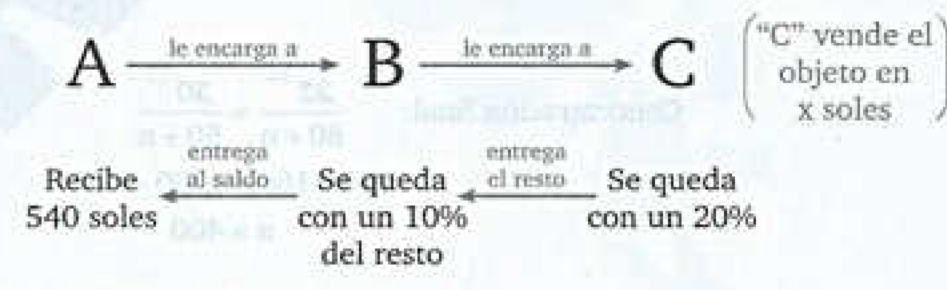
Entonces, perdería: $100x - 89{,}6x = 156$

$$x = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ Tenía inicialmente $100\left(\frac{3}{2}\right) = 1500$

PROBLEMA 9 Ángel le encarga vender un objeto a Bruno, éste a su vez se lo encarga a César, quién hace la venta y se queda con un 20% del valor de venta, Bruno recibe el resto pero se queda con un 10% de dicho resto y entrega el saldo de 540 soles a Ángel. ¿En cuánto se vendió el objeto?

Resolución:



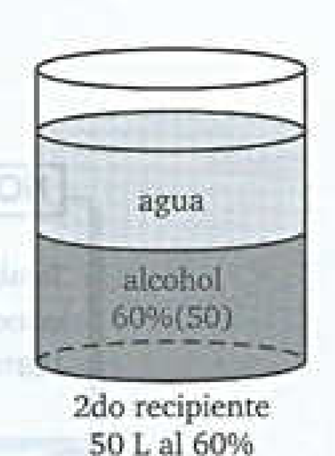
Lo que A recibe es: $90\% \times 80\%(x) = 540$

$$x = 750$$

$\therefore$ El objeto se vendió en S/ 750

PROBLEMA 10 Se tiene 2 recipientes, uno contiene 80 litros de una mezcla alcohólica al 40% de pureza y otro 50 litros de una mezcla alcohólica al 60% de concentración. ¿Cuántos litros de agua se debe vertir a ambos recipientes (la misma cantidad a cada uno de ellos) para que tengan la misma concentración de alcohol? Dé como respuesta dicha concentración.

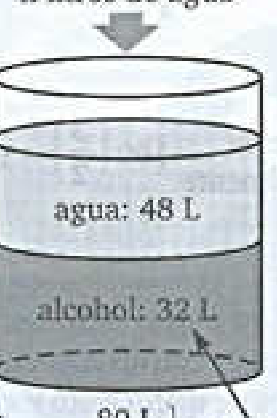
Resolución: Primero se tiene:

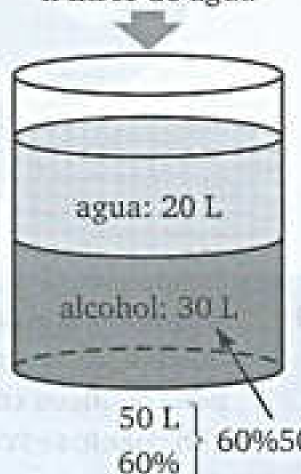


1er recipiente
80 L al 40%

2do recipiente
50 L al 60%

Luego: Se agrega n litros de agua — Se agrega n litros de agua





Capacidad: 80 L, Concentración: 40% } 40%80 — 50 L, 60% } 60%50

Concentración final: $\frac{\cancel{32}^{16}}{80+n}=\frac{\cancel{30}^{15}}{50+n}$

$$800+16n=1200+15n$$
$$n=400$$

$$\text{Concentración}=\left(\frac{32}{80+400}\right)\times 100\%$$

$$\therefore\ \text{Concentración}:\frac{20}{3}\%$$

PROBLEMA 11 En una reunión hay 16 hombres y 24 mujeres. ¿Cuántas mujeres deben retirarse, para que el porcentaje de hombres aumente 24%?

Resolución:

HOMBRES	MUJERES
16	24

En este momento los hombres representan:

$$\frac{16}{16+24} \times 100\% = 40\%$$

HOMBRES		MUJERES	
40% < > 16		24 < > 60%	
+ 24% ↓		↓ −x	⇦ se retiran x mujeres
64% < > 16		24 − x < > 36%	

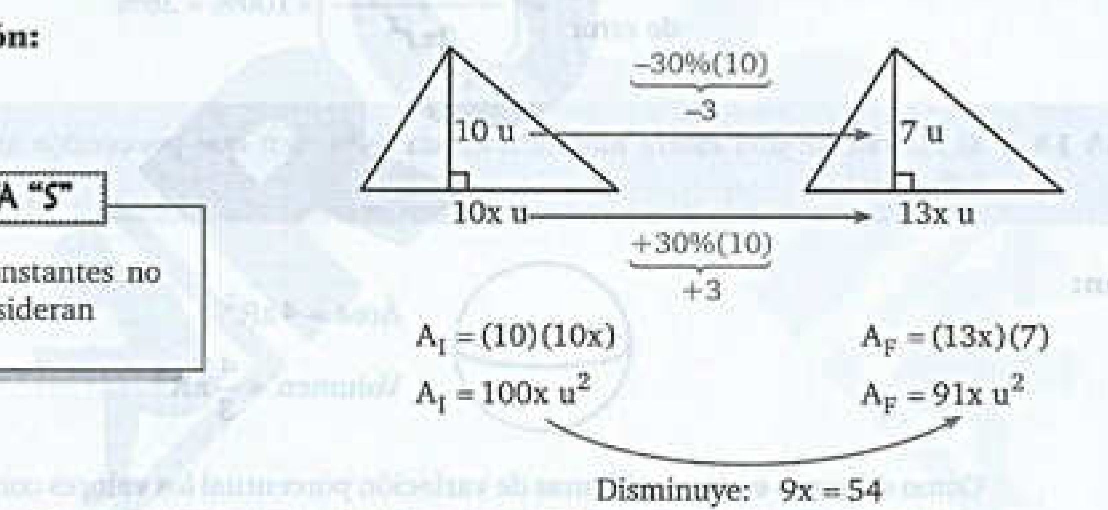
Si los hombres son ahora 64%, entonces las mujeres deben ser 36%, ya que el total siempre es 100%.

Luego: $\frac{24-x}{36\%} = \frac{16}{60\%} \rightarrow x = 15$

$\therefore$ Las mujeres que deben retirarse son 15

PROBLEMA 12 La base de un triángulo aumenta en 30% y la altura, relativa a dicha base, disminuye en 30%. Si el área del triángulo disminuye en $54m^2$, halle el área inicial del triángulo.

Resolución:



$A_I = (10)(10x)$ $A_F = (13x)(7)$

$A_I = 100x\ u^2$ $A_F = 91x\ u^2$

Disminuye: $9x = 54$

$x = 6$

Reemplazando: $100(6) = 600$

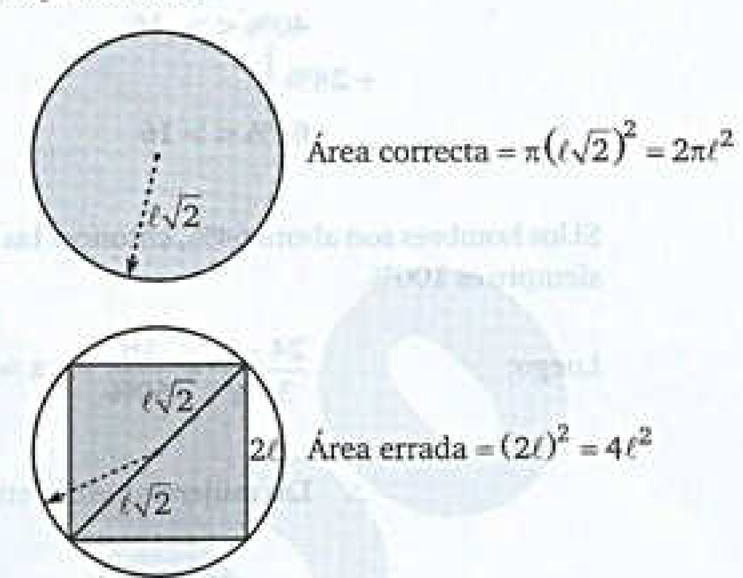
$\therefore$ El área inicial es $600\ u^2$

PROBLEMA 13 Determine el porcentaje de error que se comete si para el cálculo del área de un círculo se considera solo el área del cuadrado inscrito. Respuesta en porcentaje.

Resolución: Recuerde que:

$$\text{Porcentaje de error} = \left(\frac{\text{Valor errado} - \text{Valor correcto}}{\text{Valor correcto}} \right) \times 100\%$$

Nos piden el porcentaje de error.

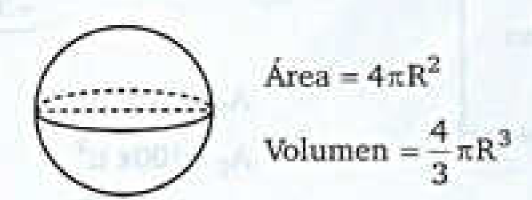


Calculamos el porcentaje de error:

$$\text{Porcentaje de error} = \left(\frac{4\ell^2 - 2\pi\ell^2}{2\pi\ell^2} \right) \times 100\% = 36\%$$

PROBLEMA 14 Si el área de una esfera aumenta en un 44%, ¿en qué porcentaje aumenta su volumen?

Resolución:



Como sabemos en los problemas de variación porcentual los valores constantes en el área y el volumen pueden ser dejados de lado. Por lo tanto trabajaremos con las siguientes expresiones:

$$\text{Área} = R^2 \qquad \text{Volumen} = R^3$$

Radio:	10	$\sqrt{144} = 12$
Área:	$10^2 = 100$ $\xrightarrow{+44\%}$	144
Volumen:	$10^3 = 1000$ $\longrightarrow$	$12^3 = 1728$

Aumenta 728

$$\frac{728}{1000} \times 100\% = 72{,}8\%$$

PROBLEMA 15 ¿A qué variación porcentual equivalen 2 descuentos sucesivos de 20% y 50% seguidos de dos aumentos sucesivos de 50% y 20%?

Resolución:

INICIO: 100%

-20%
-50%
$+50\%$
$+20\%$

FINAL: $80\% \times 50\% \times 150\% \times 120\%$

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 120\% = 72\%$$

$\therefore$ La variación es de $100\% - 72\% = 28\%$

PROBLEMA 16 Un fabricante de chompas calcula que el costo por cada chompa que fabrica es de S/.26. Si recibe de los distribuidores S/.25 por chompa vendida y adicionalmente un 8% más por cada chompa vendida después de 8000 unidades. ¿Cuál es la mínima cantidad de chompas que debe vender para obtener ganancias?

Resolución: De los datos tenemos:

(Precio de cada chompa que fabrica) = S/.26

(Precio de venta por cada chompa hasta vender 8000 unidades) = S/.25

(Precio de venta por cada chompa después de vender 8000 unidades) = S/.25 + 8%(S/.25)

= S/.27

Sea x la cantidad de chompas que se debe vender como mínimo para obtener ganancias, donde x debe ser mayor a S/.8000, ya que si es menor a S/.8000 se obtendría pérdida.

Se tiene lo siguiente: (costo total) = 26x
(venta total) = 25(8000) + 27(x − 8000)

Como debe obtener ganancia, se debe cumplir:
(venta total) > (costo total)

Reemplazamos: $25(8000) + 27(x - 8000) > 26x$

$$25(8000) + 27x - 27(8000) > 26x$$

$$x > 2 \times (8000)$$

$$\rightarrow x > 1600$$

$\therefore$ Como mínimo debe vender 16001 chompas.

PROBLEMA 17 Un vendedor ambulante vendió una bolsa de chocolates de la siguiente manera: el 60% con una ganancia del 24% de su costo y el resto con una pérdida del 10% de su costo. Si en la venta de toda la bolsa ganó 30 soles, ¿cuántos chocolates tenía la bolsa?

Resolución: Vamos a sumir 100 chocolates a un costo total de 100 soles.

100 chocolates
Costo: S/.100

60 chocolates Costo: S/.60	40 chocolates Costo: S/.40

Al vender gana 40%(60) → S/ 24 − Al vender pierde 10%(40) → S/ 4 = S/ 20 (ganancia total)

Ahora para calcular el número de chocolates aplicaremos una regla de tres.

CHOCOLATES	GANANCIA
100	20
x	30

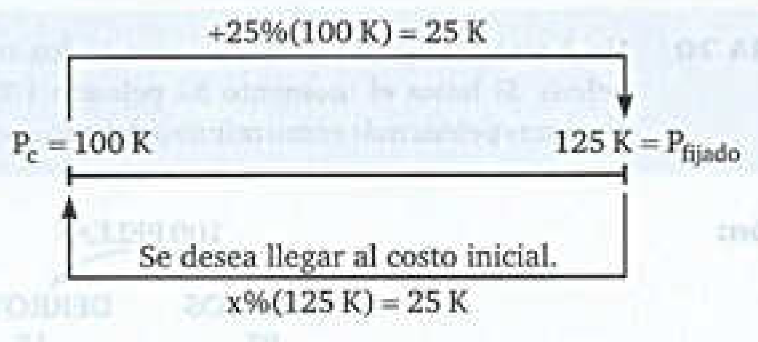
$$\Rightarrow 20x = 100 \times 30$$

$$x = 150$$

$\therefore$ La bolsa tenía 150 chocolates.

PROBLEMA 18 Se fija el precio de venta de un artículo aumentando el precio de costo en un 25% del mismo. Luego, por razones comerciales, se debe volver al valor original. ¿Qué tanto por ciento del precio fijado se debe disminuir para obtener el precio de costo inicial?

Resolución: Asumimos como: Precio de costo (P_C) = 100 K.



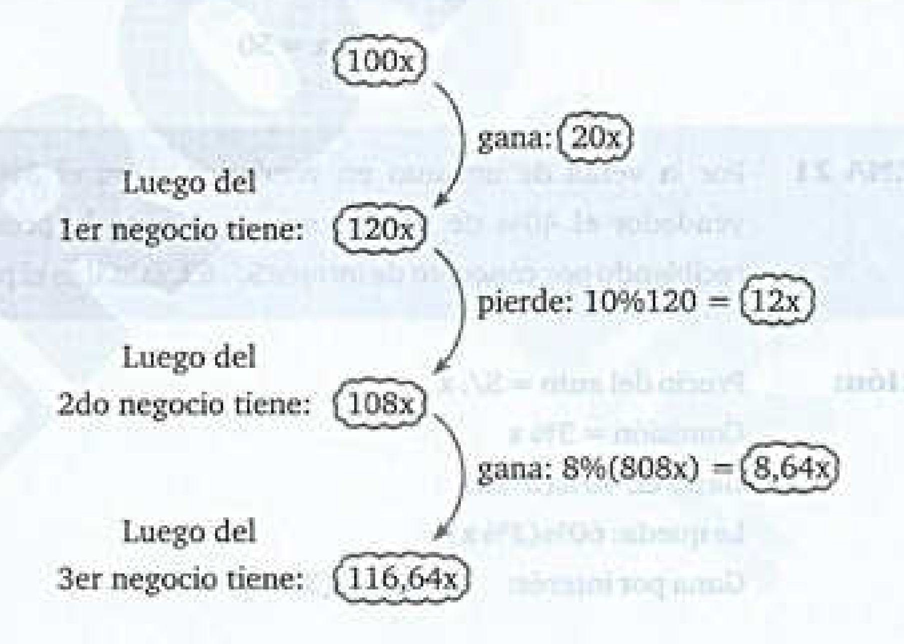
$$x\% = \frac{25K}{125\,K} = \frac{1}{5} \times 100\%$$

$$x\% = 20\%$$

∴ Se debe disminuir un 20% del precio fijado.

PROBLEMA 19 Ronald decidió invertir cierta cantidad de dinero en un negocio ganando el 20%. Debido a ello se animó a invertir en otro negocio en el cual perdió el 10% y por último, invirtió lo que le quedaba en otro negocio con un resultado del 8% como ganancia. La ganancia neta en los 3 negocios ha sido de S/.4160. ¿Cuál fue la ganancia obtenida en el primer negocio?

Resolución: Sea:



Luego de estas inversiones la ganancia neta es 4160 entonces igualamos:

$$20x - 12x + 8{,}64x = 4160$$

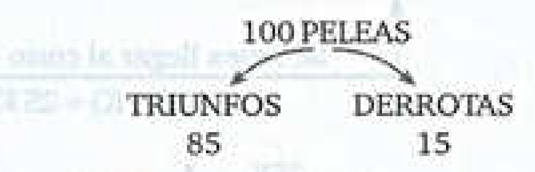
$$x = 250$$

Piden: $20(250) = 5000$

∴ La ganancia obtenida en el 1er negocio es S/.5000

PROBLEMA 20 Un boxeador decide retirarse cuando los triunfos representen el 90% de sus peleas. Si hasta el momento ha peleado 100 veces y ha obtenido 85 victorias, ¿cuántas peleas más como mínimo debe realizar para poder retirarse?

Resolución:



Digamos que realiza "x" peleas más, las cuales algunas las puede ganar y otras las puede perder, pero para que este número de peleas (x) sea mínimo todas las debe ganar.

100 + x PELEAS

TRIUNFOS	DERROTAS
85 + x	15

"Para retirarse sus triunfos deben representar el 90% de sus peleas"

$$85 + x = 90\%(100 + x)$$

$$85 + x = \frac{9}{10}(100 + x)$$

$$850 + 10x = 900 + 9x$$

$$\therefore \quad x = 50$$

PROBLEMA 21 Por la venta de un auto un vendedor cobra el 3% de comisión, gasta dicho vendedor el 40% de su ganancia y el resto lo presta con un interés del 5%, recibiendo por concepto de interés S/. 63. ¿Cuál es el precio del auto?

Resolución: Precio del auto = S/. x

Comisión = 3% x

Gasta el: 40%(3% x)

Le queda: 60%(3% x)

Gana por interés: $5\%(60\%(3\%\, x)) = 63$

$$\therefore \quad x = 70000$$

PROBLEMA 22 Un empleado distribuye su sueldo mensual de la siguiente manera: 40% en alimentos; una cantidad igual al 50% del gasto anterior, en movilidad; otra cantidad igual al 60% del gasto anterior, en ropa; y una cantidad igual al 75% del gasto anterior, en diversiones. Si el resto, que es S/.475, lo ahorra, ¿cuánto ahorraría en un mes si no se compra ropa y se abstiene de diversiones?

Resolución:

Sea el sueldo del trabajador : 100x
En alimentos 40%(100x) : 40x
En movilidad 50%(40x) : 20x
En ropa 60%(20x) : 12x
En diversiones 75%(12x) : 9x
Resto : 9x

Dato: $19x = 475$
$x = 25$

El ahorro sería: $\underbrace{12x}_{\text{en ropa}} + \underbrace{9x}_{\text{en divers.}} + \underbrace{19x}_{\text{resto}} = 40x$

Reemplazando: $40(25) = S/.1000$

PROBLEMA 23 Un comerciante vende dos vestidos a S/. 90 cada uno; en uno gana 25% y en el otro pierde 25%. ¿Cuánto ganó o perdió?

Resolución:

NOTA "S"

$P_{Costo} + \text{Ganancia} = P_{Venta}$

$P_{Costo} - \text{Perdida} = P_{Venta}$

P_{C_1} = Precio de costo 1	P_{C_2} = Precio de costo 2
$P_{V_1} = S/.90$	$P_{V_2} = S/.90$
Gana = 25%	Pierde = 25%
$P_{V_1} = 125\% P_{C_1}$	$P_{V_2} = 75\% P_{C_2}$
$90 = \frac{125}{100} \times P_{C_1}$	$90 = \frac{75}{100} \times P_{C_2}$
$P_{C_1} = 72$	$P_{C_2} = 120$

Luego: $P_{V\,(Total)} = S/.90 + S/.90 = S/.180$

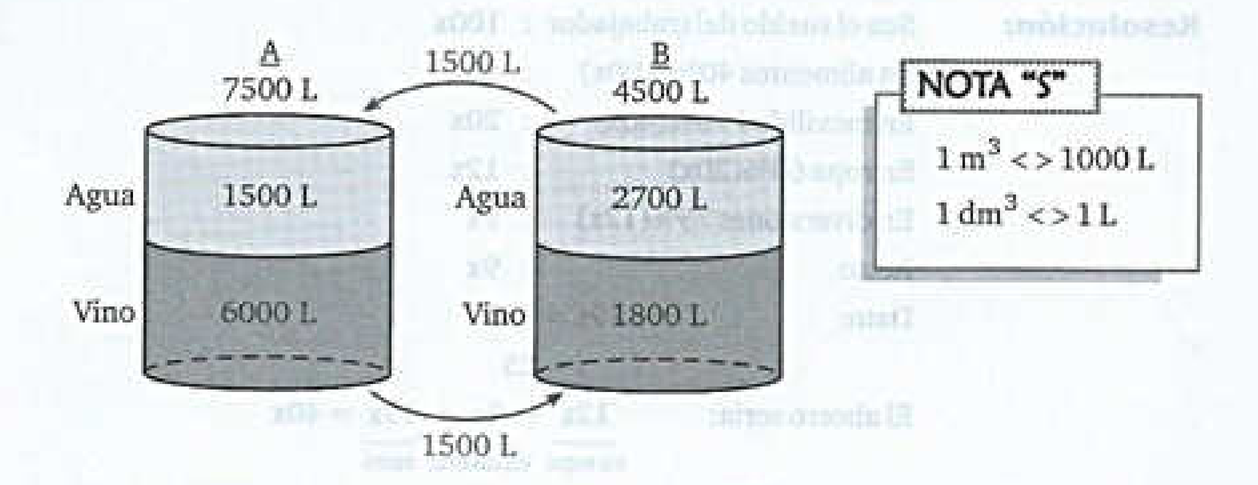
$P_{C\,(Total)} = S/.72 + S/.120 = S/.192$

$S/.192 - S/.180 = S/.12$

$\therefore$ Se perdió S/. 12

PROBLEMA 24 Se tienen los recipientes A y B de capacidades 7500 L y 4,5 m^3, respectivamente. El recipiente A contiene vino hasta el 80% de su capacidad y el recipiente B contiene agua hasta el 60% de su capacidad. Si se intercambian 1 500 dm^3 de un recipiente a otro a la vez, ¿cuál es el porcentaje de vino que hay en el contenido del recipiente B?

Resolución:



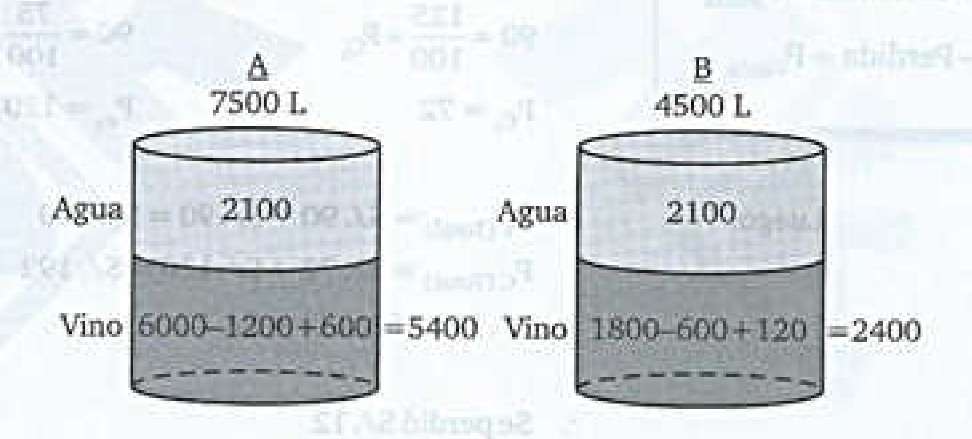
Se extrae de vino del recipiente A:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{1500}}}{\underset{5}{\cancel{7500}}}(6000) = 1200$$

Se extrae de vino del recipiente B:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{1500}}}{\underset{3}{\cancel{4500}}}(1800) = 600$$

Después del intercambio queda:



Piden: $\frac{\overset{8}{\cancel{2400}}}{\underset{15}{\cancel{4500}}}(100\%) = 53\frac{1}{3}\%$

$\therefore$ El porcentaje de vino del recipiente B es $53\frac{1}{3}\%$

PROBLEMA 25 Un librero vende 420 ejemplares de una obra del siguiente modo: un tercio con una rebaja del 10% del precio de lista; un segundo tercio con una rebaja del 12% del precio de lista; y el resto con el 15% de rebaja del precio de lista. Por su parte, el librero había obtenido del editor un precio menor al precio de lista en un 25%, y ha gastado S/.170 en el transporte de todo el lote. Si su ganancia fue de S/.1426 en este negocio, calcule el precio de lista.

Resolución: Sea el precio de lista: 100K

Número de ejemplares: 420

Rebaja de 10%

1ra venta: $140(90k)$

Rebaja de 10%

2da venta: $140(88k)$

Rebaja de 10%

3ra venta: $140(85k)$

Recaudación: $140(263k)$

Costo: $75\%(100k)(420) = 420(75k)$

Precio menor al precio de lista en un 25%

Gasto en el transporte del lote: 170

Ganancia: S/.1426

Entonces: $\underbrace{1426}_{\text{ganancia}} + \underbrace{170}_{\text{gastos}} = \underbrace{140(263k)}_{\text{recaudación}} - \underbrace{420(75k)}_{\text{costo}}$

$$1596 = 140(263k) - 420(75k)$$

$$k = \frac{3}{10}$$

Piden: $100\left(\frac{3}{10}\right) = 30$

∴ El precio de lista es S/.30

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El 80% de (2a – b) es igual al 60% de (a + b). ¿Qué tanto por ciento más es a respecto de b?

A) 10% B) 20% C) 30%
D) 40% E) 50%

2. ¿A qué es igual el 4 por 5 del 7 por 8 del 3 por 7 del 10% de 500?

A) 8 B) 20 C) 12
D) 15 E) 10

3. Ángel se propuso leer una novela en 3 días, leyendo cada día la misma cantidad de páginas. Sin embargo, el primer día sólo leyó el 60% de lo que debió leer, el segundo día sólo leyó el 80% de lo que debió leer. ¿Qué tanto por ciento de lo que debió leer leyó el tercer día, si en total ha leído el 65% del libro?

A) 50% B) 60% C) 75%
D) 55% E) 70%

4. Paola paga los impuestos sobre sus ingresos anuales de la siguiente manera: por los primeros S/.28000 de sus ingresos anuales paga el p% y por el resto paga el (p + 2)%. Si en impuestos pagó en total el (p + 0,25)% del total de sus ingresos anuales. ¿Cuáles fueron sus ingresos anuales?

A) S/.56000 B) S/.36000
C) S/.42000
D) S/.32000 E) S/.54000

5. Un jugador de fútbol está practicando disparos al arco y hasta el momento su eficiencia es del 80%. Si a continuación realiza 10 disparos al arco y los acierta todos su eficiencia se incrementa a 90%. ¿Cuántos disparos ha realizado en total?

A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 35

6. Si el lado de un cuadrado aumenta 10% entonces el área queda aumentado en 42 m^2, calcule en cuanto aumentará su área, si el lado inicial aumenta en 20%.

A) 80 m^2 B) 88 m^2 C) 90 m^2
D) 92 m^2 E) 84 m^2

7. En la farmacia compro remedios y perfumes. Por los remedios hacen el 60% de descuento. Por los perfumes hacen el 20% de descuento. Con el descuento pago, en total. S/.52,60. Sin el descuento debería pagar, en total, S/.105. ¿Cuál es el precio de los remedios sin descuento?

A) S/.26,50 B) S/.32,50
C) S/.53,50
D) S/.67,50 E) S/.78,50

8. Se tiene 2 trozos de alambre de igual longitud. Con uno de ellos se construye un triángulo equilátero y con el otro un hexágono regular. ¿Qué tanto por ciento más es el área de la región hexagonal respecto al área de la región triangular?

A) 25% B) 40% C) 50%
D) 100% E) 75%

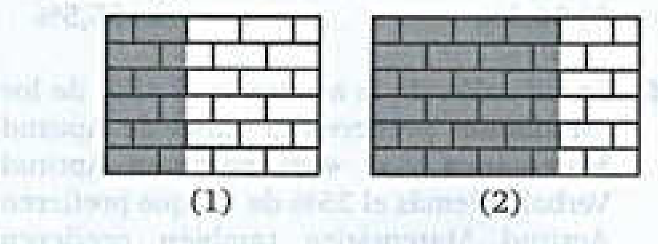
9. En una encuesta se determinó que el 60% de la población de una ciudad toman leche, el 70% no come carne; los que toman leche y comen carne sumados con los que no toman leche ni comen carne son el 40% de la población. Si 9000 personas comen carne pero no toman leche, ¿cuántos habitantes tenía esa ciudad?

A) 72000 B) 80000 C) 90000
D) 54000 E) 60000

10. Gasté el 20% de lo que no gasté. Si hubiera gastado el 60% de lo que no hubiera gastado, tendría entonces 50 soles menos de lo que tengo. ¿Cuánto gaste?

A) 50 soles B) 40 soles C) 60 soles
D) 30 soles E) 35 soles

11. En la figura se muestran dos paredes. El área de la pared (2) es el 120% del área de la pared. En la pared (1) se ha pintado el 40% y en la pared (2) se ha pintado el 75%. ¿Qué tanto por ciento más representa el área que falta pintar en la pared (1) respecto del área que falta pintar en la pared (2)?



A) 150% B) 160% C) 100%
D) 120% E) 110%

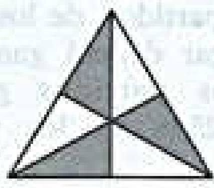
12. Si el área de una esfera disminuye en 19%. ¿En qué tanto por ciento disminuirá su volumen?

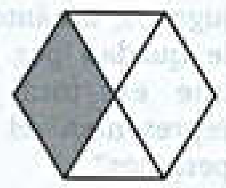
A) 27,1% B) 25,1% C) 25,5%
D) 21,7% E) 27,7%

13. En una tienda se vende una bolsa de caramelos de la siguiente manera: el 20% de los caramelos perdiendo el 50% de su costo; el 75% del resto ganando el 25% de su costo. ¿Qué tanto por ciento de su costo debe ganar en la venta del resto, para que en la venta de toda la bolsa se gane el 25% de su costo?

A) 120% B) 100% C) 140%
D) 150% E) 175%

14. En la figura se muestran un triángulo equilátero y un hexágono regular. El perímetro del triángulo es 50% más que el perímetro del hexágono. ¿Qué tanto por ciento más es el área de la región sombreada del triángulo respecto del área de la región sombreada del hexágono?





A) 100% B) 120% C) 125%
D) 150% E) 200%

15. En un depósito de forma cilíndrica el radio de la base se aumenta en un 10%. ¿En qué tanto por ciento será necesario disminuir la altura para que el volumen no varíe?

A) 17,36% B) 19,12% C) 18,50%
D) 15,72% E) 19,91%

16. El año pasado, el número de alumnos del turno mañana era una vez y media el número de alumnos del turno tarde. Este año, el total de alumnos aumentó un 20%, de este aumento la décima parte corresponde al turno tarde. ¿En qué porcentaje aumentó el número de alumnos del turno mañana?

A) 10% B) 15% C) 20%
D) 25% E) 30%

17. Al escribir en la pizarra se consume el 90% de cada tiza, los residuos se utilizan para fabricar nuevas tizas, perdiéndose en el proceso el 10% de dichos residuos. ¿Cuántas tizas se fabricarán con los residuos de una caja de 12000 tizas?

A) 1200 B) 1800 C) 1880
D) 1020 E) 900

18. ¿En qué porcentaje varía el área de la corona circular, si "r" aumenta en 20% y "R" disminuye 20%, además R = 3r?

A) 46% B) 30% C) 54%
D) 80% E) 60%

19. En la escuela hay 360 alumnos. El 10% de los alumnos usa anteojos. De los que no usan anteojos, el 25% practica natación. ¿Cuántos alumnos no usan anteojos y no practican natación?

A) 240 B) 241 C) 242
D) 243 E) 244

20. En un teatro se rebajó el precio de las entradas en un 20%. Si la recaudación se incrementó en un 44%, ¿en qué tanto por ciento aumentó el número de asistentes?

A) 50% B) 60% C) 75%
D) 80% E) 90%

21. El lunes se vendieron el 30% de los paquetes de galletitas que habría en el depósito. El martes se vendió el 25% de lo que quedaba. Aún quedan 945 paquetes. ¿Cuántos paquetes había al comienzo?

A) 1800 B) 1200 C) 1500
D) 1440 E) 1860

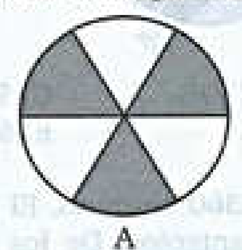
22. El Sr. López es dueño del 75% de una empresa. Cuando se repartieron las ganancias del 2003, el Sr. López recibió como adelanto S/.12600 que representaban el 30% de las ganancias que le correspondían. ¿Cuánto dinero ganó la empresa en el 2003?

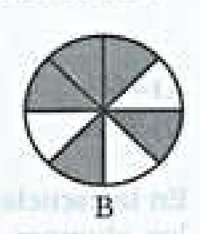
A) S/.50000 B) S/.54000
C) S/.56000
D) S/.60000 E) S/.64000

23. Si yo tuviera 25% menos de lo que tengo y tú tuvieras 70% menos de lo que tienes, entonces yo tendría el triple de lo que tú tendrías. ¿Qué tanto por ciento más que tú, tengo yo?

A) 20% B) 25% C) 30%
D) 50% E) 40%

24. En los círculos mostrados; el área del círculo A es 20% más que el área del círculo B.


A


B

¿Qué tanto por ciento más representa la región sombreada de A respecto de la región no sombreada de B?

A) 100% B) 60% C) 70%
D) 75% E) 80%

25. Si "x" disminuye en 40%, "y" aumenta en 25%, "z" disminuye en 19%, ¿en qué tanto por ciento varía la expresión A?

$$A = \frac{4\pi x^2 y\sqrt{z}}{3}$$

A) 58,5% B) 57,5% C) 59,5%
D) 56,5% E) 55,5%

26. En un salón de la academia el 48% de los estudiantes prefieren el curso de Aptitud Matemática y el 40% prefieren Aptitud Verbal, además el 25% de los que prefieren Aptitud Matemática también prefieren Aptitud Verbal. Si 12 estudiantes no prefieren ninguno de los 2 cursos, ¿cuántos estudiantes hay en el salón?

A) 50 B) 55 C) 60
D) 58 E) 48

27. El $\overline{ab}$ por 8 del 5 por $\overline{ba}$ del 6 por 15 de un número, es igual al 21 por b del b por a de a veces el número. Hallar (a + b).

A) 10 B) 12 C) 8
D) 9 E) 6

28. Los comerciantes Álvarez y Vivanco tienen, cada uno, una bolsa de harina de 50 kg. Álvarez vende la bolsa a S/.36. Vivanco fracciona la harina en bolsitas de medio kilo perdiendo en el proceso el 4% de la harina y vende cada bolsita a S/.0,40. Con respecto a lo obtenido por Vivanco, ¿qué tanto por ciento menos obtiene Álvarez?

A) 6,50% B) 6,25% C) 6,75%
D) 7,00% E) 7,25%

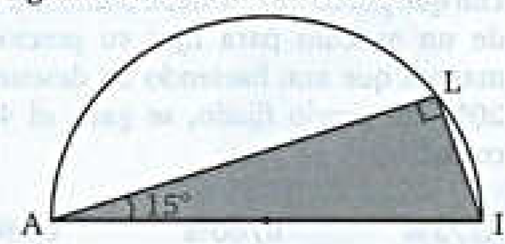
29. En un campeonato, un equipo de fútbol tiene perdidos el 35% de los 20 partidos jugados, ¿cuántos partidos, de los 16 que le quedan por jugar deberá ganar para que en total los partidos ganados representen el 125% de los partidos perdidos?

A) 13 B) 7 C) 8
D) 9 E) 11

30. Si el 54% de los habitantes de un pueblo recibió las dos primeras dosis de vacuna antipolio y el 10% de estos no recibió la tercera dosis, ¿qué tanto por ciento del pueblo recibió las tres dosis?

A) 4,6% B) 48,6% C) 5,4%
D) 94,6% E) 51,4%

31. ¿Cuál es el tanto por ciento de aumento, de la altura del triángulo ALI relativa a la hipotenusa, cuando el área de la región triangular toma su máximo valor?



A) 20% B) 30% C) 75%
D) 100% E) 300%

32. En una mezcla de 70L de agua y alcohol, siendo el agua el 70% de la mezcla. ¿Cuántos litros de esta mezcla se tendrán que extraer para que al ser reemplazados por la misma cantidad de alcohol puro, la mezcla resultante tenga 80% de alcohol?

A) 25 L B) 40 L C) 50 L
D) 30 L E) 35 L

33. De un tanque de combustible que está completamente lleno saco el 40% de lo que no saco, y de lo que saqué devuelvo el 40% de lo que no devuelvo, resulta al final 195 litros en el tanque ¿qué capacidad tiene el tanque?

A) 39 B) 40 C) 50
D) 195 E) 245

34. Una sandía pesó 10 kg, de los cuales el 99% es agua. Después de cierto tiempo al sol, se evaporó parte del agua, siendo ahora el agua el 98% del peso total de la sandía. ¿Cuánto pesa ahora la sandía?

A) 9,9 kg B) 9,8 kg C) 9,6 kg
D) 9,4 kg E) 5 kg

35. El 95% de los alumnos que han resuelto correctamente el cuarto problema del examen de aptitud matemática son del ciclo semianual. Si 38 alumnos se presentaron a la prueba, ¿cuántos no han resuelto correctamente dicho problema?

A) 20 B) 19 C) 18
D) 15 E) 12

36. Un orador habló durante sesenta minutos a un auditorio lleno. El 20% de la audiencia oyó todo el discurso y el 10% se durmió durante todo el discurso. La mitad de los oyentes restantes oyó la tercera parte del discurso y la otra mitad oyó las dos terceras partes del discurso. ¿Cuál es el número promedio de minutos del discurso que los miembros de la audiencia oyeron?

A) 20 min B) 25 min C) 23 min
D) 30 min E) 33 min

37. ¿En qué tanto por ciento aumenta el volumen de un cilindro cuando la altura se reduce en 25% y la longitud del radio de la base aumenta en 20%?

A) 5% B) 10% C) 8%
D) 12% E) 6%

38. Un recipiente con 60 L contiene 60% de alcohol y el resto agua, otro recipiente contiene 30 L de agua, ambos se mezclan. ¿Cuántos litros de alcohol se tendrá que agregar para obtener una mezcla de 50°?

A) 18 B) 15 C) 16
D) 20 E) 24

39. En una reunión se observó que el 60% de los varones no usaba anteojos y el 40% de las mujeres tampoco. En total eran 600 personas y las mujeres que usaban anteojos más la mitad de los varones que usaban anteojos son 180. ¿Qué tanto por ciento más son los varones que usan anteojos respecto de las mujeres que no usan anteojos?

A) 225% más B) 200% más
C) 110% más
D) 150% más E) 230% más

40. El 40% de los socios de un club juegan tenis. De los socios que no juegan al tenis, 25% son varones. El número total de mujeres es una vez y media el número de varones que practican tenis. ¿Qué tanto por ciento de los socios del club son mujeres que juegan tenis?

A) 30% B) 10% C) 8%
D) 12% E) 6%

41. Si el radio de un círculo se duplica, ¿en qué tanto por ciento aumenta su área?

A) 100% B) 200% C) 300%
D) 400% E) 800%

42. Una solución de agua salada contiene 25% de sal y otra segunda solución contiene 10% de sal. ¿Cuántos litros de la segunda solución deben ser agregados a 24L de la primera solución para que el contenido de sal resultante sea el 25% del contenido de agua?

A) 12 L B) 32 L C) 45 L
D) 10 L E) 24 L

43. Una esponja es introducida en agua, al retirarla y pesarla se observó que el peso aumentó en 20%. Si se evapora la mitad del agua, ¿en qué tanto por ciento disminuirá el peso de la esponja?

A) 10% B) 9,6% C) 12,3%
D) 8,3% E) 12%

44. Si gastara el 40% del dinero que tengo y ganara el 38% de lo que quedaría, perdería S/.5160. ¿Cuánto tengo?

A) S/.20 000 B) S/.25 000
C) S/.30 000
D) S/.35 000 E) S/.40 000

45. Una tela al lavarse se encoge el 10% en el ancho y el 20% en el largo. Si se sabe que la tela tiene 2 m de ancho, ¿cuántos metros deben comprarse si se necesitan 36 m² de tela después de ser lavada?

A) 28 B) 25 C) 34
D) 15 E) 50

46. Compro un objeto y me rebajan el 20% del precio de lista. Luego lo vendo ganando el 20% de lo que me costó. ¿Qué porcentaje del precio de lista es el precio al que vendí el objeto?

A) 100% B) 98% C) 96%
D) 94% E) 95%

47. ¿En qué porcentaje se debe aumentar el costo de un artículo para fijar su precio de tal manera que aun haciendo un descuento del 20% del precio fijado, se gane el 40% del costo?

A) 75% B) 60% C) 80%
D) 68% E) 90%

48. Un comerciante vende un objeto ganando el 20% de su costo. Si quiere ganar adicionalmente S/.27 más, tiene que subir dicho precio de venta en 18%. El precio de costo es:

A) S/.150 B) S/.100 C) S/.125
D) S/.155 E) S/.170

49. Si el 70% del área de una región circular es numéricamente igual al 35% de la longitud de la circunferencia, calcule el área de la región circular.

A) π B) 4π C) 9π
D) 16π E) 7π

50. Juan compra un auto y lo vende a José ganando 20%, José luego de un tiempo lo vende a Pedro perdiendo un 10% de lo que le costó y finalmente Pedro lo vuelve a vender a otra persona perdiendo el 25% de lo que le costó. Si la diferencia entre el precio inicial y el precio final del auto es de S/.5700, ¿a cuánto lo compró Pedro?

A) S/.32400 B) S/.28500
C) S/.33100
D) S/.30000 E) S/.32100

Operaciones Matemáticas y Leyes de Composición Interna

CAPACIDADES

- Profundizar las diversas operaciones matemáticas desarrollados en el nivel primario y secundario.
- Desarrollar en el estudiante la capacidad de comparación cuantitativa, y analogía algorítmica.
- Manejo adecuado de formas no convencionales en que se presentan las operaciones matemáticas.
- Desarrollar conceptos de leyes de composición, como introducción a estructuras algebraicas.

CALCULADORES PRODIGIOSOS, la rapidez para el cálculo que tienen ciertos hombres es asombroso en muchos casos:

Henri Mondeux desarrollaba mentalmente las operaciones aritméticas más complicadas y aún no sabía leer ni escribir, en 1840 la Academia de Ciencias de Paris le tomó un cuestionario de 2 preguntas empleando para ellos pocos segundos, las preguntas fueron:

(1) Encontrar un número tal que su cubo aumentado en 84 de una suma igual al producto de este número por 37.

(2) Encontrar 2 cuadrados cuya diferencia es 133

El italiano J. Inaudi fue sometido en cambio a preguntas mucho más exigentes:

(1) Quitar: 1248126138234128910 de 4123547238445523831.

(2) Hallar el número cuyo cubo más su cuadrado suman 3600.

A los matemáticos H. Poincaré y B. Russel le propusieron:

(1) ¿Qué día de la semana fue 4 de marzo de 1822?

(2) ¿A qué es igual $\sqrt{\dfrac{4801^2-1}{6}}$?

Todas estas preguntas fueron resueltas sin que el intervalo entre pregunta y respuesta llegase nunca a 35 seg. En todos estos casos la fuerza calculadora proviene de una memoria especializada. En el Perú tenemos un compatriota ganador del concurso mundial de cálculo a nivel internacional. También es importante decir que éstas personas ven los números de otra forma, por ejemplo:

$$1 = \frac{2}{2} = 5^{3-3} = 1^7$$

$$2 = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \log 100 = \frac{3!}{3}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4}$$

La gran pregunta indudablemente es que hace a éstos personajes tan veloces en el cálculo y como pueden desarrollar en segundos algo que a un buen matemático como Poincaré, Pitágoras, B. Russel les llevaba en muchas ocasiones horas o simplemente fracasaban.

INTRODUCCIÓN

En nuestros albores matemáticos empezamos primero contando; luego, uniendo elementos fuimos dando los cimientos de la adición y posteriormente a través de cientos de años fuimos desarrollando conceptos más avanzados.

Hoy manejamos principalmente operaciones como: adición, sustracción, multiplicación, logaritmación, máximo entero, valor absoluto, sumatorias, etc. y es por ello que es muy importante saber desarrollar sus algoritmos.

NOCIÓN DE OPERACIÓN MATEMÁTICA

Es un proceso que transforma una o más cantidades en otras (resultado) mediante ciertas reglas llamadas regla de definición.

OBSERVACIÓN

La definición de una operación matemática es en cambio la siguiente:

Es una aplicación de A × A. En A donde A es un conjunto definido.

Para representar una operación matemática se utiliza un símbolo al que se le denomina operador matemático:

$+$; $-$; $\times$; $\div$; log ; Σ; $|\ |$; $[\![\ ]\!]$; $\int$; $\sqrt{\ }$; .... son convencionales

$\circledast$; $\odot$; $\square$; $\oplus$; Δ; ∇; T; $\perp$; #; $\sqcap$; ♠; ♥ ...... son no convencionales

asterisco ($\circledast$); delta (∇); truc (T); anti truc ($\perp$); grilla (#)

Debemos no confundir la operación con el resultado de la operación.

OPERACIÓN	OPERADOR	RESULTADO
ADICIÓN	$+$	SUMA
SUSTRACCIÓN	$-$	DIFERENCIA
MULTIPLICACIÓN	$\times$	PRODUCTO
DIVISIÓN	$\div$	COCIENTE
VALOR ABSOLUTO	$\|\ \|$	——
MÁXIMO ENTRO	$[\![\ ]\!]$	——
SUMATORIA	Σ	——
INTEGRACIÓN	$\int$	——
LOGARITMACIÓN	log	——
DIFERENCIA SIMÉTRICA	Δ	——
DERIVADA	$f'(x)$	——

Ejemplo: La operación (∗) se define en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Operador}}}{a * b} = \underbrace{a^b + b^a + ab}_{\text{Regla de definición}}$$

Podemos hallar: $\rightarrow \underset{a}{7} * \underset{b}{1} = 7^1 + 1^7 + 7 \times 1 = 15$

$\rightarrow \underset{a}{2} * \underset{b}{3} = 2^3 + 3^2 + 2 \times 3 = 23$

$\rightarrow \underset{a}{-1} * \underset{b}{2} = (-1)^2 + 2^{-1} + (-1)(2) = 1 + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow b * a = b^a + a^b + b \times a$

A continuación desarrollaremos algunas operaciones elementales para nuestro avance en el capítulo:

OPERACIONES MATEMÁTICAS CON REGLA DE DEFINICIÓN EXPLÍCITA

En este caso la regla de definición garantizada en forma directa la definición de la operación matemática, como en los ejemplos anteriores.

Ejemplo: Se define en $\mathbb{R}^+$ la operación matemática

$$a*b = \frac{2ab + 3a + 2b + 3}{a+1}$$

Calcule: $M = (...(((1 * 2) * 3) * 4)...) * 10$

Resolución: Como en lo que nos piden hay signo de agrupación, debemos trabajar primero con el paréntesis que aparece en el interior.

$$1 * 2 = \frac{2(1)(2) + 3(1) + 2(2) + 3}{(1)+1} = 7$$

Luego continuamos con el siguiente paréntesis y de manera similar continuamos hasta efectuar el último cálculo.

Vemos que con éste análisis obtenemos la solución pero con muchos pasos.

Lo que aconseja es que primero debemos reducir al máximo la regla de definición que nos dan.

$$a*b = \frac{2ab + 3a + 2b + 3}{a+1}$$

Factorizamos de manera conveniente el numerador en la regla de definición:

$$a*b = \frac{2ab + 2b + 3a + 3}{a+1}$$

$$a*b = \frac{2b(a+1) + 3(a+1)}{a+1}$$

$$a*b = \frac{(a+1)(2b+3)}{(a+1)}$$

Como la operación matemática está definida en , entonces $\alpha + 1 > 0$, luego se puede simplificar $(\alpha + 1)$

$$a*b = 2b+3$$

Del resultado final vemos que la regla de definición solo depende del segundo elemento (b), reemplazando en lo que nos piden:

$$M = \underbrace{(1...(((1*2)*3)*4)...)}_{K}*10$$

$$M = K*10 = 2(10)+3 = 23$$

$$\therefore \quad M = 23$$

OPERACIONES MATEMÁTICAS CON REGLA DE DEFINICIÓN IMPLÍCITA

Existe problemas en los cuales no se da de manera directa la regla de definición, si no lo dan expresados de otra manera..

Ejemplo: Se define en $\mathbb{R}$, la operación matemática representada por el operador * como:

$$a*b = 2(b*a) - a$$

Calcule: $6*12$

Resolución: En este tipo de problemas se busca obtener la regla de definición de a * b, para lo cual se sugiere seguir los siguientes pasos:

$$a*b = 2(b*a) - a \quad ...(I)$$

Paso 1: Cambio de variable a por b y b por a:

$$b*a = 2(a*b) - b \quad ...(II)$$

Paso 2: Reemplazar (II) en (I):

$$a*b = 2(2(a*b) - b) - a \quad ...(III)$$

Paso 3: Despejar de (III) a * b:

$$a*b = 2(2(a*b) - b) - a$$

$$a*b = 4(a*b) - 2b - a$$

$$a + 2b = 3(a*b)$$

$$a*b = \frac{a+2b}{3}$$

Finalmente obtener lo que nos piden:

$$6*2 = \frac{6+2(12)}{3} = 10$$

OPERACIONES EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

FILA DE ENTRADA

COLUMNA DE ENTRADA

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Cuerpo de la tabla
(son los resultados de operar los elementos de la columna de entrada con los elementos de la fila de entrada)

Ejemplo: Calcular: b * b ; c * d

Resolución: Observamos en la tabla:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

b * b = c

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

c * d = c

Ejemplo: En el conjunto A = {1, 3, 5, 7}
Se define la operación (*) mediante la siguiente tabla:

*	1	3	5	7
3	5	7	1	3
7	1	3	5	7
1	3	5	7	1
5	7	1	3	5

Calcular: $A = \dfrac{(3 * 3) * (1 * 3)}{(1 * 1) * (7 * 1)}$

Resolución: $A = \dfrac{(3 * 3) * (1 * 3)}{(1 * 1) * (7 * 1)} = \dfrac{7 * 5}{3 * 1} = \dfrac{5}{5}$

$\therefore \quad A = 1$

LEYES DE COMPOSICIÓN

Se define en el conjunto "A", una operación mediante el operador (∗).

CLAUSURA O CERRADURA

$$\forall a, b \in A \Rightarrow a * b \in A$$

Para todo par de elementos del conjunto "A" al realizar la operación definida con dichos elementos el resultado pertenece al conjunto "A".

Ejemplo: En el conjunto A = {a, b, c, d} se define la operación (∗):

∗	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

Todos los resultados que se encuentran en el cuerpo de la tabla pertenecen al conjunto "A", entonces la operación (∗) cumple la propiedad de clausura, también se dice que la operación es cerrada

∗	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	e
c	c	d	a	b
d	e	a	b	c

Dentro de los resultados que se encuentran en el cuerpo de la tabla está el elemento "e" que no pertenece al conjunto "A". Entonces la operación (∗) no cumple la propiedad de clausura, también se dice que la operación no es cerrada.

CONMUTATIVA

$$\forall a, b \in A \Rightarrow a * b = b * a$$

Al cambiar el orden de los elementos en la operación el resultado no se altera.

Ejemplo: i) En la adición: $a + b = b + a$
Entonces la adición es conmutativa.

ii) En la sustracción: $a - b \neq b - a$
Entonces la sustracción no es conmutativa.

Ejemplo: Se define: $a * b = a^2 + b^2 + \dfrac{ab}{2}$

La operación ($*$) ¿Es conmutativa?

Resolución:

$$a * b = a^2 + b^2 + \frac{ab}{2}$$
$$b * a = b^2 + a^2 + \frac{ab}{2}$$

Son iguales

$\Rightarrow a * b = b * a$

$\therefore$ La operación ($*$) es conmutativa.

Ejemplo: Se define: $x \Delta y = x^2 - y + 1$

La operación (Δ) ¿Es conmutativa?

Resolución:

$$x \Delta y = x^2 - y + 1$$
$$y \Delta x = y^2 - x + 1$$

Son diferentes

$x \Delta y \neq y \Delta x$

$\therefore$ La operación (Δ) no es conmutativa.

Para operaciones en Tablas:

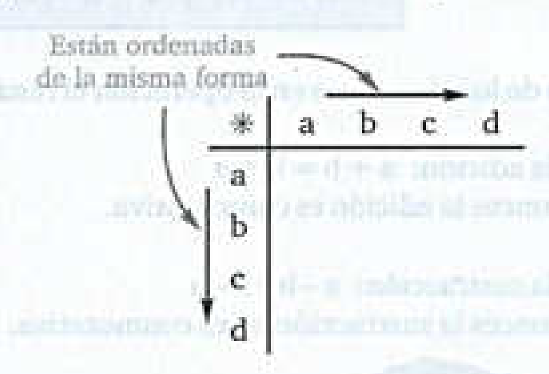
En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se define:

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	c	b	c	d
c	d	c	a	c
d	b	d	c	b

La operación ($*$) ¿Es conmutativa?

Resolución: Criterio de la simetría:

1. Verifique que tanto la fila como columna de entrada estén ordenadas de la misma forma, partiendo desde el vértice del operador.



2. Se traza la diagonal que parte del vértice del operador y se verifica que haya simetría respecto de dicha diagonal, es decir que a ambos lados de la diagonal los elementos estén colocados simétricamente.

*	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	c	b	c	d
c	d	c	a	c
d	b	d	c	b

Existe simetría, los elementos están ubicados simétricamente respecto de la diagonal

∴ La operación (*) es conmutativa.

Ejemplo: Se define el conjunto A = {1, 3, 5, 7}

*	1	3	5	7
1	3	5	7	1
5	7	1	3	5
3	5	7	1	3
7	1	3	5	7

¿Es conmutativa?

Resolución:

*	1	3	5	7
1	3	5	7	1
5	7	1	3	5
3	5	7	1	3
7	1	3	5	7

Ordenamos intercambiando filas:

∗	1	3	5	7
1	3	5	7	1
5	7	1	3	5
3	5	7	1	3
7	1	3	5	7

⇨

∗	1	3	5	7
1	3	5	7	1
3	5	7	1	3
5	7	1	3	5
7	1	3	5	7

Luego:

∗	1	3	5	7
1	3	5	7	1
3	5	7	1	3
5	7	1	3	5
7	1	3	5	7

Existe simetría

$\therefore$ La operación (∗) es conmutativa.

EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO

$$\exists e \in A \,/\, \forall a \in A \Rightarrow a * e = e * a = a$$

e : Elemento neutro

OBS: El elemento neutro es único.

1. En la adición el elemento neutro es el cero (0)

$$a + 0 = 0 + a = 0$$

2. En la multiplicación el elemento neutro es el uno (1)

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

Ejemplo: Se define: $a * b = a + b - 2$

Calcule el elemento neutro (e)

Resolución: $a * b = a + b - 2$

Por definición de elemento neutro:

$$\underbrace{a * e} = a \qquad \underbrace{e * a} = a$$

$$a + e - 2 = a \qquad e + a - 2 = a$$

$$e = 2 \qquad e = 2$$

$\therefore$ $e = 2$

Ejemplo: Se define: $a \# b = a - b - 3$

Calcule el elemento neutro.

Resolución: $a \# b = a - b - 3$

Por definición de elemento neutro:

$a \# e = a$	$e \# a = a$
$a - e - 3 = a$	$e - a - 3 = a$
$e = 3$	$e = 2a + 3$

Observe que el resultado no es el mismo en ambos casos. Entonces la operación no tiene elemento neutro.

Para operaciones en tablas

Se define en $A = \{1, 2, 3, 4\}$

*	1	2	3	4
1	3	1	4	2
2	1	2	3	4
3	1	3	2	4
4	2	4	1	3

Calcule el elemento neutro.

Resolución: Ubique en el cuerpo de la tabla una fila idéntica a la fila de entrada y una columna idéntica a la columna de entrada, en la intersección de ambas se encontrará el elemento neutro.

*	1	2	3	4
1	3	1	4	2
2	1	2	3	4
3	1	3	2	4
4	2	4	1	3

⇨ $e = 2$

Ejemplo: Se define en $A = \{m, n, p\}$

*	m	p	n
n	n	m	p
m	m	p	n
p	p	n	m

Calcule el elemento neutro.

Resolución:

*	m	p	n
n	n	m	p
m	m	p	n
p	p	n	m

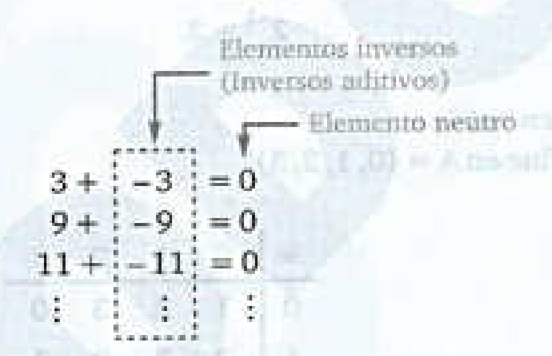
⇨ $e = m$

EXISTENCIA DE ELEMENTOS INVERSOS

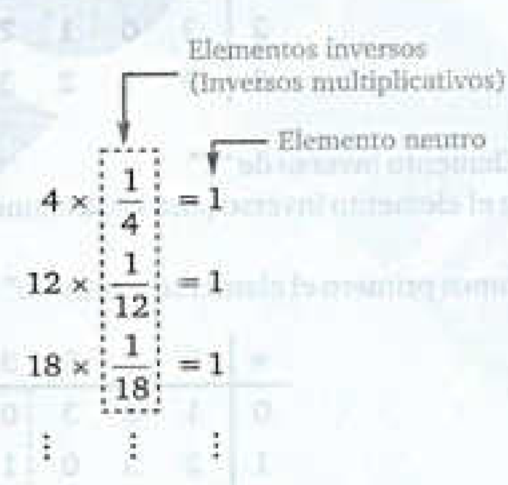
$$\forall a \in A, \exists a^{-1} \in A / a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

a^{-1}: Elemento inverso de "a"
e: Elemento neutro

1. En la adición:



2. En la multiplicación:



Ejemplo: Se define: $a * b = \dfrac{ab}{2}$

a^{-1}: Elemento inverso de "a"
Calcule: 2^{-1} ; 3^{-1}

Resolución: 1. Primero calculamos el elemento neutro de "e"

$$a * b = \frac{ab}{2}$$

Por definición de elemento neutro

$$\underbrace{a * e}= a$$

$$\frac{ae}{2} = a$$

$$e = 2$$

2. Aplicaremos definición de elemento inverso

$$\boxed{a * a^{-1} = e}$$

Neutro — Neutro

$$\underbrace{2 * 2^{-1}} = 2 \qquad \underbrace{4 * 4^{-1}} = 2$$

$$\frac{2 \times 2^{-1}}{2} = 2 \qquad \frac{4 \times 4^{-1}}{2} = 2$$

$$2^{-1} = 2 \qquad 4^{-1} = 1$$

Para operaciones en tablas

Se define en A = {0, 1, 2, 3}

*	0	1	2	3
0	1	2	3	0
1	2	3	0	1
2	3	0	1	2
3	0	1	2	3

a^{-1}: Elemento inverso de "a"

Calcule el elemento inverso para cada elemento de A.

Resolución: Calculamos primero el elemento neutro "e"

*	0	1	2	3
0	1	2	3	0
1	2	3	0	1
2	3	0	1	2
3	0	1	2	3

⇨ e = 3

Por definición: $0 * 0^{-1} = 3$
de la tabla: $0 * 2 = 3$ } $0^{-1} = 2$

Por definición: $1 * 1^{-1} = 3$
de la tabla: $1 * 1 = 3$ } $1^{-1} = 1$

Por definición: $2 * 2^{-1} = 3$
de la tabla: $2 * 0 = 3$ } $2^{-1} = 0$

Por definición: $3 * 3^{-1} = 3$
de la tabla: $3 * 3 = 3$ } $3^{-1} = 3$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Se define:

$$a * b = a^2 + 2b - 1$$

Calcular: $5 * 3$

Rpta.: ....

2. $x * y = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3}$

Calcular: $9 * 3$

Rpta.: ....

3. Se define: $\boxed{x} = 1 - \frac{1}{x^2}$

Halle: $M = \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{4} \times \boxed{5} \times ...... \times \boxed{20}$

Rpta.: ....

4. $a^4 * b^3 = \sqrt{a^2 + b^2}$

Calcular: $81 * 64$

Rpta.: ....

5. Se define en A = {1, 2, 3, 4}

*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Calcular: $A = \left[\frac{(1*4)*(2*3)}{(1*2)*(2*4)}\right]^{3*1}$

Rpta.: ....

6. Se define: $\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\!\quad x-2 = x^2 - 2x$. Calcular: $\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\quad 7$

Rpta.: ....

7. Se define: $\triangle\,2x-1 = 3x$.

Calcular: $\triangle\,11$

Rpta.: ....

8. Se define:

$$a * b = \begin{cases} 2a + b; & \text{si } a > b \\ 2a - b; & \text{si } a < b \end{cases}$$

Calcular: $(4 * 2) * (3 * 5)$

Rpta.: ....

9. Se define:

*	2	4	6	8
2	8	6	4	2
4	6	4	2	8
6	4	2	8	6
8	2	8	6	4

Calcular X en:

$$2 * X = 6 * 8$$

Rpta.: ....

10. Se define:

*	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	5	7	1
5	5	7	1	3
7	7	1	3	5

Calcular: $A = \frac{(1*7)*(5*3)}{(1*1)*(3*3)}$

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Se define:

$$\boxed{x-1} = x^2-9 \ ; \ x-1>0$$

$$\boxed{a * b} = 9b$$

Calcular: $225 * 15$

Resolución:

$$\boxed{x-1} = \textcircled{x}^2-9 \qquad \boxed{a * \textcircled{b}} = 9b$$

$+1(\ )^2-9$; $\times 9$

$$225 * 15 = x \ ; \text{ debemos hallar: } x$$

Encerrando en recuadro ambos miembros:

$$\boxed{225 * 15} = \boxed{x}$$

$$15 \times 9 = (x+1)^2-9$$

$$135+9 = (x+1)^2$$

$$144 = (x+1)^2$$

$$(-12)^2 = 12^2 = (x+1)^2$$

$x = 11$

$x = -13$

$\therefore$ Como $x > 1$, entonces $x = 11$

PROBLEMA 2 Se define:

$$\boxed{a * b} = a \,\Delta\, b$$

$$a \,\Delta\, b = \frac{a+b}{a-b} \ ; \ \boxed{x} = x^2-1$$

Calcular: $\boxed{\boxed{\boxed{3 * 2}}}$

Resolución: Resolviendo de adentro hacia afuera con los respectivos operadores.

$$\boxed{3 * 2} = 3 \,\Delta\, 2 = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

$$\therefore \ \boxed{\boxed{\boxed{3 * 2}}} = \boxed{\boxed{5}} = \boxed{24} = 24^2-1 = 575$$

$\to 5$; $\to 5^2-1=24$

PROBLEMA 3 Se define:

$$\text{(x)} = x^2 + 1 \; ; \; x > 0$$

$$\boxed{\text{(x)}} = 4x^2 + 1$$

Calcular: $A = \text{(4)} - \text{((2))} + \boxed{8}$

Resolución:

$\Rightarrow \text{(x)} = x^2 + 1$; $()^2 + 1$; $\Rightarrow \boxed{\text{(x)}} = 4x^2 + 1$

$\boxed{x^2 + 1} = 4x^2 + 1$; $\times 4 - 3$

$\Rightarrow \text{(4)} = 4^2 + 1 = 17$; $()^2 + 1$ $\boxed{2} = 5$; $\times 4 - 3$ $\boxed{8} = 29$; $\times 4 - 3$

$$A = \underbrace{\text{(4)}} - \underbrace{\text{((2))}} + \underbrace{\boxed{8}}$$

$$A = 17 - \underbrace{\text{(5)}} + 29$$

$$A = 17 - 26 + 29$$

$$\therefore \; A = 20$$

PROBLEMA 4 Se define:

$$a^b \, \Phi \, b^a = \frac{a-b}{2}$$

Calcule: $\left(\sqrt{3} \, \Phi \, \frac{1}{8}\right) + (81 \, \Phi \, 512)$

Resolución:

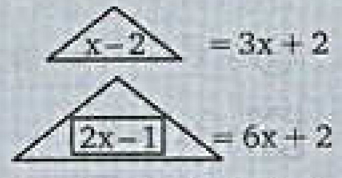
$$a^b \, \Phi \, b^a = \frac{a-b}{2}$$

- $\sqrt{3} \, \Phi \, \frac{1}{8} = \underset{a}{3}^{\frac{1}{2}} \, \Phi \, \underset{b}{\left(\frac{1}{2}\right)}^3 = \dfrac{3 - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$

- $81 \, \Phi \, 512 = \underset{a}{9}^2 \, \Phi \, \underset{b}{2}^9 = \dfrac{9-2}{2} = \dfrac{7}{2}$

$$\therefore \; \underbrace{\sqrt{3} \, \Phi \, \frac{1}{8}}_{\frac{5}{4}} + \underbrace{81 \, \Phi \, 512}_{\frac{7}{2}} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$$

PROBLEMA 5 Se define:



Calcular: $A = \boxed{10} \times \boxed{9} \times \boxed{8} \times .... \times \boxed{1}$

Resolución:

⇨ $\triangle(x-2) = 3x+2$; (×3 + 8) ; $\triangle(\boxed{2x-1}) = 6x+2$

$3\,\boxed{2x-1} + 8 = 6x + 2$

$\boxed{2x-1} = 2x-2$ (−1)

⇨ $\boxed{7} = 6$ (−1) $\boxed{8} = 7$ (−1) $\boxed{1} = 0$ (−1)

$\therefore\ A = \boxed{10} \times \boxed{9} \times \boxed{8} \times .... \times \boxed{1}$

$A = 9 \times 8 \times 7 \times .... \times 0 = 0$

PROBLEMA 6 Se define:

$$a \otimes b = \frac{a^b + b^a}{a+b} \ ; \ a \neq -b$$

Halle el valor de: $E = (...(((1\otimes 1)\otimes 2)\otimes 3)...\otimes 100)$

Resolución: Según la regla; y empezando desde la parte interna:

$$1\otimes 1 = \frac{1^1+1^1}{1+1} = 1$$

$$1\otimes 2 = \frac{1^2+2^1}{1+2} = 1$$

$$1\otimes 3 = \frac{1^3+3^1}{1+3} = 1$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ E = \Big[(...(((\underbrace{1\otimes 1}_{1})\otimes 2)\otimes 3)...\otimes 100)\Big] = 1$$

PROBLEMA 7 Se define:

$$\boxed{n} = n^2 - 1 \quad ; \quad n > 0$$

Hallar x en: $\boxed{\boxed{\boxed{\dfrac{x-3}{2}}}} = 63$

Resolución: Observando en forma contraria la regla se tiene:

$$\boxed{x} = 8^2 - 1 \quad (x = 8)$$

$$\boxed{x} = 7^2 - 1 \quad (x = 7)$$

$$\boxed{\boxed{\boxed{\dfrac{x-3}{2}}}} = 63 = 8^2 - 1$$

$$\boxed{\boxed{\dfrac{x-3}{2}}} = 8 = 3^2 - 1$$

$$\boxed{\dfrac{x-3}{2}} = 3 = 2^2 - 1 \Rightarrow \frac{x-3}{2} = 2$$

$$\therefore \quad x = 7$$

PROBLEMA 8 Se define:

$$\int_b^a f_{(x)} = \frac{a}{2ab}$$

Calcular: $\int_2^1 f_{(n+1)} + \int_3^2 f_{(n+1)} + \int_4^3 f_{(n+1)} + \ldots + \int_{n+1}^n f_{(n+1)}$

Resolución:

$$\int_2^1 f_{(n+1)} + \int_3^2 f_{(n+1)} + \int_4^3 f_{(n+1)} + \ldots + \int_{n+1}^n f_{(n+1)}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{n+1}{2\times 1\times 2} + \frac{n+1}{2\times 2\times 3} + \frac{n+1}{2\times 3\times 4} + \ldots + \frac{n+1}{2\times n(n+1)}$$

Factorizando: $\dfrac{n+1}{2}$

$$\frac{n+1}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right]}_{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{2}$$

PROBLEMA 9 Definimos en $\mathbb{Z}$:

$$a \# b = a + b - 4$$

Halle: $M = (2^{-1} \# 4)^{-1} \# (6^{-1} \# 8)^{-1}$

donde a^{-1} es el elemento inverso de a.

Resolución: Primero calculamos el elemento neutro (e):

$$\underbrace{a * e}= a$$
$$a + e - 4 = a$$
$$\boxed{e = 4}$$

Luego calculamos el elemento inverso (a^{-1})

$$\underbrace{a * a^{-1}} = e$$
$$a + a^{-1} - 10 = 10$$
$$\boxed{a^{-1} = 20 - a}$$

Entonces: $2^{-1} = 20 - 2 = 18$

$6^{-1} = 20 - 6 = 14$

Reemplazando en M:

$$M = (\underbrace{18 \# 4})^{-1} \# (\underbrace{14 \# 8})^{-1}$$
$$M = (18 + 4 - 4)^{-1} \# (14 + 8 - 4)^{-1}$$
$$M = \underbrace{18^{-1}} \# \underbrace{18^{-1}}$$
$$M = (20 - 18) \# (20 - 18)$$
$$M = \underbrace{2 \# 2}$$
$$M = 2 + 2 - 4$$
$$\therefore \quad M = 0$$

PROBLEMA 10 Se define en $\mathbb{R}$:

#	5	6	8	11
4	21	24	30	39
6	22	25	31	40
10	24	27	33	42
18	28	31	37	46

Calcule: 54 # 20

Resolución: Extraemos una regla de definición utilizando una forma practica.

#	5	6	8	11
4	21	24	30	39
6	22	25	31	40
10	24	27	33	42
18	28	31	37	46

(Columnas: 5 →+1→ 6 →+2→ 8 →+3→ 11; filas: 21 →+3→ 24 →+6→ 30 →+9→ 39; relación 3 en cada columna. Filas: +2 / +1 → $\frac{1}{2}$; +4 / +2 → $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; +8 / +4 → $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$)

Generalizamos : $\boxed{a \# b=\frac{1}{2}a+3b+4}$

Comprobemos para cualquier par de términos : $4\#5=\frac{1}{2}(4)+3(5)+4=21$

Piden : $54\#20=\frac{1}{2}(54)+3(20)+4$

$\therefore\ 54\#20=91$

PROBLEMA 11 Definimos los siguientes operadores:

$$a\ \Theta\ b=\begin{cases}a^2\sqrt{b^3}\ ;\ \text{si } a\neq b\\ 2a+b\ ;\ \text{si } a=b\end{cases}$$

$$a \# b=a^2b^2$$

Calcular el valor de:

$$N=\left[\frac{(1\ \Theta\ 1)\ \Theta\ (\sqrt{3}\ \Theta\ 1)}{4\ \Theta\ 4}\right]\#\ 4$$

Resolución:

⇨ $a\ \Theta\ b=a^2\sqrt{b^3}\ \ (a\neq b)$ $\qquad a\#b=a^2b^2$

$a\ \Theta\ b=2a+b\ \ (a=b)$

⇨ $1\ \Theta\ 1=2(1)+1=3$

$\sqrt{3}\ \Theta\ 1=\sqrt{3}^2\sqrt{1^3}=3$

$4\ \Theta\ 4=2(4)+4=12$

$3\ \Theta\ 3=2(3)+3=9$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{(1 \ominus 1) \ominus (\sqrt{3} \ominus 1)}{4 \ominus 4} \# 4 = \frac{\overbrace{3 \ominus 3}^{9}}{12} \# 4$$

$$N = \frac{3}{4} \# 4 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 4^2 = \frac{9}{\cancel{16}} \times \cancel{16}$$

$$\therefore \quad N = 9$$

PROBLEMA 12 Si en $\mathbb{R}^+$ se define la operación como:

$$a*b = \frac{a.b}{a+b}$$

Luego * es una operación:

A) conmutativa pero no asociativa.
B) asociativa pero no conmutativa.
C) asociativa y conmutativa.
D) no conmutativa ni asociativa.
E) solo conmutativa.

Resolución:

* La operación binaria es conmutativa :

$$a * b = \frac{a\,.\,b}{a+b} = \frac{b\,.\,a}{b+a} = b * a$$

* Veamos si es asociativa :

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b.c}{b+c}\right) = \frac{a.\left(\frac{b.c}{b+c}\right)}{a + \left(\frac{b.c}{b+c}\right)}$$

$$(a * b) * c = \left(\frac{a.b}{a+b}\right) * c = \frac{\left(\frac{a.b}{a+b}\right) + c}{\left(\frac{a.b}{a+b}\right) + c}$$

Puede notarse que : $a * (b * c) \neq (a * b) * c$

Por lo tanto, la operación binaria no es asociativa.

$\therefore$ Sólo es conmutativa

PROBLEMA 13 Sabiendo que:

$\triangle n = n^2 - 1$; (n en un cuadro dentro de un triángulo) $= n^2 + 2n$

Calcular: (x en un triángulo dentro de un doble cuadro)

Resolución:

$\Rightarrow$ $\triangle n = n^2-1$; $()^2-1$

$\triangle \boxed{n} = n^2+2n$

$(\boxed{n})^2-1 = n^2+2n$

$\boxed{n}^2 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

$\boxed{n} = n+1$

$\Rightarrow$ $\triangle x = x^2-1$; $()^2-1$

$\boxed{x^2-1} = x^2-1+1 = x^2$; $+1$

$\boxed{x^2} = x^2+1$; $+1$

Piden: $\boxed{\boxed{\triangle x}} = \boxed{\boxed{x^2-1}} = \boxed{x^2} = x^2+1$

PROBLEMA 14 Considere la operación $\otimes$, definida por:

$$a \otimes (2b+1) = \frac{a}{2} + b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

Además, se define la potencia por derecha de a, según la operación $\otimes$, como:

$$a_D^n = \underbrace{a \otimes (a \otimes (a \otimes ... (a \otimes a))...)}_{n \text{ factores}}$$

Halle: $Q = 2_D^3 \otimes 3_D^2$

Resolución: Sea la operación $\otimes$, definida por :

$$a \otimes (2b+1) = \frac{a}{2} + b \ \forall a, b \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ a_D^n = \underbrace{a \otimes (a \otimes (a \otimes ... (a \otimes a))...)}_{n \text{ factores}}$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x \otimes y = \frac{x}{2} + \frac{y-1}{2} = \frac{x+y-1}{2}$

Luego : $\quad * \ 2_D^3 = 2 \otimes (2 \otimes 2) = 2 \otimes \left(\frac{3}{2}\right)$

$$2_D^3 = \frac{2+\frac{3}{2}-1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$* \ 3_D^2 = 3 \otimes 3 = \frac{3+3-1}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \quad Q = 2_D^3 \otimes 3_D^2 = \frac{5}{4} \otimes \frac{5}{2} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{5}{2}-1}{2} = \frac{11}{8}$$

PROBLEMA 15 Se define:

$$(a*b)^2 = b*a \quad ; \quad a*b>0$$

Calcule: $A = 1*2+2*3+3*4+ \ldots + 99*100$

Resolución:

$$(a*b)^2 = b*a$$

$$\boxed{b*a = (a*b)^2} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

$$a*b = (b*a)^2$$

Reemplazando en (α):

$$b*a = [(b*a)^2]^2$$

$$b*a = (b*a)^4$$

$$1^3 = (b*a)^3$$

$$\boxed{1 = b*a}$$ Esta regla de definición muestra que para cualquier valor de a y b el resultado será 1 (constante)

$$\therefore \quad A = \underbrace{1*2}_{1} + \underbrace{2*3}_{1} + \underbrace{3*4}_{1} + \ldots + \underbrace{99*100}_{1} = 99(1) = 99$$

PROBLEMA 16 Se define:

$$x*y^2 = 2(y*x^2) - x^y \quad ; \quad \forall\ x, y > 0$$

Calcule: $2*16$

Resolución:

$$x*y^2 = 2(y*x^2) - x^y \quad \ldots\ldots\ldots.(\alpha)$$

$$y*x^2 = 2(x*y^2) - y^x$$

Reemplazando en (α):

$$x*y^2 = 2\left[2(x*y^2) - y^x\right] - x^y$$

$$x*y^2 = 4(x*y^2) - 2y^x - x^y$$

$$x^y + 2y^x = 3(x*y^2)$$

$$\boxed{x*y^2 = \frac{x^y + 2y^x}{3}}$$

$$2*16 = \underset{x}{2} * \underset{y}{4}^2 = \frac{2^4 + 2\ .\ 4^2}{3} = \frac{48}{3}$$

$$\therefore \quad 2*16 = 16$$

PROBLEMA 17 Se define en B = {1; 2; 3; 4} la operación representada por ▲, mediante la siguiente tabla:

▲	2	3	4	1
1	2	3	4	1
4	1	2	3	4
3	4	1	2	3
2	3	4	1	2

Calcule : $\left[(1^{-1} \blacktriangle 2^{-1})(4^{-1} \blacktriangle 3^{-1})^{-1}\right]^{-1}$

a^{-1} es el elemento inverso de a.

Resolución: Ubicamos el elemento neutro y lo encerramos en el cuerpo de la tabla:

▲	2	3	4	1
1	2	3	4	①
4	①	2	3	4
3	4	①	2	3
2	3	4	①	2

Para calcular los elementos inversos pedidos procedemos de la siguiente manera:

▲	2	3	4	1
1	2	3	4	①
4	①	2	3	4
3	4	①	2	3
2	3	4	①	2

$1^{-1} = 1$
$4^{-1} = 2$
$3^{-1} = 3$
$2^{-1} = 4$

Reemplazando : $\left[\underbrace{(1 \blacktriangle 4)}^{-1} \blacktriangle \underbrace{(2 \blacktriangle 3)}^{-1}\right]^{-1}$

$\left[\underbrace{(4)^{-1}} \blacktriangle \underbrace{(4)^{-1}}\right]^{-1}$

$\left[\underbrace{2 \blacktriangle 2}\right]^{-1}$

$3^{-1} = 3$

PROBLEMA 18 Se define en ℕ la operación (∗)

$$a * \frac{b}{2} = 2a + b + 3$$

Marcar (V) o (F):

I. La operación es cerrada en ℕ
II. La operación es conmutativa
III. Su elemento neutro es 3

Resolución: Los elementos principales deben tener la forma convencional es decir:

$$a * \frac{b}{2} = 2a + b + 3 \quad (\times 2)$$

$$\boxed{m * n = 2m + 2n + 3}$$

I.

$$\underset{\mathbb{N}}{m} * \underset{\mathbb{N}}{n} = \underbrace{\underset{\mathbb{N}}{2m} + \underset{\mathbb{N}}{2n} + \underset{\mathbb{N}}{3}}_{\mathbb{N}+\mathbb{N}+\mathbb{N} \to \mathbb{N}}$$, si es cerrada en ℕ.

II.

$$m * n = n * m$$

$$2m + 2n + 3 = 2n + 2m + 3$$; Son iguales ambos resultados por tanto es conmutativa.

III.

$$\underbrace{m * e}_{} = m$$

$$2m + 2e + 3 = m \rightarrow e = \frac{-m-3}{2}$$ (no deben haber variables) ∴ No hay e

∴ VVF

PROBLEMA 19 En el conjunto ℤ se define la operación (∗) con elemento neutro (identidad) 17. Qué valor puede tomar n (entero)

$$17 * [n^2 + n(n-1)] = 153$$

Resolución: Como 17 es neutro: $17 * [n^2 + n(n-1)] = n^2 + n(n-1)$

Pero por dato el resultado es 153; igualando:

$$n^2 + n(n-1) = 153$$

$$2n^2 - n - 153 = 0$$

$$\begin{matrix} n & -9 \\ 2n & +17 \end{matrix} \quad \begin{cases} n = 9 \ ✓ \\ n = -\dfrac{17}{2} \ ✗ \end{cases}$$

PROBLEMA 20 Se define en $A = \{1, 2, 3, 4\}$ la operación (#).

#	1	2	3	4
2	1	2	3	4
1	4	1	2	3
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

Marcar verdadero (V) o falso (F):

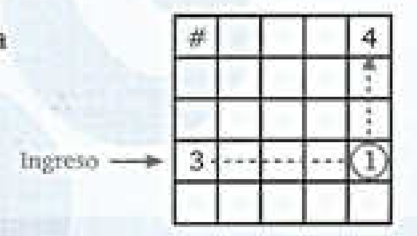
I. Es cerrada en A
II. Su elemento neutro es 2
III. El inverso de 3 es 1
IV. Es conmutativa

Resolución:

I. Para verificar si es cerrada debe cumplirse la propiedades clausurativa, viendo que todos los elementos de la tabla pertenezcan al conjunto A. Por lo tanto ésta premisa es (V)

II. Se sabe que el elemento neutro está en la intersección de una fila y una columna principal por lo tanto e = 1. Ésta afirmación es (F)

III. El elemento inverso de 3 es 4. La premisa es (F).

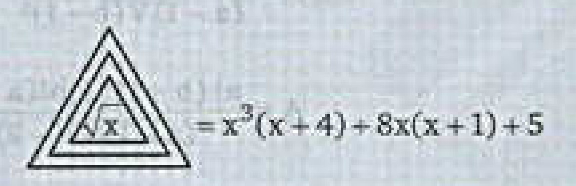


IV. Ordenando la tabla se observa que es simétrica por tanto es conmutativa. La premisa es (V)

#	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

∴ VFFV

PROBLEMA 21 Si:



Hallar: $\triangle 3$

Resolución: Desarrollando: $(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4) + 1$

Factorizando conveniente los términos entre paréntesis:

$$(x^2 + 2x + 2)^2 + 1 = ((x+1)^2 + 1)^2 + 1 = ((\sqrt{x}^{\,2} + 1)^2 + 1)^2 + 1$$

Entonces: $\underbrace{f(x)} = x^2 + 1$

$\triangle x = x^2 + 1$

Piden: $\triangle 3 = 3^2 + 1 = 10$

PROBLEMA 22 Hallar el valor de: $6^{\#}\Delta(3^{\#}+2^{\#})$ donde:

$$x^{\#}=x^2-x \text{ y } m\Delta n=3m-10n+20$$

Resolución:

$$x^{\#}=x^2-x\ ;\ m\Delta n=3m-10n+20$$

$$A=6^{\#}\Delta(3^{\#}+2^{\#})$$

$$6^{\#}=6^2-6=30$$

$$3^{\#}=3^2-3=6$$

$$2^{\#}=2^2-2=2$$

$$A=30\,\Delta\,8$$

$$A=3(30)-10(8)+20$$

$$\therefore\quad A=30$$

PROBLEMA 23 Si "∇" es un operador que transforma a y b según la regla: $a\nabla b=a!\,(b-1)!$

Calcular: $\dfrac{a\nabla b+b\nabla a}{(a-1)\nabla(b-1)!}$

Resolución:

$$a\nabla b=a!\,(b-1)!$$

$$A=\frac{a\nabla b+b\nabla a}{(a-1)\nabla(b-1)!}$$

$$A=\frac{a!\,(b-1)!+b!(a-1)!}{(a-1)!\,(b-2)!}$$

$$A=\frac{a(a-1)!\,(b-1)!+b(b-1)!(a-1)!}{(a-1)!\,(b-2)!}$$

$$A=\frac{(a-1)!\ \ (b-1)!\,(a+b)}{(a-1)!\,(b-2)!}$$

$$A=\frac{(b-1)!\,(a+b)}{(b-2)!}$$

$$A=\frac{(b-1)(b-2)!\,(a+b)}{(b-2)!}$$

$$\therefore\quad A=(b-1)(a+b)$$

CALA
PNHO
ESKO

PROBLEMA 24 Si:

$$a \otimes b = a^2 - b^2$$

$$a \oplus b = \log_2 (a - b)$$

Hallar: $(5 \otimes 3)^{(3a^2 \oplus 2a^2)}$

Resolución:

$$a \otimes b = a^2 - b^2$$

$$a \oplus b = \log_2 (a - b)$$

$$A = (5 \otimes 3)^{(3a^2 \oplus 2a^2)}$$

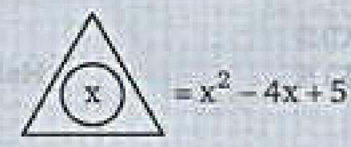
$$5 \otimes 3 = 5^2 - 3^2 = 16$$

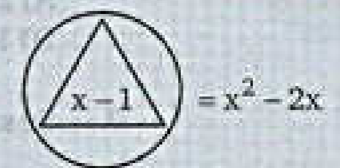
$$3a^2 \oplus 2a^2 = \log_2(3a^2 - 2a^2) = \log_2 a^2$$

$$A = 16^{\log_2 a^2} = (a^2)^{\log_2 16}$$

$$\therefore \ A = (a^2)^4 = a^8$$

PROBLEMA 25 Calcule $\triangle 5$ + $\bigcirc 5$, si las operaciones se definen en R:





Resolución: Suponemos que el operador △ es cuadrático y el operador ○ es lineal, reemplazando obtenemos una igualdad de polinomios:

Entonces se tiene:

$\triangle x = x^2 + 1$	$\bigcirc x = x - 2$
$\triangle 5 = 26$	$\bigcirc 5 = 3$

Piden : $26 + 3 = 29$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si:

$$\textcircled{x} = \begin{cases} x-1 \ ; \ x \text{ primo} \\ x+2 \ ; \ x \text{ no primo} \end{cases}$$

$$\triangle\!\left(\textcircled{x}\right) = 4x+2$$

Hallar: $\triangle 8 + \triangle 4$

A) 40 B) 12 C) 48
D) 50 E) 46

2. Se define:

$$\boxed{x+3} = x^2(1-3x) + (1+3x^2)x$$

$x > 0$

Calcular "n": $\boxed{\boxed{\boxed{n}}} = 90$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Se define:

$$\textcircled{\sqrt{x}+1} = 3x+2$$

Calcular el valor de: $\textcircled{3}$

A) 14 B) 12 C) 28
D) 10 E) 18

4. Se define:

$$a * b = \begin{cases} (a^{-b})(-b^{-a}) \ ; \ a < b \\ (a^{-a})(-b^{-b}) \ ; \ a \geq b \end{cases}$$

Hallar: $(2 * -2) - (-2 * 2)$

A) 0 B) 2 C) 4
D) 8 E) 10

5. Si:

$$\boxed{a * b} = a+b \ ; \ a < b$$

$$\triangle(a * b) = a-b \ ; \ a \geq b$$

Además: $\boxed{x+1} = x-1$

$$\triangle(x+1) = x+1$$

Hallar: $\triangle(3 * 4) * \triangle(5 * 2)$

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

6. Si:

$$\boxed{n}\, n = \boxed{n+2}$$

$$\boxed{2} = 2$$

Hallar:

$$\frac{\boxed{18}}{8!}$$

A) 29 B) 28 C) 2
D) 1 E) 27

7. Se sabe que:

$$m * n = m^2 - n^2$$

Halle la suma de los elementos del conjunto solución de:

$$x * 3 = 3x + 1$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

8. Si:

$$a \triangle b = b \square a = 2(a \square b) + b + a$$

Hallar: $(10 \triangle 10) + (10 \square 10)$

A) 20 B) –20 C) –40
D) 40 E) –60

9. Si:

$$a \,\Delta\, b = \frac{a^2+b^2}{a-b} \;;\; a > b$$

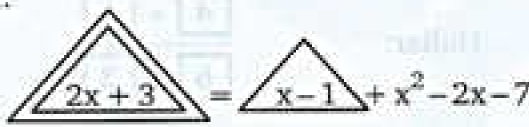
$$a \,\Delta\, b = \frac{a^2+b^2}{a+b} \;;\; a \le b$$

Además: $m \,\Delta\, n = \frac{4}{7}$ y $n \,\Delta\, m = \frac{5}{3}$

Halle: $\frac{m}{n}$ sabiendo que $m < n$

A) $\frac{21}{29}$ B) $\frac{23}{47}$ C) $\frac{25}{29}$
D) $\frac{13}{19}$ E) $\frac{23}{26}$

10. Si:



$$\triangle\!\!\triangle(2x+3) = \triangle(x-1) + x^2-2x-7$$

Calcule: $\triangle(3)$ sabiendo que:

$$\triangle(-5) = 3$$

A) 15 B) 18 C) 24
D) 10 E) 16

11. Si:

$$\bigcirc(2x) = \triangle(x) + x - 1$$

$$\triangle(x-1) = 2\,\bigcirc(x+5) - x + 3$$

Calcule: $\bigcirc(12)$

A) 1 B) 0 C) –1
D) 2 E) –2

12. Si:

$$\sqrt{a^3} * \sqrt[3]{b^2} = \frac{2a}{3} + \frac{3b}{2}$$

Calcule: $27 * 4$

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

13. Si:

$$\boxed{x} = x^2 + 2x + \triangle(x)$$

$$\triangle(x+1) = (1+2+4+\ldots+2^{x-1}) + x$$

$$\bigcirc(x-1) = 2x+1$$

Hallar: $\boxed{\boxed{1}+4}$

A) 654 B) 652 C) 675
D) 225 E) 700

14. Se define en $\mathbb{Z}^+$

$$\bigcirc(x) = x^2 - x$$

Hallar: n

$$\circledcirc(2n-17) = 380$$

A) 1 B) 10 C) 11
D) 20 E) 15

15. Si:

$$\boxed{m^m * n^n} = \boxed{n \,\Delta\, m}$$

$$\bigcirc(x^y \,\Delta\, y^x) = \bigcirc(2x+y)$$

Calcule: $E = (4 * 1) + 3^{18} * 2^{24}$

A) 9 B) 10 C) 11
D) 15 E) 21

16. Si:

$$p * q = 4\,p^{p^{p^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} - 10n$$

Siendo n el primer número compuesto impar. Halle:

$$1 \,\Delta\, [2 \,\Delta\, (3 \,\Delta\, (4 \,\Delta\, \ldots))]$$

A) –6 B) –26 C) –46
D) –66 E) –86

17. Si:

$$\boxed{\sqrt{a}} = 5\sqrt{a}\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \quad ; \ a \neq 0$$

Hallar: $\boxed{x^2}$

A) 5 B) 0 C) $\sqrt{5}$

D) 1 E) 10

18. Si:

$$2 * 3 = 13$$
$$7 * 1 = 17$$
$$10 * 10 = 50$$

Hallar:

$$1 * 1$$

A) 2 B) 15 C) 5

D) 10 E) 6

19. Si:

$$23 * 12 = 44$$
$$31 * 10 = 32$$
$$\overline{2x} * 12 = 45$$

Hallar:

$$\overline{x2} * \overline{3x}$$

A) 85 B) 76 C) 95

D) 75 E) 65

20. Si:

$$18 * 23 = 14$$
$$37 * 24 = 16$$
$$12 * 23 = 35$$

Hallar: $x + y$

$$23 * 12 = xy$$

A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 5

21. Se define en $\mathbb{R}$

$= a^2x + 3a + 1$

$\boxed{x} = ax + 1$

Hallar: $\bigcirc\!\!\!\!\!\!\left(-\frac{1}{2}\right)$

A) 1 B) 2 C) 0

D) 3 E) 5

22. Si:

$$\boxed{x+3} = \boxed{x} + \boxed{3-x}$$

Hallar: $\dfrac{\boxed{4} \times \boxed{5}}{\boxed{6} \times \boxed{3}}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 0 E) 4

23. Si:

$$\underbrace{\ldots\boxed{\boxed{\boxed{a}}}\ldots}_{10} = 1024a + 1023$$

Hallar: $\boxed{2} + \boxed{\boxed{2}} + \boxed{\boxed{\boxed{2}}}$

A) 36 B) 39 C) 40

D) 41 E) 43

24. Si:

$$\boxed{a * b} = 5a \ ; \quad a * b > 0$$

$$\boxed{a+1} = a^2 + 19$$

Calcular: $20 * 77$

A) 8 B) 10 C) 12

D) 13 E) 14

25. Si:

$$f(x^3-1)=x+5$$

Calcular: n

$$f(f(f(f\ldots f(7))))=f(f(n)+1)$$

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) $\sqrt{2}$

26. Si.

$$a*b=a+b-4$$

siendo: a^{-1} elemento inverso. Hallar: x

$$x^{-1}*4^{-1}=2^{-1}*6^{-1}$$

A) 3 B) 4 C) 1
D) 0 E) 5

27. Si:

$$\boxed{a}=\frac{2^a+3^a}{6^a}$$

Hallar: $\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4}+\ldots\ldots$

A) 1,5 B) 2 C) 3
D) 1 E) 0

28. Se define la operación (*) mediante la siguiente tabla:

*	2	4	6	8
2	6	2	8	4
4	2	4	6	8
6	8	6	4	2
8	4	8	2	6

Calcule:

$$M=\frac{2*6+8*8+4*2}{8*2+4*4}$$

A) 2 B) 4 C) 1
D) 8 E) 6

29. Si:

$$x_z=z^2(z-6)+4(3z-2)$$

Hallar: A

$$A=\underbrace{x_{(\sqrt[3]{2}+2)}+x_{(\sqrt[3]{4}+2)}+\ldots+x_{(\sqrt[3]{6}+2)\ldots}}_{\text{n términos}}$$

A) n(n + 1) B) n^2 C) n^2+1
D) $2n^2-1$ E) 1(n − 1)

30. Se define en A = {a, b, c, d} la operación * mediante la siguiente tabla:

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	b	c	d	a
c	a	b	c	d
d	d	a	b	c

Si: $(b*c)*x)*a=d$

Calcule: $M=\{(a*x)*(c*d)*x$

A) a B) b C) c
D) d E) e

31. Dada la tabla adjunta definida por el operador asterisco (*)

*	2	5	8
2	8	5	2
5	5	2	8
8	3	8	5

Halle:

$$E=\frac{(2*5)+(8*2)}{(8*5)*2+(5*2)}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

32. Se define en R

$$a * b = 2a\sqrt{b * a} \quad ; a * b > 0$$

Calcule: $M = 1 * 27$

A) 24 B) 25 C) 26
D) 36 E) 37

33. Se define:

$$\triangle x = 2(x^2 - 1);$$

$$\triangle x * y = (x-y)^{(x+y)}$$

Calcule $a^2 + b^2$; sabiendo que:

$$\triangle a * \triangle b = 3$$

A) 1 B) 3 C) 4
D) 8 E) 9

34. Si:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Halle el mayor número que satisfaga la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

A) –1 B) –2 C) 0
D) 1 E) 2

35. Si:

$$\text{(x)} = ax^2 + b$$

$$\text{((x))} = 27x^2 + 36x^2 + 14$$

Calcule: $M = \text{(4)} + \text{(5)}$

A) 77 B) 50 C) 121
D) 135 E) 127

36. Si:

$$x @ y = x^{y@x} \cdot \sqrt{y}$$

Halle: $1 @ 9$

A) 1 B) 7 C) 3
D) 5 E) 4

37. Se define la operación en "W"

$$\text{(x + 1)} = x^2 - 6x + 9$$

Halle el valor de z en:

$$\text{(((2z + 1)))} = 441$$

A) 3 B) 1 C) 4
D) 2 E) 5

38. Se define $*$ en A = {m, n, p, q, r} mediante la siguiente tabla:

*	m	n	p	q	r
m	p	q	m	n	r
n	q	p	n	r	m
p	m	n	p	q	r
q	n	r	q	p	m
r	r	m	r	m	p

¿Cuál o cuáles de los siguientes enunciados es verdadero?

( ) $[m * (x * q) * p = p$; si $x = m$
( ) Se cumple la propiedad conmutativa
( ) Se cumple la propiedad clausura
( ) El elemento neutro es m

A) VFVV B) FVFV C) FFFV
D) FVVF E) VVVF

39. Se define $*$ en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ mediante la tabla siguiente:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	d	a	b	c	c

Dadas las ecuaciones:

$$x * y = b$$
$$y * z = a$$
$$x * z = d$$

Halle: $[(x * d)(y * e)(z * c)]$

A) a B) b C) c
D) d E) e

40. Se define en $A = \{1, 2, 3, 4\}$

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Calcular: "x"

$$[(2^{-1} * 3)^{-1} * x^{-1}] * [(4^{-1} * 2) * 3]^{-1} * 1$$

A) 3 B) 2^{-1} C) 2
D) 1 E) 4

41. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la operación $(*)$ con elemento identidad 7. ¿Qué valores puede tomar x?

$$7 * (x-6)(x-2) = 21$$

A) 9 y –1 B) 8 y –2 C) 7 y –1
D) 8 y –3 E) 6 y –2

42. Se define en $\mathbb{N}$

$$a * \frac{b}{2} = 2a + b + 3$$

Marcar verdadero o falso:

I. La operación es cerrada
II. La operación es conmutativa
III. Su elemento neutro es –3
IV. El inverso de 2 es $\frac{1}{2}$ en dicha operación

A) VVFF B) VFVF C) FFVV
D) FVVF E) VVVV

43. Se define en $\mathbb{R} - \{1\}$

$$m \Delta n = m + n + mn$$

Marque verdadero o falso:

I. La operación es clausurativa
II. La operación no es cerrada
III. La operación es conmutativa
IV. La operación es asociativa
V. Su elemento neutro es 1
VI. $2^{-1} \Delta 3^{-1} = \frac{10}{3}$ (a^{-1} elemento inverso)

A) FVFVVV B) FVFVFV C) FFFVVV
D) FVVFFF E) FVVVFF

44. Se define en $\mathbb{Z}^*$

$$x \# y = 2(x + y) + 2$$

I. Es cerrado la operación
II. No es asociativa
III. Su elemento neutro es $\frac{1}{2}$
IV. No existe elemento inverso

A) FFVV B) FVFV C) FFFV
D) VVVF E) VVVV

45. Se define en A = {–1; 0; 1}

Todas las operaciones que se van a mencionar. Diga cuáles de las proposiciones son ciertas.

I. La adición es interna
II. La multiplicación no es cerrada
III. La sustracción no ex externa
IV. La división es cerrada
V. La potenciación es externa

A) FFFFV B) FVFVF C) FFFVV
D) VVFFF E) VFVFF

46. Se sabe que la operación (#) es conmutativa y que posee elementos regulares.

$(3 * 5) * (x^2 + 2x - 3) = (2x - 7)(x - 1) * (5 * 3)$

Dar como respuesta el mayor valor de x.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

47. Se define la operación (♥)

a ♥ b = k

Donde k es la suma del inverso aditivo de la primera componente con el inverso multiplicativo de la segunda componente. Hallar n Δ n si además:

n ♥ n = 1

$x \Delta y = 2x - y^3 + 3$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

48. Se define en: A = {a, b, c, d}

*	a	c	b	d
b	b	d	a	c
a	a	c	b	d
c	c	a	d	b
d	d	b	c	a

I. Hallar x:

$[(x * a) * b] * c = d * d$

II. Es clausurativa la operación
III. Tiene elemento neutro.
IV. $a^{-1} * b^{-1} = c$
V. Es conmutativa

A) d; VVFV B) e; VFVF C) a; FFVF
D) b; FVFF E) c; VVVF

49. Se define en A = {1; 2; 3; 4}

Δ	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

Hallar x:

$[(2^{-1} \Delta 3^{-1}) \Delta 4] \Delta 1^{-1} = x^{-1} \Delta 2$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

50. [x] tiene como regla de definición un polinomio lineal.

[3] = 10

2[4] = [6] + 7

Hallar: [0]

A) 1 B) 2 C) 3
D) –1 E) 0

team CALAPENSHKO

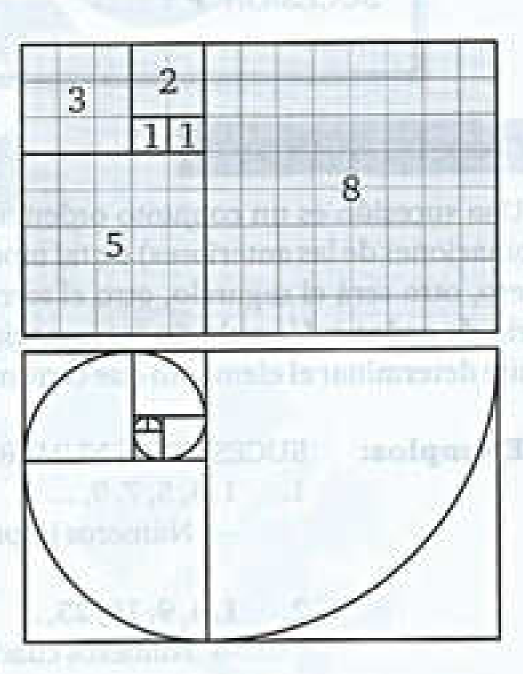
Sucesiones

CAPACIDADES

- Reconocer los tipos más importantes de sucesiones.
- Relacionar un término con su respectivo orden.
- Saber calcular el t_n (término enésimo) de una sucesión.
- Dotar al estudiante de conocimientos que le ayuden a entender más adelante el concepto de series.

Espiral de Fibonacci

Asociada a la serie está el espiral de Fibonacci, que se construye siguiendo la serie y conectando las esquinas opuestas de los cuadrados cuyos lados tienen medidas iguales a los elementos de la serie de Fibonacci.



INTRODUCCIÓN

El primero de junio obtuve mi primer sueldo al trabajar en una fábrica de galletas, luego de hacer un cálculo sencillo noté que ni sueldo equivalía al valor de 200 galletas; sabía también que el sueldo de un ayudante era el doble de mi sueldo y el de un capataz el doble de la de un ayudante, el sueldo de un ingeniero era una vez más que la de un capataz y del gerente duplo del ingeniero. Me preguntaba: ¿cuántas galletas le correspondería a un gerente si cada paquete contiene 8 galletas?

Esto nos da la idea de que cada número está relacionado a otro (en el ejemplo el nivel del empleado con lo que recibe de sueldo) y de ese modo hay números que están formados por una relación de orden y a veces una ley de formación.

U na sucesión nos lleva al cálculo de un término lejano o al análisis de características específicas en los términos de una sucesión; todo ello desarrollaremos en el presente capítulo.

SUCESIÓN DE FIBONACCI: $1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ \ldots$

SUCESIÓN DE LUCAS: $1;\ 3;\ 4;\ 7;\ 11;\ \ldots$

SUCESIÓN DE M. FINBERG O TRIBONACCI: $1;\ 1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 13;\ \ldots$

SUCESIÓN ARMÓNICA: $\frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{11};\ \ldots$

SUCESIÓN DE MORGAN: $4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 100;\ \ldots$

SUCESIÓN DE CAUCHY:
- $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots$
- $2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \ldots$

SUCESIÓN "P": $\frac{1}{1^p};\ \frac{1}{2^p};\ \frac{1}{3^p};\ \frac{1}{4^p};\ \frac{1}{5^p};\ \ldots$

NOCIÓN DE SUCESIÓN

Una sucesión es un conjunto ordenado de elementos (que pueden ser números, letras, figuras o combinaciones de las anteriores) de tal modo que cada elemento ocupa un lugar establecido; uno será el primero, otro será el segundo, otro el tercero, y así sucesivamente; acorde con una ley de formación, criterio de orden o fórmula de recurrencia. En toda sucesión debe existir una **ley de formación** que permita determinar el elemento que continúa. A los elementos de la sucesión se les denomina **términos**.

Ejemplos: SUCESIONES NUMÉRICAS:

1. 1, 3, 5, 7, 9, ...
   → Números impares

2. 1, 4, 9, 16, 25, ...
   → Números cuadrados.

SECUENCIAS LITERALES

3. E, F, M, A, M, ...
   → Iniciales de los meses del año.

4. A, C, E, G, I, ...
   → El alfabeto, obviando una letra.

SECUENCIAS GRÁFICAS

5. , , , , ...
   → El círculo se desplaza en sentido horario.

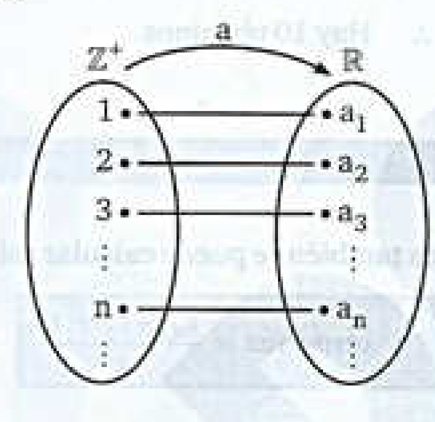
En esta oportunidad estudiaremos sólo las sucesiones numéricas.

SUCESIÓN NUMÉRICA

DEFINICIÓN

Una sucesión es aquella función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) y su rango es un subconjunto del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).
Consensuadamente a_n representa al término que ocupa la posición n en una sucesión.

En un diagrama conjuntista tenemos:



$$a = \{(1; a_1), (2; a_2), (3; a_3), \dots, (n; a_n), \dots\}$$

Formalmente tenemos la sucesión $a = \{(n; a_n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ cuyo conjunto de imágenes es $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ un objetivo principal del estudio de las sucesiones es el análisis de sus imágenes, razón por la cual consensuadamente podemos denotar a la sucesión solo por su conjunto imagen.

$$\{a_n\}_{n\geq 1} = \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

1. SUCESIÓN O PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

También se le conoce como sucesión lineal o de 1er orden.

$$\underset{+r}{t_1, \; t_2}, \underset{+r}{\; t_3}, \dots, t_n \quad \rightarrow \text{razón aritmética}$$

NOTA "S"

Puede recordar esta fórmula como:
t_n = renato

Su término enésimo tiene la forma:

$$t_n = r \, . \, n + t_0$$

r: razón aritmética
t_0: anterior al primero

Ejemplo: Hallar el término enésimo y el número de términos de cada P.A:

a) 12, 17, 22, 27, ..., 57

b) 3, 7, 11, 15, ..., 59

c) 86, 83, 80, 77, ..., 29

Resolución: a) $12, 17, 22, 27, \ldots, 57$

+5 +5 +5 → $r = 5$

$$t_n = 5n + 7$$

Para hallar el número de términos, igualamos el t_n al último término, así:

$$5n + 7 = 57$$
$$n = 10$$

∴ Hay 10 términos

OBSERVACIONES

En una P.A. el número de términos también se puede calcular así:

$$N^{\circ}\ \text{términos} = \frac{t_n - t_1 + r}{r} \quad (\ ) \quad \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

Donde:
- t_n : Último término
- t_1 : Primer término
- r : Razón

Ejemplo: $12, 17, 22, \ldots, 57$ (5, 5)

$$N^{\circ}\ \text{de términos} = \frac{57 - 12 + 5}{5}$$

$$N^{\circ}\ \text{de términos} = 10$$

b) $3, 7, 11, 15, \ldots, 59$

+4 +4 +4 → $r = 4$

$$t_n = 3 + 4(n - 1)$$

$$t_n = 4n - 1$$

Luego igualamos t_n al último:

$$4n - 1 = 59$$
$$n = 15$$

∴ Hay 15 términos

c) $86, 83, 80, 77, \ldots, 29$

$-3 \quad -3 \quad \rightarrow r = -3$

$$t_n = -3n + 89$$

$$\boxed{t_n = -3n + 89}$$

Luego igualamos al último:

$$-3n + 89 = 29$$
$$n = 20$$

$\therefore$ Hay 20 términos

NOTA "S"

Una forma practica de hallar el término general es realizando lo siguiente:

a) $3, 7, 11, 15, \ldots, 99$

$-1 \quad +4 \quad +4 \quad +4$

$t_n = +4n - 1$

b) $86, 83, 80, 77, \ldots, 29$

$+89 \quad -3 \quad -3 \quad -3$

$t_n = -3n + 89$

2. SUCESIÓN CUADRÁTICA O DE SEGUNDO ORDEN

$c \rightarrow t_0 \quad t_1, \ t_2, \ t_3, \ t_4, \ \ldots, \ t_n$

$a + b \rightarrow m_0 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3$

$2a \rightarrow r \quad r \quad r$

NOTA "S"

t_0: término anterior al primer término

Su término enésimo es de la forma:

$$\boxed{t_n = an^2 + bn + c}$$

donde a, b y c son valores constantes, los cuales podemos determinar mediante la siguiente regla práctica:

$$\boxed{a = \frac{r}{2}} \qquad \boxed{b = m_0 - a} \qquad \boxed{c = t_0}$$

Ejemplo: Hallar el término enésimo y el número de términos.

$$6,\ 11,\ 18,\ 27,\ 38,\ \ldots,\ 402$$

Resolución: 1ra Forma

c → +3, 6, 11, 18, 27, 38, ..., 402

a + b → +3, +5, +7, +9, +11

2a → +2, +2, +2, +2

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 3$

$$\rightarrow \boxed{t_n = n^2 + 2n + c}$$

2da Forma

lo → 3, 6, 11, 18, 27, 38, ..., 402

ra → +3, 5, 7, 9, 11

mi → +2, +2, +2, +2

NEMOTECNIA:
MI: Mitad
RA: restale a
LO: lo mismo

$$\rightarrow \boxed{t_n = an^2 + bn + c}$$

$a = \dfrac{2}{2} = 1 \qquad b = +3 - 1 = 2 \qquad c = 6 - (3) = 3$

$$\boxed{t_n = 1 \cdot n^2 + 2n + 3}$$

Luego, para hallar el número de términos, igualamos el t_n con el último término, de la sucesión así:

$$n^2 + 2n + 3 = 402$$

$$n^2 + 2n - 399 = 0$$

$n \quad -19 \rightarrow n = 19$

$n \quad +21 \rightarrow n = -21$

$\therefore$ Hay 19 términos

Ejemplo: Hallar el término t_{20}, de la siguiente sucesión:

$$4,\ 10,\ 20,\ 34,\ 52,\ \ldots$$

Resolución:

lo → 2 \ 4, 10, 20, 34, 52, ...
ra → 2 \ 6, 10, 14, 18
mi → 4 \ 4, 4, 4

$$t_n = an^2 + bn + c$$

$$a = \frac{4}{2} = 2 \qquad b = 2 - 2 = 0 \qquad c = 2$$

$$\boxed{t_n = 2n^2 + 2}$$

Luego nos piden: $t_{20} = 2(20)^2 + 2$

$$\therefore \quad t_{20} = 802$$

3. SUCESIÓN O PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

Su término enésimo tiene la forma:

$$\boxed{t_n = t_1 \cdot q^{n-1}}$$

Donde: t_1 : Primer término
q : Razón geométrica
n: número de términos

Ejemplo: Hallar el término enésimo en cada sucesión:

a) 5, 10, 20, 40, ...

b) $40, 10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$

Resolución: a) 5, 10, 20, 40, ...
×2 ×2 ×2 → q = 2

$$\boxed{t_n = 5 \times 2^{n-1}}$$

La razón "q", se calcula dividiendo dos términos consecutivos así:

$$q = \frac{10}{5} = 2 \quad ó \quad q = \frac{20}{10} = 2$$

b) $40, 10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$
$\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{4}$ → $q = \frac{1}{4}$

$$\boxed{t_n = 40 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

Recuerda que la razón "q", se calcula dividiendo dos términos consecutivos así:

$$q = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad ó \quad q = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{4}$$

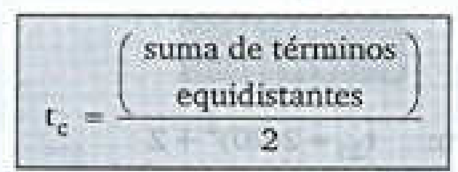
NOTA

1. Si $q > 1$ entonces la P.G. es creciente.
2. Si $0 < q < 1$ entonces la P.G. es decreciente.

PROPIEDADES

1° En una P.A. el término central (t_c) es igual a la semisuma de sus términos extremos, equidistantes o adyacentes a él.

Es decir:



$$t_c = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{suma de términos}\\ \text{equidistantes}\end{array}\right)}{2}$$

Ejemplo: Sea la P.A.: 8 , 11 , 14 , 17 , 20 (t_c = 14)

Entonces se cumple:

$$14 = \frac{8+20}{2} \quad y \quad 14 = \frac{11+17}{2}$$

2° En una P.G. el término central (t_c) es igual a la raiz cuadrada del producto de sus términos extremos, equidistantes o adyacentes a él.

Es decir

$$t_c = \sqrt{\left(\begin{array}{c}\text{Producto términos}\\ \text{equidistantes}\end{array}\right)}$$

$$\Rightarrow (t_c)^2 = \left(\begin{array}{c}\text{Productos de términos}\\ \text{equidistantes}\end{array}\right)$$

Ejemplo: Sea la P.G.: 3 , 6 , 12 , 24 , 48 (t_c = 12)

Entonces se cumple:

$$12 = \sqrt{6 \times 24} \rightarrow 12^2 = 6 \times 24$$

$$12 = \sqrt{3 \times 48} \rightarrow 12^2 = 3 \times 48$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. En la siguiente sucesión:

1, 7, 13, 19, ...

Calcule el término de lugar 30.

Rpta.: ....

2. Hallar el número de términos en la siguiente sucesión:

11, 19, 27, 35, ..., 323

Rpta.: ....

3. En la siguiente sucesión hallar el término de lugar 50.

1, 5, 9, 13, ...

Rpta.: ....

4. ¿Qué lugar ocupa el número 269 en la siguiente sucesión:

5, 16, 27, 38, ... ?

Rpta.: ....

5. En una progresión geométrica de términos positivos, los tres primeros términos son: 3; a; 48. Calcule el quinto término.

Rpta.: ....

6. Hallar el término enésimo de la siguiente sucesión:

1, 6, 11, 16, ...

Rpta.: ....

7. Hallar el término enésimo de la siguiente sucesión:

1; 3; 6; 10; ......

Rpta.: ....

8. Hallar X, si la siguiente sucesión tiene 50 términos:

2, 10, 18, 26, ..., X

Rpta.: ....

9. Hallar el término enésimo de la siguiente sucesión:

1, 6, 15, 28, ...

Rpta.: ....

10. ¿Cuál es el tercer término de la siguiente sucesión:

3; 6; 11; 18; 27

que termina en cifra 7?

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 En una progresión aritmética, el cuarto y noveno término son 6 y 21 respectivamente. Hallar la suma de cifras del vigésimo término.

Resolución: 1ra Forma

$$\begin{aligned} t_4 &= t_1 + 3r = 6 \\ t_9 &= t_1 + 8r = 21 \\ \hline 5r &= 15 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Entonces: $t_1 = -3$

Hallamos el: $t_{20} = t_1 + 19r$

$t_{20} = -3 + 57 = 54$

Piden: $5 + 4 = 9$

2da Forma

$$\begin{array}{l} \quad\; 4^{\circ} \ldots\ldots\ldots 9^{\circ} \ldots\ldots\ldots 20^{\circ} \\ \text{P.A} \rightarrow \ldots 6 \quad \ldots 21 \quad \ldots t_{20} = ? \end{array}$$

$+r \quad +r \qquad +r \quad +r$

$\underbrace{+(9-4)r}_{+5r} \qquad \underbrace{+(20-9)r}_{+11r}$

i) $6 + 5r = 21$

$r = 3$

ii) $21 + 11\,r = t_{20}$

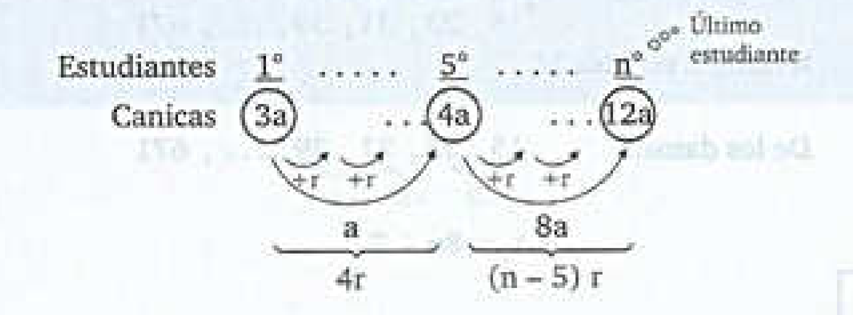
$21 + 11(3) = t_{20}$

$t_{20} = 54$

Nos piden: $5 + 4 = 9$

PROBLEMA 2 Se reparte cierta cantidad de canicas entre un grupo de estudiantes en cantidades que forman una progresión aritmética. Si el quinto estudiante recibió 1/3 de lo que recibió el último, y este el cuádruplo de lo que recibió el primero. Hallar el número de estudiantes.

Sean "n" estudiantes:



De las igualdades:

$$\div\left(\begin{array}{l} a = 4r \\ 8a = (n-5)r \end{array}\right)\div$$

$$\frac{1}{8} = \frac{4}{n-5}$$

$$n = 37$$

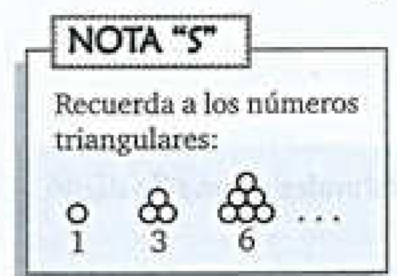
$\therefore$ Número de estudiantes 37.

PROBLEMA 3 Juan va a una tienda y compra un caramelo, el vendedor por esa compra le regala uno. En una segunda vez compra 3 caramelos y le regalan 2, en la tercera vez compra 6 y le regalan 3, en la cuarta vez compra 10 y le regalan 4 y así sucesivamente. ¿Cuántos caramelos recibirá en total cuando vaya a comprar por vigésima vez?

Resolución:

Número de veces que va a comprar ⇨	1°	2°	3°	4°	.....	20°
Caramelos que compra ⇨	1	3	6	10	.....	?
Caramelos que le regalan ⇨	1	2	3	4	.....	?

Al observar los caramelos que compra, nos damos cuenta que son los números triangulares.



Número de veces que va a comprar ⇨	1°	2°	3°	4°	.....	20°
Caramelos que compra ⇨	$1 = \frac{1\times2}{2}$	$3 = \frac{2\times3}{2}$	$6 = \frac{3\times4}{2}$	$10 = \frac{4\times5}{2}$	.....	$\frac{20\times21}{2} = 210$
Caramelos que le regalan ⇨	1	2	3	4	.....	20

TOTAL = 230

PROBLEMA 4 ¿Cuántos términos de la siguiente sucesión:

15, 23, 31, 39, ... , 671

terminan en cifra 3?

Resolución: De los datos: 15, 23, 31, 39, ... , 671 (+8, +8, +8)

$$t_n = 8n + 7$$

NOTA "S"

$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

Donde:

$$15 \leq 8n + 7 \leq 671$$

$$1 \leq n \leq 83$$

Si estamos buscando términos que terminen en cifra 3:

$$8n + 7 = \overline{\ldots 3}$$

$$8n = \overline{\ldots 6}$$

$$n = \underbrace{2, 7, 12, 17, \ldots, 82}_{\frac{82-2}{5}+1=17}$$

∴ Existen 17 términos que terminan en cifra 3.

PROBLEMA 5 ¿Cuántos términos de la siguiente sucesión:

4, 10, 16, 22, ...

tienen 3 cifras?

Resolución: 4, 10, 16, 22, ... (+6, +6, +6)

$$t_n = 6n - 2$$

Si buscamos términos de 3 cifras:

$$100 \leq 6n - 2 < 1000$$

$$102 \leq 6n < 1002$$

$$17 \leq n < 167$$

⇨ $n = \underbrace{17, 18, 19, \ldots, 167}_{167-17+1=150 \text{ valores}}$

∴ Existen 150 términos de 3 cifras

PROBLEMA 6 En la siguiente secuencia literal basada en los números naturales de un sólo dígito. Determine el término que continúa:

OCHO, DOS, UNO, OCHO, ...

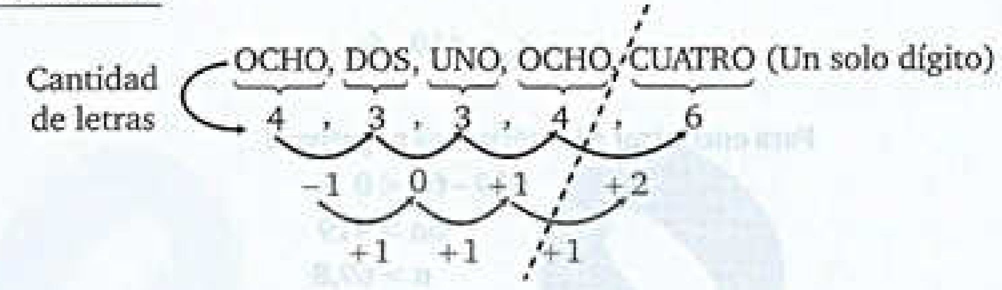
Resolución: 1era. Solución: OCHO, DOS, UNO, OCHO, ...

↓ 1, ↓ 2, ↓ 3, ↓ 4

Debe continuar: CINCO (Un solo dígito)

↓ 5

2da. Solución:



PROBLEMA 7 A continuación se muestran arreglos numéricos en forma de triángulo:

```
                                   1
                    1             1 1
          1        1 1           1 4 1
  1      1 1      1 4 1         1 4 4 1
 1 1    1 4 1    1 4 4 1      1 4 4 4 4 1 ...
 (1)     (2)       (3)            (4)
```

¿Cuál es la suma de los números en el arreglo número (25)?

Resolución:

NOTA "S"

Recuerda que también puede utilizar la nemotecnia "miralo"

```
                                   1
                    1             1 1
          1        1 1           1 4 1
  1      1 1      1 4 1         1 4 4 1
 1 1    1 4 1    1 4 4 1      1 4 4 4 4 1 ...
 (1)     (2)       (3)            (4)     ......   (25)
```

Suma de los números en cada arreglo ⇨ 3, 9, 19, 33, ?

Lo que tenemos que calcular es el vigésimo quinto término (t_{25}) de la sucesión formada por las sumas en cada arreglo.

c=1 c → 1, 3, 9, 19, 33, ... , t_{25} = ?

b=0 a+b → 2, 6, 10, 14

a=2 2a → 4, 4, 4

$$⇨ t_n = 2n^2 + 1$$

$$t_{25} = 2 \times 25^2 + 1$$

$$\therefore \ t_{25} = 1251$$

PROBLEMA 8 Halle el quinto término negativo de la siguiente sucesión:

$$413, 407, 401, 395, \ldots$$

Resolución: 1ra Forma

$$413, 407, 401, 395, \ldots$$
$$-6 \quad -6 \quad -6$$

$$t_n = 419 - 6n$$

Para encontrar a los términos negativos:

$$419 - 6n < 0$$
$$6n > 419$$
$$n > 69{,}8$$

$$n = 70, 71, 72, 73, 74, 75, \ldots$$

Si queremos el quinto término negativo, debemos tomar el quinto valor de n, es decir n = 74 el cual reemplazaremos en el t_n.

$$t_{74} = 419 - 6(74)$$

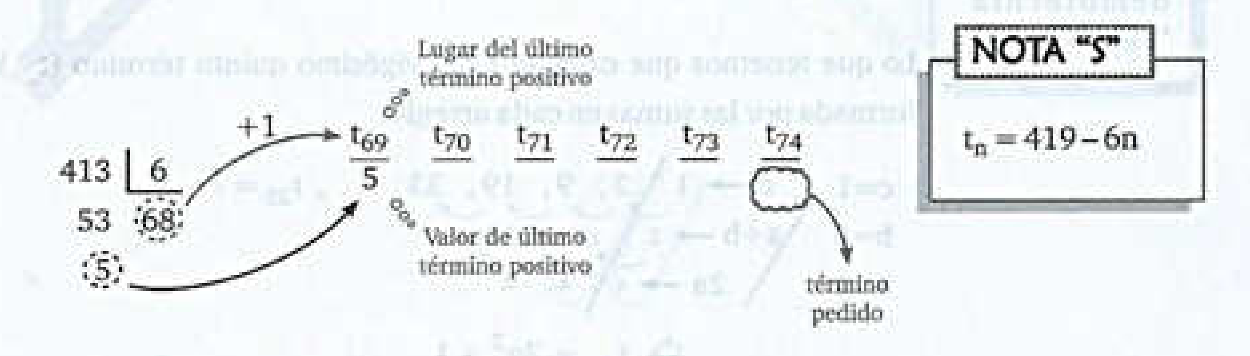
$$\therefore \; t_{74} = -25$$

2da Forma

Siendo: $|r| = r$

Se toma el primer término y se divide entre el valor absoluto de la razón.

Obteniendo:



Piden: $t_{74} = 419 - 6(74)$

$$\therefore \; t_{74} = -25$$

PROBLEMA 9 Durante varias tardes de un mes otoñal me senté a la sombra de un árbol. La primera tarde del árbol cayeron 15 hojas de las que recogí 1; la segunda tarde cayeron 29 de las que recogí 3; la tercera tarde cayeron 43 de las que recogí 7; la cuarta tarde cayeron 57 de las que recogí 13 y así sucesivamente, hasta que cierta tarde recogí todas las que cayeron. ¿Cuántas hojas cayeron esa tarde?

Resolución:

cierta tarde

	1°	2°	3°	4°	.....	n°
Hojas que cayeron	15	29	43	57	....	$t_n = 14n+1$

(diferencias: +14, +14, +14)

Hojas que recogí:

c → 1 | 1, 3, 7, 13 .... $t_n = ?$

a+b → 0 | 2, 4, 6

2a → 2 | 2, 2

a = 1
b = −1
c = 1

$$t_n = n^2 - n + 1$$

De acuerdo al dato: "cierta tarde recogí todas las que cayeron"

$$n^2 - n + 1 = 14n + 1$$
$$n^2 = 15n$$
$$n = 15$$

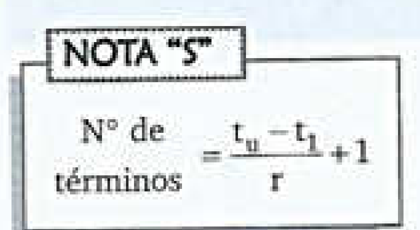
∴ Esa tarde cayeron:
$14n + 1 = 14(15) + 1 = 211$ hojas

PROBLEMA 10 La siguiente P.A. $\overline{aa1}, \ldots, \overline{5a4}$; tiene 32 términos y su razón es r. Halle (a + r)

Resolución:

$$\underbrace{\overline{aa1}, \ldots\ldots\ldots, \overline{5a4}}_{32 \text{ términos}}$$

(+r, +r)



$$\text{Número de términos} = \frac{\overline{5a4} - \overline{aa1}}{r} + 1 = 32$$

$$\overline{5a4} - \overline{aa1} + r = 32r$$

$$500 + 10a + 4 - (100a + 10a + 1) = 31r$$

$$\underbrace{503 - \underbrace{100a}_{...0}}_{...3} = 31r$$

$\Rightarrow\ 31r = \ldots 3$

$r = 3; 13; 23; \ldots$

Para $r = 3$: $503 - 100a = 31(3) \rightarrow 410 = 100a$

No hay valor entero para "a"

Para $r = 13$: $503 - 100a = 31(13)$

$100 = 100a \rightarrow a = 1$

$\therefore\ a + r = 1 + 13 = 14$

PROBLEMA 11 ¿Cuántos términos que son cuadrados perfectos tiene la siguiente sucesión?

$$18\times 10;\ 18\times 11;\ 18\times 12;\ \ldots;\ 18\times 1800$$

Resolución:

$$18\times 10;\ 18\times 11;\ 18\times 12;\ \ldots;\ 18\times 1800$$

$$t_n = 18n\ ;\ 10 \le n \le 1800 \ \ldots\ldots\ldots(1)$$

Si buscamos cuadrados perfectos:

$$18n = k^2$$

$$\underset{\downarrow\ 2.x^2}{3^2\times 2n} = k^2 \rightarrow n = 2x^2$$

En (1): $10 \le 2x^2 \le 1\,800$

$$5 \le x^2 \le 900$$

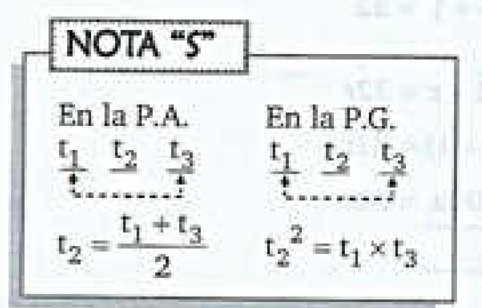
$$2{,}2 \le x \le 30$$

$$\Rightarrow\ x = \underbrace{3, 4, 5, \ldots, 30}_{30-3+1\,=\,28\ \text{valores}}$$

$\therefore$ Existen 28 cuadrados perfectos

PROBLEMA 12 En la pizarra hay escritos 4 números positivos: 8, a, b, 24. Si los tres primeros forman una progresión geométrica y los tres últimos forman una progresión aritmética, hallar (a + b)

Resolución:



$$\overbrace{8,\ \underbrace{a,\ b}_{}}^{\text{P.A.}},\ 24 \quad (\text{8, a, b: P.G.})$$

$$a^2 = 8b \ \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{a+24}{2} = b$$

En (1): $a^2 = 8\left(\frac{a+24}{2}\right)$

$$a^2 = 4a + 96$$

$$a^2 - 4a = 96$$

$$a(a-4) = 12 \times 8$$

$$a = 12$$

Reemplazando en (1): $b = 18$

$$\therefore \quad a + b = 12 + 18 = 30$$

PROBLEMA 13 ¿Cuántos términos comunes presentan las siguientes sucesiones?

- 16, 21, 26, 31, ...
- 7, 18, 29, 40, ..., 1096

Resolución:

16, 21, 26, 31, ..., 51, ...

(+5, +5, +5, +5)

7, 18, 19, 40, 51, ..., 1096

(+11, +11, +11, +11)

MCM(5; 11) = 55

esta será la nueva razón de los términos comunes

NOTA "S"

Paso 1: Se halla el 1er término común.
Paso 2: Se saca el MCM de las 2 razones.
Paso 3: Se forma una nueva sucesión de términos comunes.

Sucesión de términos comunes:

51, 106, 161, 216, ..., 1096

(+55, +55, +55)

Se coloca el último término mayor de una de las sucesiones

$$t_n = 55n - 4$$

$$1096 = 55n - 4$$

$$n = 20$$

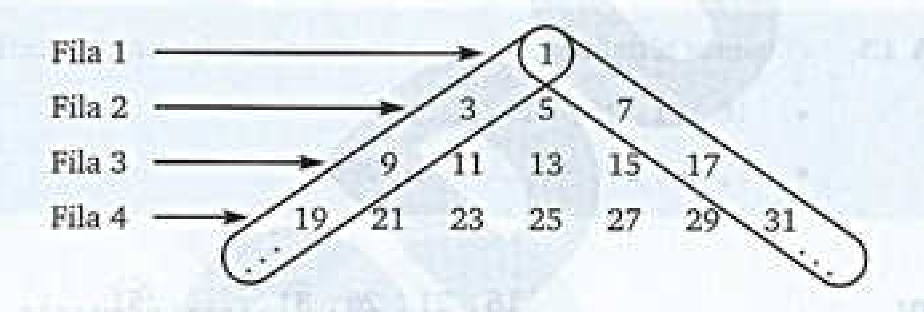
$\therefore$ El número de términos comunes es 20.

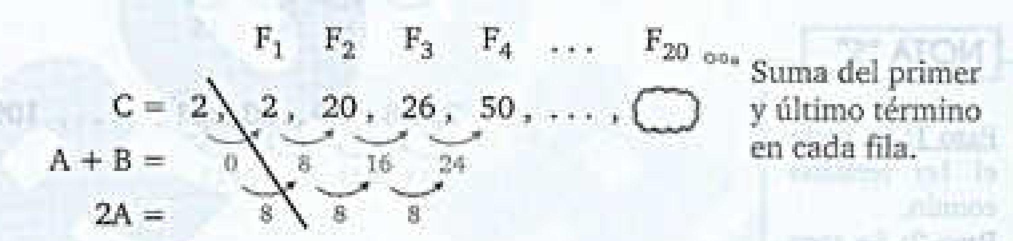
PROBLEMA 14 En el siguiente arreglo:

Fila 1 ⟶ 1
Fila 2 ⟶ 3 5 7
Fila 3 ⟶ 9 11 13 15 17
Fila 4 ⟶ 19 21 23 25 27 29 31
⋰ ⋱

Calcule la suma del primer y último término de la fila 20.

Resolución: En el arreglo triangular mostrad, resaltaremos el primer y último término:





$$\boxed{t_n = 4n^2 - 4n + 2}$$

Nos piden en la fila 20:

$$t_{20} = 4 \times 20^2 - 4 \times 20 + 2$$

$$\therefore\ t_{20} = 1522$$

PROBLEMA 15 Al tratar de calcular el término enésimo de una sucesión, un estudiante comete un error y obtiene tn = $4n^2 - 8n + 3$ que corresponde sólo a los términos de lugar impar. Otro estudiante, sobre la misma sucesión, comete otro error y obtiene $t_n = 4n^2 - 4n$ que corresponde sólo a los términos de lugar par. Calcule el término enésimo en dicha sucesión.

Resolución: El primero obtuvo: $t_n = 4n^2 - 8n + 3$

$$t_n = \{\underbrace{4(1)^2 - 8(1) + 3}_{-1};\ \underbrace{4(2)^2 - 8(2) + 3}_{3};\ \ldots\}$$

Pero estos números corresponden a los lugares impares.

El segundo obtuvo: $t_n = 4n^2 - 4n$

$$t_n = \{\underbrace{4(1)^2 - 4(1)}_{0};\ \underbrace{4(2)^2 - 4(2)}_{8};\ \ldots\}$$

Pero estos números corresponden a los lugares pares.

De acuerdo a esto, la sucesión es la siguiente:

$$-1,\ 0,\ 3,\ 8,\ \ldots$$

Ahora calcularemos su t_n:

$$-1,\ 0,\ 3,\ 8,\ \ldots$$
$$1 \quad 3 \quad 5$$
$$2 \quad 2$$

$$t_n = \frac{2}{2}n^2 + \left(1 - \frac{3}{2} \times 2\right)n + -1 - (1 - 2)$$

$$\therefore\ t_n = n^2 - 2n$$

PROBLEMA 16 Calcule x en la siguiente sucesión:

$$3a^{75},\ 7a^{72},\ 11a^{69},\ \ldots,\ (x+49)a^{(49-x)}$$

Resolución:

$$\text{Número de términos} = \frac{49 - x - 75 + -3}{-3} = \frac{x + 29}{3}$$

$$3a^{75},\ 7a^{72},\ 11a^{69},\ \ldots,\ (x+49)a^{(49-x)}$$

(exponentes: -3, -3, …, -3; coeficientes: $+4$, $+4$, …, $+4$)

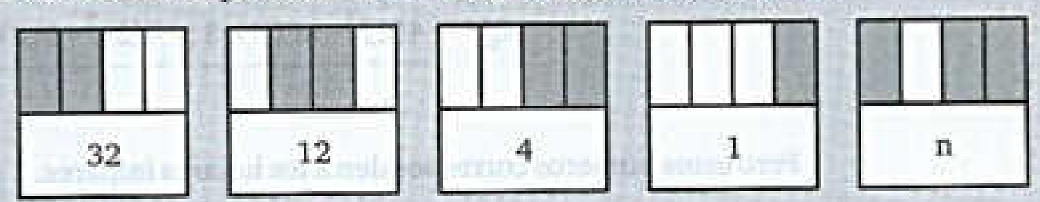
$$\text{Número de términos} = \frac{x + 49 - 3 + 4}{4} = \frac{x + 50}{4}$$

Como el número de términos en cada caso es el mismo.

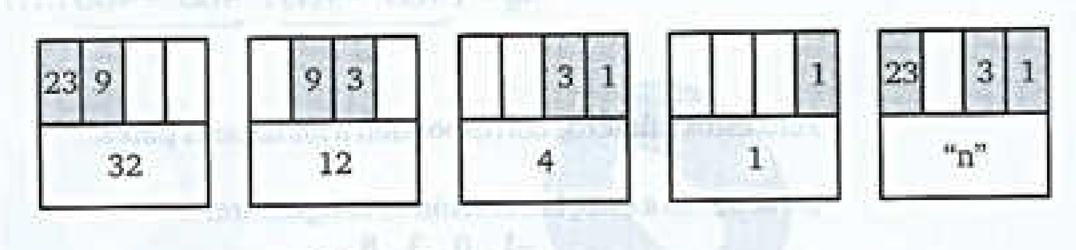
$$\frac{x + 29}{3} = \frac{x + 50}{4}$$

$$x = 34$$

PROBLEMA 17 ¿Qué valor le corresponde a "n" en la siguiente secuencia gráfica?



Resolución: Razonando con los datos dados:



$\therefore \quad n = 27$

PROBLEMA 18 En una progresión aritmética de razón 6, los términos de lugares 2; 4 y 9 forman una progresión geométrica. Calcule el término de lugar 50.

Resolución:

$$\overset{1°}{a},\ \overset{2°}{(a+6)},\ \overset{3°}{(a+12)},\ \overset{4°}{(a+18)},\ \overset{....}{...},\ \overset{9°}{(a+48)},\ \overset{...}{...}$$

Forman una P.G.

$$(a+18)^2 = (a+6)(a+48) \rightarrow a = 2$$

Reemplazando: $\overset{1°}{2},\ \overset{2°}{8},\ \overset{3°}{14},\ \overset{...}{...},\ t_{50} = ?$

$$t_{50} = 2 + 49(6)$$

$$\therefore \quad t_{50} = 296$$

PROBLEMA 19 En una progresión geométrica de términos positivos se sabe que el quinto término es 25 veces el tercer término. Además la suma de los dos primeros términos es igual a la mitad del tercer término, disminuido en 13. Hallar el cuarto término.

Resolución:

$$\overset{1°}{a},\ \overset{2°}{aq},\ \overset{3°}{aq^2},\ \overset{4°}{aq^3},\ \overset{5°}{aq^4},\ \overset{...}{...}$$

$$aq^4 = 25aq^2$$

$$\boxed{q = 5}$$

$$a + aq = \frac{aq^2}{2} - 13$$

Reemplazando q = 5 :

$$a + 5a = \frac{25a}{2} - 13$$

$$\boxed{a = 2}$$

Nos piden : $aq^3 = 2 \times 5^3 = 250$

PROBLEMA 20 Amelia se propone leer las páginas de un libro de la siguiente manera: el primer día lee 3 páginas, el segundo día, 2 páginas más que el primer día, el tercer día el triple del primer día, el cuarto día, el triple del segundo día y así sucesivamente hasta que término de leer luego de 10 días. ¿Cuántas páginas leyó el último día?

Resolución: Primero con los datos del problema formemos una sucesión que involucre la cantidad de páginas que lee por día.

1° 2° 3° 4° ... 10°

3 , 5 , 9 , 15 , ... , ( )

Diferencias: 2, 4, 6

Segundas diferencias: 2, 2

Se trata de una sucesión de segundo orden.

Calculamos el término n-ésimo (t_n)

1° 2° 3° 4°

C = 3 \ 3 , 5 , 9 , 15 , ...

A + B = 0 \ 2, 4, 6

2A = 2 \ 2, 2

$$A = 1 \;;\; B = -1 \;;\; C = 3$$

$$\boxed{t_n = n^2 - n + 3}$$

Nos piden : $t_{10} = 10^2 - 10 + 3$

$t_{20} = 93$

∴ El número de páginas que lee el último día es 93.

PROBLEMA 21 En la siguiente P. A, m es un número entero positivo.

$$m;\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{(n+1)\text{ términos}};33;\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{(3n+1)\text{ términos}};113$$

¿Cuál es el máximo valor de n – m?

Resolución: Como $m > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$m;\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{(n+1)\text{ términos}};\ 33;\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{(3n+1)\text{ términos}};113$$

33 está ubicado en el lugar n + 3.

$$\Rightarrow t_{n+3} = m + r(n+2) = 33 \quad \ldots\ldots(I)$$

Luego :

$$33\ \overbrace{\Delta\ \Delta\ \Delta\ \ldots\ldots\ \Delta\ \Delta\ \Delta}^{3n+1}\ 113$$

r r r .... r r r

$$33 + (3n+2)r = 113$$

$$(3n+2)r = 80$$

$$n = 106\ ,\quad r = \frac{1}{4}$$

En (I) : $m = 6$

Para que n – m sea máximo, n debe ser máximo y m mínimo.

$$\therefore\ n - m = 100$$

PROBLEMA 22 En la sucesión mostrada, determine la suma de dígitos de α y β.

(3, 2); (7, 5); (18, 11); (47, 17); (α, β).

Resolución: Dada la sucesión: (3, 2); (7, 5); (18, 11); (47, 17); (α, β).

Analizamos las sucesiones de elementos del par ordenado.

* 3 , 7 , 18 , 47 , α $\qquad \alpha = 47 + 76 = 123$

+4 +11 +29 +76

7+4 11+18 29+47

* 2 , 5 , 11 , 17 , β

Son números primarios que se suceden saltando uno.

17 , (19) , 23 $\qquad \beta = 23$

$\therefore$ La suma de dígitos es : $1+2+3+2+3 = 11$

PROBLEMA 23 En la sucesión: $\frac{13}{2}, \frac{9}{12}, \frac{5}{6}, \frac{14}{16}, ...$

hallar el lugar que ocupa el término: $a_n = 0,9\hat{6}$

Resolución:

$$\frac{1}{2}, \frac{9}{12}, \frac{5}{6}, \frac{14}{16}, ...$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, ... \; a_n = \frac{2-1}{2n}$$

Luego: $\frac{2n-1}{2n} = 0,9\hat{6} = \frac{29}{30}$

$\therefore \quad n = 15$

PROBLEMA 24 Se tiene una sucesión lineal creciente de n términos donde los términos de lugares $\frac{n-3}{2}$ y $\frac{n+13}{3}$ equidistan de los extremos, y además la diferencia de dichos términos es 16. Si el término central es 16, halle el valor de la razón.

Resolución: Aplicando dicha propiedad en el problema dado:

$$\frac{n-3}{2} + \frac{n+13}{3} = n+1$$

$$3n - 9 + 2n + 26 = 6n + 6$$

$$5n + 17 = 6n + 6$$

$$n = 11$$

Reemplazando: $\frac{n-3}{2} = 4$ y $\frac{n+13}{3} = 8$

Los términos que equidistan son t_4 y t_8

Dato : $\underbrace{t_8} - \underbrace{t_4} = 16$

$$t_1 + 7r - (t_1 + 3r) = 16$$

$$t_1 + 7r - t_1 - 3r = 16$$

$$4r = 16$$

$$r = 4$$

$\therefore$ La razón es 4

> **NOTA "S"**
>
> Propiedad
>
> Si los términos de lugar a y b equidistan de los extremos en una P. A. de "n" términos se cumple:
>
> $a + b = n + 1$

PROBLEMA 25 Se han interpolado "m" medios diferenciales entre 4 y 18; y (m + 2) medios diferenciales entre 10 y 24 de tal manera que la razón de la progresión aritmética formada en el primer caso es a la razón de la segunda como 9 es a 7. Halle el número de términos de la segunda progresión.

Resolución:

* $P.A._1 : 4 ; \underbrace{\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"m" medios}} ; 18}_{\text{"m + 1" términos}}$

$$\rightarrow 18 = 4 + (m+1)r_1 \rightarrow (m+1)r_1 = 14$$

* $P.A._2 : 10 ; \underbrace{\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{m+2 medios}} ; 24}_{\text{"m + 3" términos}}$

$$\rightarrow 24 = 10 + (m+3)r_2 \rightarrow (m+3)r_2 = 14$$

Entonces: $\underbrace{(m+1).r_1 = (m+3).r_2 = 14}$

$$\frac{m+3}{m+1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{9}{7}$$

$$\rightarrow m = 6$$

∴ El número de términos de a 2da progresión es:

$$1 + (m+2) + 1 = 1 + 8 + 1 = 10$$

NOTA "S"

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

Es el proceso que consiste en formar una P.A. conociendo los extremos y el número de medios a interpolar.

$$\div a . \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"x" medios}} . b$$

Según la fórmula del término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$b = a + (x + 2 - 1)r$$

$$b - a = (x+1)r$$

$$(x+1)r = b - a$$

$$\boxed{r = \frac{b-a}{x+1}}$$

r : Razón de interpolación

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En una progresión aritmética, el cuarto y noveno término son 9 y –6 respectivamente. Hallar la suma de las cifras del valor absoluto del vigésimo término.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 13 E) 14

2. Si los tres primeros términos de una progresión geométrica de razón igual a 12 son:

$$\frac{1}{3(a-b)}, \frac{4}{a^2-b^2}, \frac{48}{a+b}, ...$$

¿cuál será el cuarto término?

A) 576 B) 570 C) 586
D) 566 E) 536

3. La suma de los 4 términos de lugar impar de una progresión geométrica es a la suma de los restantes como 1 es a 2. Además, la suma de todos los 8 términos es 510. Hallar la suma de las cifras del cuarto término.

A) 10 B) 6 C) 8
D) 3 E) 7

4. Halle el valor de "n" en la siguiente sucesión:

$$(a+3), (a+7)^3, (a+11)^5, ..., (a+118-n)^n$$

A) 30 B) 33 C) 36
D) 39 E) 42

5. Los números: x, (x + 4), (x + 16) son los 3 primeros términos de una progresión geométrica. Halle el quinto término.

A) 158 B) 159 C) 16
D) 161 E) 162

6. En la siguiente sucesión:

$$\frac{4}{3}; \frac{9}{5}; \frac{25}{7}; \frac{49}{9}; ...; \frac{x^y}{15}; ...; \frac{529}{19}; \frac{z^y}{(y^4+5)}; \frac{961}{23}; ...$$

Determine: z – (x + y)

A) 30 B) 10 C) 20
D) 17 E) 5

7. En una progresión aritmética, los términos de lugares "n – 1", "2n – 1" y "3n" son 40, 60 y 84 respectivamente. ¿Cuál es el primer término de dicha progresión?

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

8. El primero, el segundo y el séptimo términos de una progresión aritmética forman una progresión geométrica. Si la suma de dichos términos es 93, halle su producto.

A) 3370 B) 3375 C) 3380
D) 3385 E) 3390

9. En una P.A. se sabe que el octavo término es 42 y el duodécimo término es 54. Hallar la suma del quinto y vigésimo término de dicha P.A.

A) 111 B) 115 C) 120
D) 99 E) 180

10. Las edades en años de 4 hermanos forman hoy una progresión geométrica. Cuando nació el menor, el mayor tenía 28 años y cuando nació el tercero el segundo tenía 8 años. Hallar la suma de las cifras del número de años que tiene el mayor.

A) 7 B) 5 C) 6
D) 4 E) 8

11. En las siguientes progresiones aritméticas:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

la razón aritmética de la primera es el triple de la segunda, si se cumple:

$$a_{2n} - a_6 = 4(b_{3n} - b_{2n})$$

Calcule el valor de n.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

12. En la siguiente progresión aritmética creciente:

$$\overline{ab}, \overline{b7}, \overline{c9}, \ldots$$

$$a \neq b \neq c;\ a > 3$$

Calcule el término de lugar (a + b + c)

A) 210 B) 213 C) 216
D) 219 E) 222

13. Dadas las siguientes sucesiones:

$$111^3; 222^5; 333^7; 444^9; \ldots; 1110^x; \ldots; \overline{nabcd}^{201}$$

Hallar: x + a + b + c + d

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

14. En la siguiente P.A. decreciente:

$$\underbrace{\overline{ab7}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \overline{4ab}}_{22\ \text{términos}}$$

Además: a + b = 11

Halle la razón.

A) –7 B) –11 C) –13
D) –14 E) –15

15. ¿Cuántos términos de la siguiente sucesión tienen 3 cifras?

3 , 12 , 21 , 30 , ...

A) 90 B) 100 C) 110
D) 101 E) 11

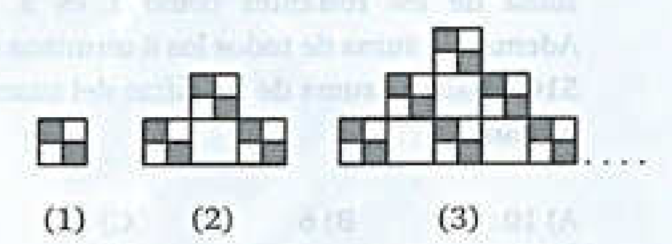
16. A continuación se muestran arreglos numéricos en forma de diamante:

			1	
		1	1 1	
	1	1 1	2 1 2	
1	1 1	2 1 2	3 1 1 3	
1 1	2 1 2	3 1 1 3	4 1 1 1 4	....
1	1 1	2 1 2	3 1 1 3	
	1	1 1	2 1 2	
		1	1 1	
			1	

¿Cuál es la suma de los números en el vigésimo arreglo?

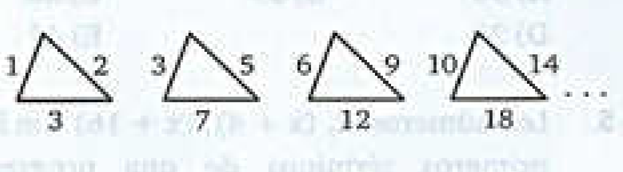
A) 1200 B) 1163 C) 1320
D) 1172 E) 1090

17. ¿Cuántos cuadrados no sombreados se contarán en la figura número 25?



A) 920 B) 918 C) 940
D) 938 E) 950

18. Calcule el perímetro del triángulo de la posición 50.



A) 3900 B) 3525 C) 3775
D) 4000 E) 3975

19. Ángel decide ahorrar durante todo el mes de agosto de la siguiente manera cada día 5 soles más que el día anterior. ¿En qué día cumplirá que lo ahorrado en ese día sea 2 veces lo ahorrado 12 días antes y 3 veces lo ahorrado el primer día?

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

20. En el siguiente arreglo numérico hallar la suma del primero y el último término de la fila 30.

F_1 1
F_2 .... 2 3
F_3 .... 4 5 6
F_4 .... 7 8 9 10
⋮ ⋰ ⋱

A) 900 B) 925 C) 890
D) 901 E) 891

21. ¿Cuál es el último término de la siguiente sucesión:

3 , 10 , 17 , 24 , ...

si para escribirla se han utilizado 180 cifras?

A) 447 B) 448 C) 449
D) 450 E) 451

22. Ángel recibe el lunes 30 de enero S/.4, el 31 de enero S/.8, al día siguiente S/.14, al día siguiente S/.22 y así sucesivamente. ¿Qué fecha será cuando Pepe reciba S/.274?

A) 14 de febrero
B) 12 de febrero
C) 13 de febrero
D) 15 de febrero
E) 16 de febrero

23. En una P.G. creciente se sabe que el cuarto término es 9 veces el segundo término. Además el primer término aumentado en 2 es igual a la mitad del segundo. Hallar la suma del t_1 y t_2.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

24. Halle el número de términos en:

8 , 20 , 36 , 56 , ..., 920

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

25. Al tratar de calcular el término enésimo de una sucesión, un estudiante comete un error y calcula el término enésimo de los lugares impares y obtiene así $t_n = 8n^2 - 10n + 3$. Otro estudiante, sobre la misma sucesión, comete otro error y calcula el término enésimo para los lugares para y obtiene así $t_n = 8n^2 - 2n$. ¿Cuál es el término enésimo de dicha sucesión?

A) $2n^2 - n$ B) $2n^2 - 2n$ C) $2n^2 - 3n$
D) $2n^2 - 4n$ E) $2n^2 - 5n$

26. El paquete de la fila 1 está dado por una cuerda de 75 cm, y en el nudo siempre se usa 11 cm. ¿Cuál es la longitud de la cuerda que se usa para atar el paquete de la figura 100?
(Todos los paquetes son cúbicos e iguales)

fig (1) fig(2) fig(3) ....

A) 3240 B) 3243 C) 3246
D) 3249 E) 3252

27. En la numeración de las 24 páginas centrales de un libro se han utilizado 55 tipos de imprenta. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 180 B) 184 C) 188
D) 192 E) 196

28. Calcule la suma de los números que irán en los vértices del arreglo triangular de la posición 50.

```
                                  4
                  3             3   7
  2             2   5         2   6   9
1   3         1   4   6     1   5   8   10  ....
 (1)             (2)            (3)
```

A) 1358 B) 1368 C) 1378
D) 1388 E) 1390

29. Leslie se propone leer una novela de la siguiente manera. el primer día 3 páginas, el segundo día 8 páginas, el tercer día 15, el cuarto 24 y así sucesivamente hasta que cierto día se da cuenta que el número de páginas leídas ese día es 24 veces el número de días que ha estado leyendo. Hallar el número de páginas leídas en dicho día.

A) 164 B) 168 C) 172
D) 176 E) 180

30. ¿Cuántas cifras se han utilizado para escribir la siguiente sucesión?

$$\underbrace{5\,,\ 17\,,\ 29\,,\ 41\,,\ \ldots\ldots}_{\text{50 términos}}$$

A) 135 B) 137 C) 139
D) 141 E) 143

31. Dada la progresión aritmética
$-147\,,\ -139\,,\ -131\,,\ \ldots\ldots,\ 1045$
Hallar el primer término positivo.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

32. En un laboratorio se estudia dos tipos de bacterias por separado y durante los mismos días. El primer día el número de bacterias de tipo A es 3, el segundo día es 6, el tercer día es 11, el cuarto día es 18 y así sucesivamente. El primer día el número de bacterias de tipo B es 10, el segundo día es 11, el tercer día es 13, el cuarto día es 16 y así sucesivamente. ¿En cuántos día el número de bacterias del tipo A será el doble que el número de bacterias del tipo B?

A) 12 B) 13 C) 23
D) 18 E) 15

33. Dada la sucesión:
1; 2 4; 5; 7; 9; 10; 12; 14; 16; 17; ...
esta se ha formado colocando primero el primer impar, luego los pares siguientes (2; 4), después los tres impares (5; 7; 9), luego los cuatro pares siguientes (10; 12; 14; 16) y así sucesivamente. Calcule el lugar que ocuparía el número 400.

A) 208 B) 210 C) 212
D) 211 E) 209

34. ¿Cuántos términos comunes existen en ambas sucesiones?

$S_1:\ 4\ ;\ 10;\ 16;\ 22;\ \ldots;\ 598$
$S_2:\ 12;\ 20;\ 28;\ 36;\ \ldots$

A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 34

35. Las utilidades diarias (en soles) de una empresa durante los primeros días son:

$$30\ ;\ 67\ ;\ 128\ ;\ 219\ ;\ \ldots$$

Hallar la utilidad del octavo día.

A) S/.1030 B) S/.903 C) S/.1013
D) S/.1003 E) S/.1300

36. En la progresión geométrica mostrada, hallar el producto de los valores reales de x.

$$1\ ;\ x^2\ ;\ 6-x^2\ ;\ \ldots$$

A) -2 B) -4 C) -6
D) $-\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{6}$

37. En una P.A. de 35 términos se sabe que el duodécimo término es 24 y el vigésimo término es 48. Hallar el término central de dicha P.A.

A) 42 B) 44 C) 40
D) 46 E) 45

38. ¿Cuántos términos de la sucesión:

$$14\ ,\ 17\ ,\ 20\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ ,\ 614$$

resultan tener raíz cuadrada exacta al sumarles 1 unidad?

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 9

39. Si consideramos los números:

$$7\ ,\ 17\ ,\ 27\ ,\ \ldots$$

y todos los números que terminan en 7, ¿cuál sera la cifra que ocupa el lugar 290?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

40. Las páginas de un libro están numeradas con números consecutivos a partir de 1, y se nota que 58 de estos números comienzan con la cifra 7. ¿Cuántas páginas están numeradas con números que terminan en 7?

A) 70 B) 72 C) 74
D) 76 E) 78

41. ¿Cuántos términos de la siguiente sucesión terminan en cifra 5?

$$13\ ,\ 22\ ,\ 31\ ,\ 40\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ 904$$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

42. En la siguiente figura se muestran los números naturales distribuidos en pasajes en forma de "ele". ¿Cuál es la suma de los números que están en los extremos del pasaje 20?

...	16	9	4	1	
...	17	10	5	2	3
	18	11	6	7	8
	19	12	13	14	15
	20	21	22	23	24
	⋰			⋮	⋮

A) 420 B) 450 C) 540
D) 680 E) 840

43. Cuántos términos que son cuadrados perfectos tiene la siguiente sucesión:

$$12\times2\ ;\ 12\times3\ ;\ 12\times4\ ;\ 12\times5\ ;\ldots;\ 12\times675$$

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

44. En la sucesión:

9 ; 16 ; 23 ; 30 ; 37 ; ....

Calcule el noveno término que termina en 3.

A) 583 B) 483 C) 673
D) 573 E) 463

45. En la sucesión:

4 ; 7 ; 10 ; 13 ; .... ; 199

¿Cuántos de sus términos son cuadrados perfectos?

A) 10 B) 4 C) 8
D) 6 E) 9

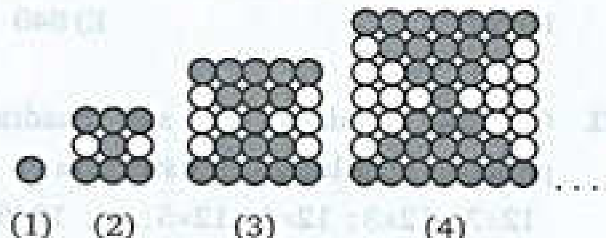
46. A continuación se muestran arreglos numéricos en forma de triángulo:

```
                                 1
                 1             1 2 1
      1        1 2 1         1 1 2 1 1
    1 2 1    1 1 2 1 1     1 1 1 2 1 1 1   ....
     (1)        (2)             (3)
```

¿Cuál es la suma de los números en el vigésimo arreglo?

A) 400 B) 461 C) 420
D) 472 E) 490

47. ¿Cuántas bolitas sombreadas se contarán en la figura de la posición 30?



A) 1800 B) 1799 C) 1801
D) 1600 E) 1599

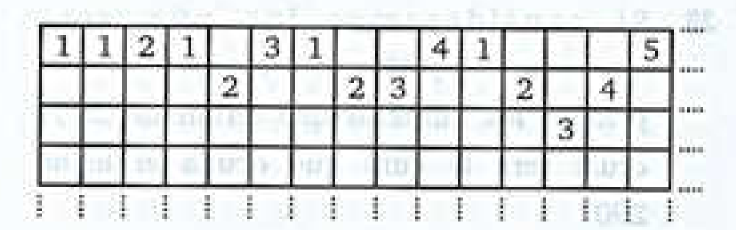
48. En un trabajo de reforestación, laboran 5 personas, cada día plantan 3 árboles más de los que plantan en el día anterior. El último día plantaron tantos árboles como el quíntuplo del número de días que han trabajado. ¿Cuántos árboles plantaron el primer día, sabiendo que los plantados el primer día y el último día totalizan 143?

A) 40 B) 41 C) 42
D) 43 E) 44

49. Un libro tiene todas sus páginas numeradas con números consecutivos a partir de 1. De dicho libro se arrancaron las últimas 30 hojas y se observa que desde la página 61 hasta la última página que quedó se han utilizado para su numeración la misma cantidad de cifras que se utilizaron para la numeración de las primeras 60 páginas. ¿Cuántas páginas tenía el libro?

A) 150 B) 154 C) 164
D) 170 E) 140

50. En el siguiente arreglo numérico, ¿a qué fila pertenece el número que se encuentra en la columna N° 200?



1	1	2	1		3	1			4	1				5
				2			2	3			2		4	
												3		

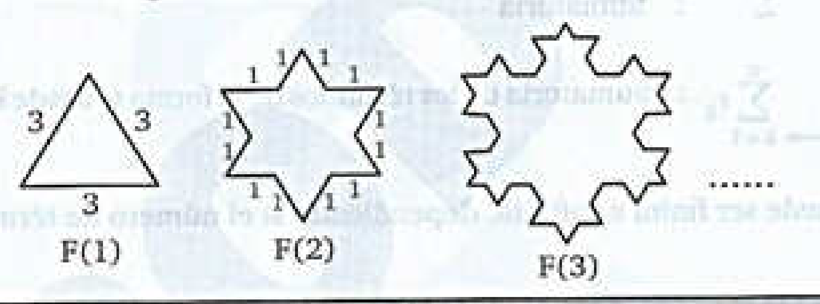
A) fila 10 B) fila 15 C) fila 20
D) fila 12 E) fila 16

Series y Sumatorias

CAPACIDADES

- Comprender y utilizar en el cálculo de una suma, el concepto de serie.
- Vincular adecuadamente con las sucesiones.
- Conocer las principales series notables.
- Desarrollar en el lector la capacidad de generar nuevas fórmulas a partir de series básicas.

El triángulo de la figura (1) tiene lado 3 y es un triángulo equilátero. Si cada lado se divide en 3 y se forma una nueva estructura ¿cuál es el perímetro de la figura (n) cuando n tiende al infinito?



INTRODUCCIÓN

Encontrar el valor en una adición de muchos términos es casi en la mayoría de casos muy tedioso y recurrimos a técnicas empíricas que nos llevan a una solución muy operativa.

Es por ello que abordaremos este problema conociendo principalmente los diversos tipos de series para aplicar convenientemente en lo que deseamos.

Cuando a Carl Frederich Gauss (el príncipe de las matemáticas) a la edad de 10 años se le pidió la suma del 1 al 100, dijo el resultado casi inmediatamente después de la formulación, escribiendo 5050 como resultado ¿cómo lo hizo? ... muchos de sus biógrafos coinciden que una explicación fue de colocar la misma serie al revés y juntarlas a las 2:

Serie pedida $\longrightarrow$ $S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$

$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + 101 + 101$$

$$2S = 100 \times 101$$

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Fue una manera muy creativa de hallar dicho valor y en ese sentido nos orientaremos en el capítulo presente.

DEFINICIÓN

Una serie numérica es la adición indicada de los términos de una sucesión numérica y al resultado de dicha adición se le llama valor de la serie:

Veamos:

$$\underbrace{t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3\ ,\ \ldots\ ,\ t_n}_{\text{sucesión}}$$

$$\underbrace{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n}_{\text{serie}}$$

Forma abreviada de representar a una serie:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

$\sum$: Sumatoria

$\sum_{k=1}^{n} t_k$: Sumatoria de los términos de la forma t_k desde $k = 1$ hasta $k = n$

variable → $k=1$

Una serie puede ser finita o infinita, dependiendo si el número de términos de ésta es limitado o ilimitado.

Ejemplo: Dada la siguiente sucesión:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15$$

donde: $t_n = 3n\ ;\ 1 \leq n \leq 5$

Entonces la serie es: $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \underbrace{45}_{\text{valor de la serie}}$

En forma abreviada: $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \sum_{k=1}^{5} (3k)$

Ejemplo: Dada la siguiente sucesión:

$$2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \ldots,\ 401$$

donde: $t_n = n^2 + 1\ ;\ 1 \leq n \leq 20$

Entonces la serie es: $2 + 5 + 10 + 17 + 26 + \ldots + 401 = \underbrace{2890}_{\text{valor de la serie}}$

En forma abreviada: $2 + 5 + 10 + 17 + 26 + \ldots + 401 = \sum_{k=1}^{20} (k^2 + 1)$

SERIE ARITMÉTICA

Una serie aritmética es la adición indicada de los términos de una sucesión aritmética.

Ejemplo: Calcule el valor de la siguiente serie aritmética:

$$S = \underbrace{2+5+8+\ldots+53+56+59}_{20\text{ términos}}$$

Resolución:

$$\begin{aligned} S &= \overbrace{2+5+8+\ldots+53+56+59}^{20\text{ términos}} \\ S &= 59+56+53+\ldots+5+8+2 \quad + \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2S = \underbrace{61+61+61+\ldots+61+61+61}_{20\text{ términos}}$$

$$2S = 61\times 20$$

$\downarrow$ (2 + 59) (son términos de la serie, toma dos convencionalmente para establecer una regla general.)

$$2S = (2+59)20$$

$$\Rightarrow S = \frac{(\overset{\text{primer término}}{2}+\overset{\text{último término}}{59})}{2}\underset{\text{cantidad de términos}}{20}$$

En general:

$$S = t_1 \underset{+r}{+} t_2 \underset{+r}{+} t_3 \underset{+r}{+} t_4 + \ldots + t_n$$

$$\boxed{S = \frac{(t_1+t_n)n}{2}}$$

t_1 : primer término

t_n : último término

n : cantidad de términos

Ejemplo: Halle el valor de la siguiente serie:

$$S = \underbrace{17+21+25+29+\ldots}_{25\text{ términos}}$$

Resolución:

$$S = \overset{1°}{17} + \overset{2°}{21} + \overset{3°}{25} + \ldots + \overset{25°}{¿?}$$

(+4, +4)

$$S = \overset{1°}{17} + \overset{2°}{21} + \overset{3°}{25} + \ldots + \overset{25°}{[17+24(4)]}$$

$$S = \overset{1°}{17} + \overset{2°}{21} + \overset{3°}{25} + \ldots + \overset{25°}{113}$$

$$S = \left(\frac{17+113}{2}\right)25 \rightarrow S = 1625$$

SERIE GEOMÉTRICA

Una serie aritmética es la adición indicada de los términos de una sucesión geométrica. Las series geométricas pueden ser:

1. SERIE GEOMÉTRICA FINITA

Ejemplo: Calcule el valor de la siguiente serie:

$$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458$$

Resolución:

$$S = \underbrace{2 + 6}_{\times 3} + \underbrace{18}_{\times 3} + \underbrace{54}_{\times 3} + 162 + 486 + 1458$$

$$S = 2 + 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6$$

Multiplicamos por 3 miembro a miembro:

$$3S = 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6 + 2\times 3^7$$

Luego restamos ambas series:

$$3S = 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6 + 2\times 3^7 \; -$$
$$S = 2 + 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6$$

$\Rightarrow (3-1)S = 2\times 3^7 - 2$

$\Rightarrow S = \dfrac{\overset{\text{primer término}}{2}(3^{\overset{\text{cantidad de términos}}{7}} - 1)}{\underset{\text{razón}}{3} - 1}$

En general:

$$S = t_1 + \underset{\times q}{t_2} + \underset{\times q}{t_3} + \underset{\times q}{t_4} + \ldots + t_n$$

$$S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

t_1 : primer término
q : razón
n : cantidad de términos

Ejemplo: Calcule el valor de la siguiente serie:

$$S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{20 \text{ cifras}}$$

Resolución:

$$S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{20 \text{ cifras}}$$

$$S = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + 10^4 - 1 + \ldots + 10^{20} - 1$$

$$S = \underbrace{10 + 10^2}_{\times 10} + \underbrace{10^3}_{\times 10} + 10^4 + \ldots + 10^{20} - 20$$

$$S = 10\underbrace{\frac{(10^{20}-1)}{10-1}}-20$$

$$S = 10(\underbrace{111\ldots11}_{20 \text{ cfs}})-20$$

$$S = \underbrace{111\ldots1110}_{21 \text{ cfs}}-20$$

$$S = \underbrace{111\ldots1090}_{21 \text{ cfs}}$$

2. SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE INFINITA (SUMA LÍMITE)

Ejemplo: Calcule el valor de la siguiente serie:

$$S = 9+3+1+\frac{1}{3}+\ldots$$

Resolución:

$$S = 9+3+1+\frac{1}{3}+\ldots$$

$$\times\frac{1}{3}\quad \times\frac{1}{3}\quad \times\frac{1}{3}$$

Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ miembro a miembro:

$$\frac{1}{3}\times S = \frac{1}{3}\left(9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\right)$$

$$\frac{S}{3} = 3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Restamos ambas series:

$$S = 9+\cancel{3}+\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{3}}+\ldots$$

$$\frac{S}{3} = \cancel{3}+\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{9}}+\ldots \quad (-)$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)S = 9$$

$$S = \frac{\overset{\text{primer término}}{9}}{1-\underset{\text{razón}}{\frac{1}{3}}}$$

En general:

$$S = t_1+t_2+t_3+\ldots$$

$$\times q \quad \times q$$

$$0 < |q| < 1$$

$$\boxed{S = \frac{t_1}{1-q}}$$

t_1 : primer término

q : razón

Ejemplo: Calcule el valor de la siguiente serie:

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$$

Resolución:

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$$

$$\times\frac{2}{3} \quad \times\frac{2}{3} \quad \times\frac{2}{3}$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \rightarrow S = 3$$

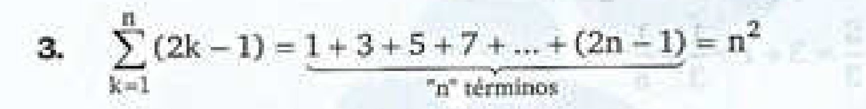
NOTA

A la suma de una serie decreciente infinita también se le conoce como "suma límite".

SERIES Y SUMAS NOTABLES

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2k) = \underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n}_{\text{"n" términos}} = n(n+1)$



3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)}_{\text{"n" términos}} = n^2$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}$

6. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}$

7. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

8. $\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2^3 + \underbrace{4^3 + 6^3 + 8^3 + \ldots + (2n)^3}_{\text{"n" términos}} = 2[n(n+1)]^2$

9. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

10. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

11. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1\times2\times3 + 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + ... + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

12. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

13. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{1\times2\times3} + \dfrac{1}{2\times3\times4} + \dfrac{1}{3\times4\times5} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Ejercicios:

1. $S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 24 = \dfrac{24\times 25}{2} = 300$

2. $S = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 30$

   Hallamos la cantidad de términos

   $S = \underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + ... + 30}_{\frac{30}{2} = 15 \text{ términos}} = 15\times 16 = 240$

3. $S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 79$

   Hallamos la cantidad de términos

   $S = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ... + 79}_{\frac{1+79}{2} = 40 \text{ términos}} = 40^2 = 1600$

4. $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 20^2 = \dfrac{20\times 21\times 41}{6} = 2870$

5. $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 20^2 = \dfrac{20\times 21\times 22}{6} = 1540$

6. $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 15^2 = \dfrac{15\times 16\times 17}{6} = 680$

7. $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = \left(\dfrac{10\times 11}{2}\right)^2 = 3025$

8. $2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + ... + 20^3$

   Hallamos la cantidad de términos

   $\underbrace{2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 20^3}_{\frac{20}{2} = 10 \text{ términos}} = (10\times 11)^2\times 2 = 24200$

9. $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + ... + 15^3$

   Hallamos la cantidad de términos

   $\underbrace{1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + ... + 15^3}_{\frac{1+15}{2} = 8 \text{ términos}} = 8^2(2\times 8^2 - 1) = 8128$

10. $1\times2+2\times3+3\times4+...+15\times16=\dfrac{15\times16\times17}{3}=1260$

11. $1\times2\times3+2\times3\times4+...+15\times16\times17=\dfrac{15\times16\times17\times18}{4}=18360$

12. $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+...+\dfrac{1}{30\times31}=\dfrac{30}{31}$

13. $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+...+\dfrac{1}{13\times14\times15}=\dfrac{13\times16}{4\times14\times15}=\dfrac{26}{105}$

SERIE POLINOMIAL

Es la suma indicada de los términos de una sucesión polinomial. Dada la sucesión polinomial de "n" términos:

$$t_1\ ;\ t_2\ ;\ t_3\ ;\ t_4\ ;\ t_5\ ;\ ....;\ t_n$$
$$+a_1\quad +a_2\quad +a_3\quad +a_4$$
$$+b_1\quad +b_2\quad +b_3$$
$$+r\quad +r\quad \rightarrow\ \text{razón}$$

Luego tenemos la serie: $S=t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+......+t_n$

Para calcular su valor usaremos:

$$\boxed{S=C_1^n\times t_1+C_2^n\times a_1+C_3^n\times b_1+C_4^n\times r}$$

donde: $C_k^n=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)......}{k(k-1)(k-2)(k-3)......}$ "K" factores

Calcular el valor de: $S=7+9+12+17+25+.......$ (12 términos)

Resolución: Observa que los términos forman una sucesión polinomial de tercer orden:

$$(7)\ ;\ 9\ ;\ 12\ ;\ 17\ ;\ 25\ ;\ ....\ \text{(12 términos)}$$
$$(+2)\quad +3\quad +5\quad +8$$
$$(+1)\quad +2\quad +3$$
$$(+1)\quad +1$$

De acuerdo a lo aprendido:

$$S=C_1^{12}\times7+C_2^{12}\times2+C_3^{12}\times1+C_4^{12}\times1$$

$$S=12\times7+\frac{12\times11}{2\times1}\times2+\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}+\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}$$

$$\therefore\quad S=931$$

SUMATORIA

DEFINICIÓN

Es la representación compacta de una serie.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{20} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2$$

Límite Superior (20); Variable (n); Límite inferior (1)

Importante.- Lo primero que debes identificar es la variable.

En general:

$$\sum_{n=a}^{z} T_n = \underbrace{T_a + T_{a+1} + T_{a+2} + \ldots\ldots + T_z}_{\text{expansión de la sumatoria}}$$

PROPIEDADES

PROPIEDAD ①

$$\text{Número de términos} = \text{Límite superior} - \text{Límite inferior} + 1$$

PROPIEDAD ②

$$\sum_{n=a}^{z} c = \underbrace{c + c + c + \ldots.. + c}_{(z-a+1)\text{ términos}} = (z - a + 1)c$$

PROPIEDAD ③

$$\sum_{n=a}^{z} c \cdot T_n = c\sum_{n=a}^{z} T_n$$

PROPIEDAD ④

$$\sum_{k=1}^{z} T_k = \sum_{k=1}^{a-1} T_k + \sum_{k=a}^{z} T_k$$

PROPIEDAD ⑤

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k + \ldots..) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k + \ldots.$$

PROPIEDAD ⑥

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1 \quad \text{(telescópica)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{\text{Diferencia de términos consecutivos}} = a_{n+1} - a_n$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Calcular S:

$$S = 2 + 6 + 10 + 14 + ... + 78$$

Rpta.: ....

2. Calcular X en:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + X = 120$$

Rpta.: ....

3. Calcular S:

$$S = 3\times 4 + 4\times 5 + 5\times 6 + ... + 20\times 21$$

Rpta.: ....

4. Calcular x en:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + x^3 = 3025$$

Rpta.: ....

5. Calcular S:

$$S = \frac{2}{1\times 2} + \frac{2}{2\times 3} + \frac{2}{3\times 4} + ... + \frac{2}{19\times 20}$$

Rpta.: ....

6. Hallar S:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 15^2$$

Rpta.: ....

7. Hallar S:

$$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + 20\times 21$$

Rpta.: ....

8. Hallar S

$$S = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + 3\times 4\times 5 + ...$$
$$..... + 15\times 16\times 17$$

Rpta.: ....

9. Hallar S:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 12^3$$

Rpta.: ....

9. Hallar S:

$$S = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + ...$$

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 He repartido caramelos entre los 25 sobrinos que tengo dándole a cada uno cantidades que forman una progresión aritmética de razón 3. Si el último recibió 7 veces lo que recibió el primero, ¿cuántos caramelos he repartido en total?

Resolución:

Sobrinos ➩ 1° 2° 3° 4° ... 25°

Caramelos ➩ $a, (a+3), (a+6), (a+9), \ldots, \underbrace{(a+24\times3)}_{(a+72)}$

Por dato: $a + 72 = 7a$

$a = 6$

Reemplazando: Sobrinos ➩ 1° 2° 3° ... 25°

Caramelos ➩ 6, 9, 12, ... , 78

Total de caramelos repartidos $= 6 + 9 + 12 + \ldots + 78 = \left(\dfrac{6+78}{2}\right)25$

∴ Total de caramelos repartidos $= 1050$

PROBLEMA 2 Halle la suma de los 40 primeros sumandos en:

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots$$

Resolución: Primero coloquemos a los 2 últimos sumandos y luego agrupemos a los sumandos de 2 en 2.

$$S = \overbrace{\underbrace{1^2 - 2^2}_{-3} + \underbrace{3^2 - 4^2}_{-7} + \underbrace{5^2 - 6^2}_{-11} + \ldots + \underbrace{39^2 - 40^2}_{-79}}^{40 \text{ sumandos}}$$

$$S = \underbrace{-3 + -7 + -11 + \ldots + -79}_{20 \text{ sumandos}}$$

$$S = \left(\frac{-3 + -79}{2}\right)20$$

$$\therefore \quad S = -820$$

PROBLEMA 3 Hallar el valor de S:

$$S = \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{5\times8} + \frac{1}{8\times11} + \ldots + \frac{1}{59\times62}$$

Resolución: Se observa que en todos los denominadores la diferencia de los factores es 3, entonces se supiere multiplicar por 3 a ambos miembros de la igualdad:

$$S=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ldots+\frac{1}{59\times62}$$

$$3\times S=3\left(\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ldots+\frac{1}{59\times62}\right)$$

$$3S=\frac{3}{2\times5}+\frac{3}{5\times8}+\frac{3}{8\times11}+\ldots+\frac{3}{59\times62}$$

$$3S=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{59}-\frac{1}{62}$$

$$3S=\frac{1}{2}-\frac{1}{62}$$

$$\therefore\quad S=\frac{5}{31}$$

NOTA "S"

$$\frac{1}{a_1\times a_2}+\frac{1}{a_2\times a_3}+\frac{1}{a_3\times a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}\times a_n}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)$$

Donde: $a_n-a_{n-1}=r\ ;\ a_n>a_{n-1}>0$

2° Método: Aplicando el método práctico:

$$S=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ldots\ldots+\frac{1}{59\times62}$$

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{62}\right)=\frac{5}{31}$$

diferencia de los factores del denominador (r) ← 3

PROBLEMA 4 Halle "x"

$$\sqrt[15]{2}\times\sqrt[15]{2^3}\times\sqrt[15]{2^5}\times\sqrt[15]{2^7}\times\ldots\times\sqrt[15]{2^{2x+1}}=32^3$$

Resolución:

$$\sqrt[15]{2^{1+3+5+7+\ldots+(2x+1)}}=(2^5)^3$$

$$\sqrt[15]{2^{\left(\frac{1+(2x+1)}{2}\right)^2}}=2^{15}$$

Elevamos a la 15 miembro a miembro:

$$2^{(x+1)^2}=(2^{15})^{15}$$

$$2^{(x+1)^2}=2^{15^2}$$

$$(x+1)^2=15^2$$

$$x+1=15$$

$$\therefore\quad x=14$$

PROBLEMA 5 Pedro y Jorge leen una misma novela de 1500 páginas. Pedro lee 50 páginas diarias y Jorge lee 5 páginas el primer día, 10 el segundo, 15 el tercero y así sucesivamente. Si comienzan el primero de enero, ¿en qué fecha llegarán a la misma página?

Resolución:

Días	⇨ 1° 2° 3° ... n°
Páginas que lee Pedro	⇨ 50 50 50 ... 50
Páginas que lee Jorge	⇨ 5 10 15 ... 5n

Para que lleguen a la misma página tienen que haber leído en total el mismo número de páginas.

$$\underbrace{\overbrace{50+50+50+\ldots+50}^{\text{Total de páginas leídas por Pedro}}}_{\text{n veces}} = \overbrace{5+10+15+\ldots+5n}^{\text{Total de páginas leídas por Jorge}}$$

$$50n = 5(1+2+3+\ldots+n)$$

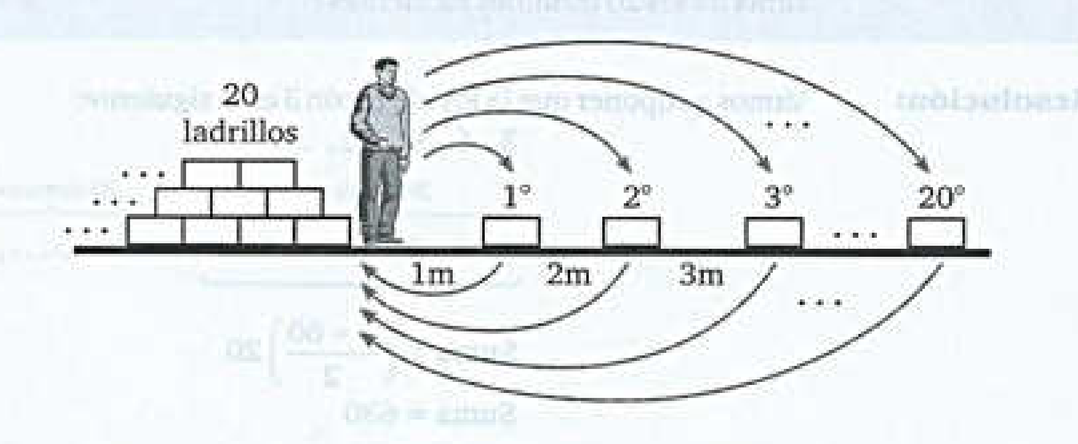
$$50n = 5\frac{n(n+1)}{2}$$

$$n = 19$$

Entonces han transcurrido 19 días. Si comenzaron el 1° de enero llegarán a la misma página el 19 de enero.

PROBLEMA 6 Hay 20 ladrillos en un montón y Ángel tiene que llevar el primer ladrillo a 1m de distancia, el segundo a 3m, el tercero a 6m, el cuarto a 10m y así sucesivamente. Si sólo puede llevar un ladrillo en cada viaje, ¿cuántos metros recorrerá Ángel hasta llevar el último ladrillo y regresar al punto donde está el montón?

Resolución:



$$\text{Recorrido} = \underbrace{2+6+12+\ldots}_{20 \text{ sumandos}}$$

$$\text{Recorrido} = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + 20\times 21$$

$$\text{Recorrido} = \frac{20\times 21\times 22}{3}$$

$$\therefore \quad \text{Recorrido} = 1540$$

PROBLEMA 7 Sea : $f(x)=\dfrac{2}{4^x+2}$

Para reales "x". Evaluar : $E = f\left(\dfrac{1}{2001}\right)+f\left(\dfrac{2}{2001}\right)+....+f\left(\dfrac{2000}{2001}\right)$

Resolución:

$$* \ \frac{1}{2001}+\frac{2000}{2001}=1$$
$$* \ \frac{2}{2001}+\frac{1999}{2001}=1$$
$$* \ \frac{3}{2001}+\frac{1998}{2001}=1$$
$$\vdots$$

$\rightarrow$ Noten que:

$$f(x)=\frac{2}{4^x+2}$$

$$f(1-x)=\frac{2}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}$$

$$\rightarrow \quad f(x)+f(1-x)=1$$

Por lo tanto:

$$E = f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+f\left(\frac{3}{2001}\right)+......+f\left(\frac{1998}{2001}\right)+f\left(\frac{1999}{2001}\right)+f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$

$$E = \underbrace{1+1+1+......+1}_{\frac{2000}{2} \text{ veces}}$$

$$\therefore \quad E = 1000$$

PROBLEMA 8 La suma de los 20 primeros términos de una P.A. de razón 3 es 670. ¿Cuál es la suma de los 20 términos siguientes?

Resolución: Vamos a suponer que la P.A. de razón 3 es la siguiente:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots$$

Entonces: $\overbrace{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots,\ 60}^{20 \text{ términos}},\ \overbrace{63,\ 66,\ \ldots,\ 120}^{20 \text{ términos}}$

$$\text{Suma} = \left(\frac{3+60}{2}\right)20$$

$$\text{Suma} = 630$$

Pero según el problema esta suma debe ser 670, entonces existe una diferencia de:

$$670-630=40 \text{ unidades}$$

Esto significa que los números deben aumentar, en este caso cada uno de los 20 números debe aumentar:

$$\frac{40}{20}=2 \text{ unidades}$$

$$\overbrace{5,\ 8,\ 11,\ \ldots,\ 62}^{20\text{ términos}},\ \underbrace{\overbrace{65,\ 68,\ \ldots,\ 122}^{20\text{ términos}}}$$

$$\text{Suma}=\left(\frac{65+122}{2}\right)20$$

$$\therefore\ \text{Suma}=1870$$

PROBLEMA 9 Calcule la suma de todos los números en el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{l} 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+20^2 \\ 2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+20^2 \\ 3^2+4^2+5^2+6^2+\ldots\ldots\ldots+20^2 \\ 4^2+5^2+6^2+7^2+\ldots+20^2 \\ \vdots \\ 20^2 \end{array}$$

Resolución: Reordenando los números:

$$\begin{array}{r} 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+20^2\ + \\ 2^2+3^2+4^2+\ldots+20^2 \\ 3^2+4^2+\ldots+20^2 \\ 4^2+\ldots+20^2 \\ \vdots \\ 20^2 \\ \hline 1\ +8\ +27+64+\ldots+ \end{array}$$

$$1^3+2^3+3^2+4^3+\ldots+20^3=\left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2=44100$$

PROBLEMA 10 Calcular:

$$S=\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\frac{13}{5^4}+\ldots$$

Resolución:

$$S=\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\frac{13}{5^4}+\dots$$

$$\frac{1}{5}S=\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\frac{10}{5^4}+\dots \quad (-)$$

$$\frac{4}{5}S=\frac{4}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\dots$$

$\times\frac{1}{5}$ $\times\frac{1}{5}$

$$\frac{4}{5}S=\frac{4}{5}+\frac{\frac{3}{25}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$\frac{4}{5}S=\frac{4}{5}+\frac{3}{20}$$

$$\therefore \quad S=\frac{19}{16}$$

2° Método: **MÉTODO "S"**

$+3$ $+3$ $+3$

$$S=\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\frac{13}{5^4}+\dots..$$

Potencias consecutivas a partir del exponente "1"

$$\therefore \quad S=\frac{4}{(5-1)}+\frac{3}{(5-1)^2}=\frac{19}{16}$$

NOTA "S"

Los numeradores deben formar una sucesión polinomial, es decir una de primer orden, de segundo orden, ...

PROBLEMA 11 Calcular

$$S=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{9}{5^3}+\frac{14}{5^4}+\dots$$

Resolución: Teniendo en cuenta que $\frac{1}{5} <> \frac{5}{5^2}$

$+1$ $+1$

$+3$ $+4$ $+5$

$$S=\frac{2}{5}+\frac{5}{5^2}+\frac{9}{5^3}+\frac{14}{5^4}+\dots$$

$$\therefore \quad S=\frac{2}{5-1}+\frac{3}{(5-1)^2}+\frac{1}{(5-1)^3}=\frac{45}{64}$$

PROBLEMA 12 La suma de los "n" primeros términos de una P.A. está dada por la siguiente expresión:

$$S_n = \frac{3n(n+3)}{2}$$

Calcule la suma de los términos comprendidos entre los términos de lugares 40 y 51.

Resolución:

$$S_n = \frac{3n(n+3)}{2}$$

$$\text{P.A.} \rightarrow \underbrace{t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_{40}}_{},\ \underbrace{t_{41},\ \ldots,\ t_{50}}_{\text{Suma} = ??},\ t_{51},\ \ldots,\ t_n$$

$$S_{40} = \frac{3\times 40(40+3)}{2}$$

$$S_{40} = 2580$$

$$S_{50} = \frac{3\times 50(50+3)}{2}$$

$$S_{50} = 3975$$

⇨ SUMA = 3975 − 2580

∴ SUMA = 1395

PROBLEMA 13 Calcule: $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{20}$

Si se sabe que: $S_n = \underbrace{20+19+18+17+\ldots}_{\text{n sumandos}}$

Resolución:

$$S_n = \underbrace{20+19+18+17+\ldots}_{\text{n sumandos}}$$

$$(+)\begin{cases} S_1 = 20 \\ S_2 = 20+19 \\ S_3 = 20+19+18 \\ S_4 = 20+19+18+17 \\ \vdots \\ S_{20} = 20+19+18+17+\ldots+1 \end{cases}$$

$$S = 20(20)+19(19)+18(18)+17(17)+\ldots+1$$

$$S = 20^2+19^2+18^2+17^2+\ldots+1^2$$

$$S = \frac{20\times 21\times 41}{6}$$

∴ $S = 2870$

PROBLEMA 14 Calcular:

$$S = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{7}{2^6} + \frac{15}{2^8} + \ldots$$

Resolución:

$$S = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{7}{2^6} + \frac{15}{2^8} + \ldots$$

Se sugiere darle una forma adecuada a los numeradores

$$S = \frac{2-1}{2^2} + \frac{4-1}{2^4} + \frac{8-1}{2^6} + \ldots$$

$$S = \frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{4}{2^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{8}{2^6} - \frac{1}{2^6} + \ldots$$

Agrupemos a los positivos y también a los negativos

$$S = \underbrace{\frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^4} + \frac{8}{2^6} + \ldots}_{\times\frac{2}{2^2}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right)}_{\times\frac{1}{2^2}}$$

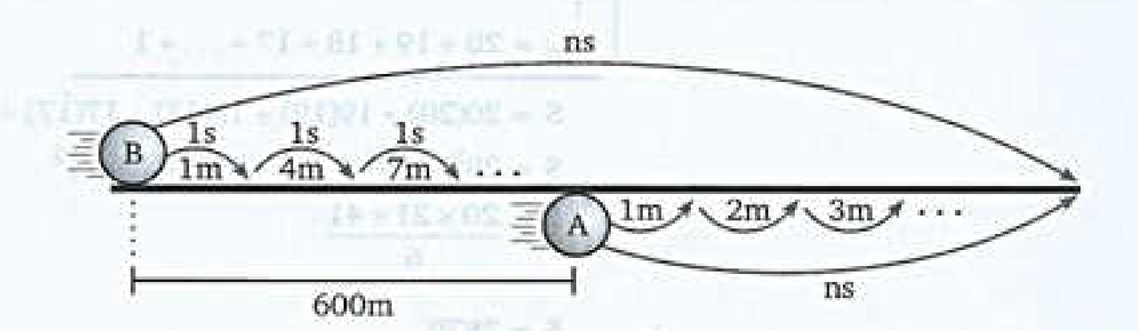
Tenemos 2 series geométrica decrecientes infinitas, y en cada una aplicaremos la regla práctica correspondiente: $S = \frac{t_1}{1-q}$

$$S = \frac{\frac{2}{2^2}}{1 - \frac{2}{2^2}} - \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2^2}}$$

$$\therefore \quad S = \frac{2}{3}$$

PROBLEMA 15 Un móvil A parte con 600 m de ventaja sobre otro móvil B. el móvil A avanza 1m en el primer segundo, 2m en el segundo, 3m en el tercero y así sucesivamente; B avanza 1m en el primer segundo, 4m en el segundo, 7m en el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto tiempo tardará B en alcanzar a A?

Resolución:



Del gráfico : $\underbrace{1+4+7+\ldots}_{\text{n sumandos}} = 600 + \underbrace{1+2+3+\ldots}_{\text{n sumandos}}$

$$\underbrace{1+4+7+\ldots+(3n-2)}_{\text{n sumandos}} = 600 + \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\text{n sumandos}}$$

$$\left(\frac{1+(3n-2)}{2}\right)n = 600 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3n-1)n = 1200 + n(n+1)$$

$$3n^2 - n = 1200 + n^2 + n$$

$$2n^2 - 2n = 1200$$

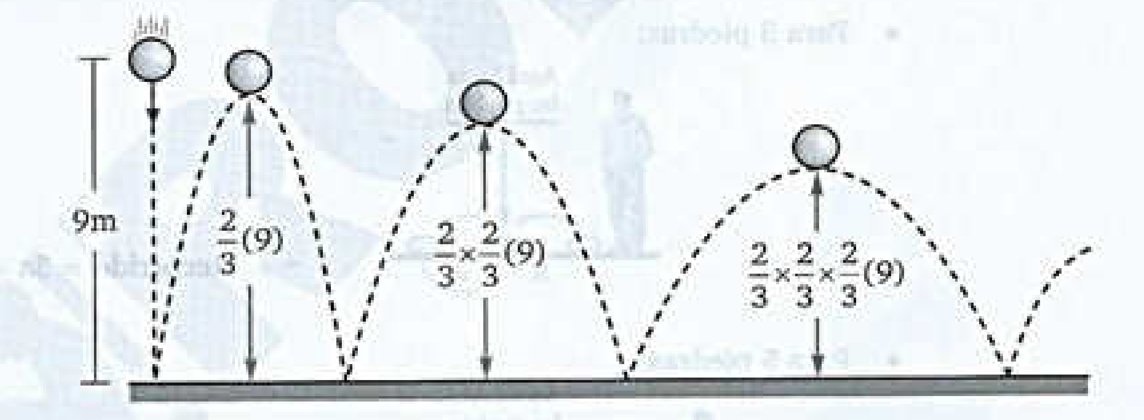
$$n^2 - n = 600$$

$$n(n-1) = 25 \times 24$$

$$\therefore \quad n = 25$$

PROBLEMA 16 Una pelota cae desde una altura de 9m y cada vez que rebota alcanza una altura igual a 2/3 de la altura desde la cual cae. Calcule el recorrido hecho por la pelota hasta quedar teóricamente en reposo.

Resolución:



$$\text{Recorrido} = 9 + 2\times\frac{2}{3}(9) + 2\times\frac{4}{9}(9) + 2\times\frac{8}{27}(9) + \ldots$$

$$\text{Recorrido} = 9 + 18\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots\right)$$

$$\times\frac{2}{3} \quad \times\frac{2}{3}$$

$$\text{Recorrido} = 9 + 18\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Recorrido} = 45$$

MÉTODO "S"

Sea "H" la altura inicial y "f" la fracción de la altura anterior.

$$L_R = H\left(\frac{D+N}{D-N}\right) \quad ; \quad f = \frac{N}{D}$$

Aplicando el Método "S":

$$H = 9 \quad ; \quad f = \frac{2}{3}$$

$$L_R = 9\left(\frac{3+2}{3-2}\right) = 45$$

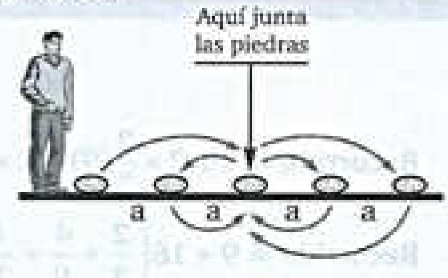
PROBLEMA 17 Un caminante encuentra en su camino un número impar de piedras, colocadas en línea recta y separadas "a" metros una de otra. Decide juntar todas donde se encuentra la piedra central. Empieza por uno de los extremos y sólo puede llevar una piedra a la vez. Si caminó 3 km hasta terminar su labor, ¿cuántas piedras encontró?

Resolución: Para resolver el problema aplicaremos el razonamiento inductivo:

- Para 3 piedras:

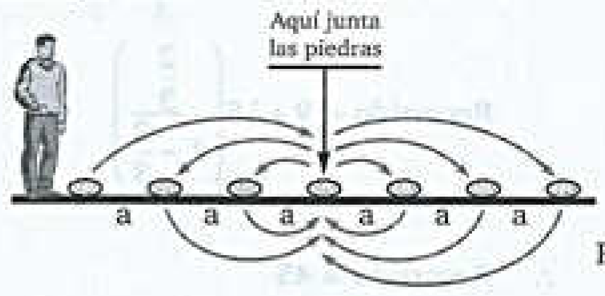
$$\text{Recorrido} = 3a = \left(\frac{2\times 3}{2}\right)a$$

- Para 5 piedras:



$$\text{Recorrido} = 10a = \left(\frac{4\times 5}{2}\right)a$$

- Para 7 piedras:



$$\text{Recorrido} = 21a = \left(\frac{6\times 7}{2}\right)a$$

De acuerdo a los resultados obtenidos:

- Para n piedras:

$$\text{Recorrido} = \frac{(n-1)n}{2} \times a$$

Por dato : $\frac{(n-1)n}{2} \times a = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$

$$(n-1)n \times a = 6000$$

$$(n-1)\underbrace{n \times a = 24 \times 25}\times 10$$

$$\therefore \quad n = 25$$

PROBLEMA 18 Calculando el valor de *S*

$$S = \sum_{k=1}^{25} (k^2+1)k!$$

Resolución:

$$S = \sum_{k=1}^{25} (k^2+k-k+1)k!$$

$$S = \sum_{k=1}^{25} (k(k+1)-(k-1))k!$$

$$S = \sum_{k=1}^{25} (k.k!(k+1)-(k-1)k!)$$

$$S = \sum_{k=1}^{25} (\underbrace{k(k+1)!}_{t_k} - \underbrace{(k-1)k!}_{t_{k-1}})$$

Aplicando telescópica:

$$S = 25 \times 26! - 0 \times 1!$$

$$\therefore \quad S = 25 \times 26!$$

PROBLEMA 19 Calcule el valor de S:

$$S = 4\times1 + 9\times2 + 16\times3 + \ldots + 441\times20$$

Resolución:

$$S = 4\times1 + 9\times2 + 16\times3 + \ldots + 441\times20$$

Vamos a darle una forma más conveniente a los números:

$$S = 2^2(2-1) + 3^2(3-1) + 4^2(4-1) + \ldots + 21^2(21-1)$$

$$S = 2^3 - 2^2 + 3^3 - 3^2 + 4^3 - 4^2 + \ldots + 21^3 - 21^2$$

Agrupemos a los positivos y a los negativos:

$$S = 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 21^3 - (2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 21^2)$$

$$S = \left(\frac{21\times22}{2}\right)^2 - 1 - \left(\frac{21\times22\times43}{6} - 1\right)$$

$$\therefore \quad S = 50050$$

PROBLEMA 20 Si la suma de la siguiente sucesión:

$$n, (n+3), (n+6), (n+9), \ldots, 4n$$

es 600. Halle el valor de n.

Resolución:

$$\underbrace{n + (n+3) + (n+6) + (n+9)}_{+3\ \ +3\ \ +3} + \ldots + 4n = 600$$

$$\Rightarrow \text{Número de términos} = \frac{4n - n + 3}{3} = n + 1$$

Luego :

$$\left(\frac{n+4n}{2}\right)(n+1) = 600$$

$$\frac{5n}{2}(n+1) = 600$$

$$n(n+1) = 240$$

$$n(n+1) = 15\times16$$

$$\therefore \quad n = 15$$

PROBLEMA 21 Determine el valor de "S"

$$S = 2\times4+5\times7+8\times10+11\times14+..... \quad \text{(12 sumandos)}$$

Resolución: Analizando:

Primer factor ⇨ 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; ....; 3n − 1

Segundo factor ⇨ 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; ....; 3n + 1

Luego tenemos:

$$S = \sum_{n=1}^{12}(3n-1)(3n+1) = \sum_{n=1}^{12}(9n^2-1)$$

$$S = \sum_{n=1}^{12}9n^2 - \sum_{n=1}^{12}(1) = 9\sum_{n=1}^{12}n^2 - \sum_{n=1}^{12}(1)$$

$$S = 9(1^2+2^2+3^2+4^2+....+12^2)-12 = 9\times\frac{12\times13\times25}{6}-12$$

$$\therefore \quad S = 5838$$

PROBLEMA 22 Hallar el valor de la serie:

$$E = \frac{1}{1\times8}+\frac{1}{2\times12}+\frac{1}{3\times16}+......+\frac{1}{19\times80}$$

Resolución:

$$E = \frac{1}{1\times8}+\frac{1}{2\times12}+\frac{1}{3\times16}+......+\frac{1}{19\times80}$$

$$E = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+......+\frac{1}{19\times20}\right)$$

$$E = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+........+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$$

$$E = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{20}\right)$$

$$\therefore \quad E = \frac{19}{80}$$

MÉTODO "S"

$$E = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{20}\right)\right)$$

$$E = \frac{19}{80}$$

PROBLEMA 23 Chucito ha elaborado 15 fichas rectangulares de cartón, todas de distinto tamaño y en cada una la relación entre el largo y el ancho es la misma que los demás. A continuación se muestra las 4 fichas de menor y la cantidad de cm^2 utilizados en la elaboración de cada uno.

5 cm^2 | 16 cm^2 | 33 cm^2 | 56 cm^2

¿Cuántos cm^2 se han utilizado en la elaboración de las 15 fichas rectangulares?

Resolución: De acuerdo a la información:

Fichas ➡	F_1	F_2	F_3	F_4	......
Área ($\ell \times a$) ➡	1×5	2×8	3×11	4×14	......
	$\times 3 + 2$	$\times 3 + 2$	$\times 3 + 2$	$\times 3 + 2$	

Luego: $t_n = n(3n+2)$

$t_n = 3n^2 + 2n$

(Suma de los 20 términos) $S_{20} = 3\left(\dfrac{20 \times 21 \times 41}{6}\right) + 2\left(\dfrac{20 \times 21}{2}\right)$

$S_{20} = 9030$

$\therefore$ Se han utilizado en total 9030 cm^2

PROBLEMA 24 Calcule: $\dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} + \dfrac{1}{1+2+3+4} + ... + \dfrac{1}{1+2+3+4+....+50+51}$

Resolución:

NOTA "S"

$$\frac{1}{1+2+3+4+.....+(n+1)+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+......+\frac{1}{1+2+3+4+....+50+51}$$

En el problema:

$$\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{4.5}+.....+\frac{2}{51.52}$$

Usamos el Método "S" aprendido:

$$2\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+......+\frac{1}{51.52}\right)$$

$$2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{52}\right)=\frac{25}{26}$$

PROBLEMA 25 Al efectuar $\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{3j^2}{2k+1}\right)$; el valor obtenido es:

Resolución: Recuerda que se opera de derecha a izquierda, veamos:

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{3j^2}{2k+1}\right)=\frac{3}{2k+1}\sum_{j=1}^{k}j^2=\frac{3}{2k+1}(1^2+2^2+3^2+......+k^2)$$

Variable (j)

$$=\frac{3}{2k+1}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(k+1)}{2}$$

Reemplazando $\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}k(k+1)$

$$=\frac{1}{2}(1\times2+2\times3+3\times4+......+10\times11)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10\times11\times12}{3}=220$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halle el valor de S:

$$S = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + \ldots + 12{,}4$$

A) 750 B) 755 C) 760
D) 770 E) 775

2. Calcule el valor de "n"

$$(3n+2)+(3n+4)+(3n+6)+\ldots+(5n)=81n$$

A) 15 B) 18 C) 24
D) 30 E) 20

3. He repartido caramelos entre los 25 sobrinos que tengo dándole a cada uno cantidades que forman una progresión aritmética de razón 3. Si los 3 últimos recibieron, juntos, 4 veces lo que recibieron los 3 primeros juntos, ¿cuántos caramelos he repartido?

A) 1325 B) 1375 C) 1355
D) 1400 E) 1425

4. Calcular (a + b + n)

$$\underbrace{5+7+9+11+\ldots}_{n\text{ términos}} = \overline{aba} + \overline{bab}$$

A) 37 B) 39 C) 45
D) 44 E) 48

5. La suma de los 3 primeros términos de una progresión aritmética es 42. La suma de los 3 últimos es 312 y la suma de todos los términos es 1062. Halle el número de términos.

A) 18 B) 20 C) 22
D) 24 E) 26

6. La suma de los 10 primeros términos de una P.A. es igual a 4 veces la suma de los 5 primeros. ¿En qué relación están el primer término y la razón de la P.A.?

A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4
D) 2/3 E) 3/5

7. He repartido un total de 1900 caramelos entre los 25 sobrinos que tengo, dándole a cada uno 3 caramelos más que al anterior. ¿Cuántos caramelos en total recibieron los 10 primeros?

A) 535 B) 530 C) 525
D) 540 E) 545

8. Una pelota cae de una altura de 18 metros y cada vez que rebota pierde 1/3 de la altura desde la cual cae. Calcule la distancia recorrida por la pelota hasta quedar teóricamente en reposo.

A) 72 m B) 81 m C) 90 m
D) 84 m E) 96 m

9. La suma de los 5 primeros términos, de una progresión aritmética creciente de 17 términos, es 35 y la suma de los 5 últimos términos es 215. Calcule la suma de todos los términos.

A) 420 B) 430 C) 415
D) 425 E) 400

10. Calcular: A + B

$$\frac{\overbrace{111+113+115+117+\ldots+A}^{n\text{ términos}}}{\underbrace{1+3+5+7+\ldots+B}_{n\text{ términos}}} = 11$$

A) 148 B) 152 C) 156
D) 160 E) 164

11. En una serie aritmética de 100 términos la suma del primero y el penúltimo término es 310, y la suma del segundo y último término es 316. Halle la suma de los 100 términos.

A) 15600 B) 15650 C) 16400
D) 16800 E) 15250

12. La suma de los cuadrados de los n primeros números enteros positivos es igual a la suma de los 2n primeros números enteros positivos. Halle n.

A) 8 B) 6 C) 7
D) 5 E) 9

13. La masa de un péndulo recorre 16 cm en su primera oscilación, y en cada una de las oscilaciones siguientes recorre 3/4 de la anterior. Calcular el espacio total recorrido hasta el momento de detenerse.

A) 60 cm B) 64 cm C) 68 cm
D) 72 cm E) 76 cm

14. Hallar el valor de $\overline{ana}$; si:

$$\overline{2a}+\overline{3a}+\overline{4a}+\ldots+\overline{9a}+\overline{10a}=\overline{ana}$$

y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

15. En una habitación hay archivadores, de 10 cajones cada uno, ubicados en fila. Dentro del primer archivador, en su primer cajón hay un folder; en el segundo cajón, 2 fólderes; en el tercero, 3 fólderes y así sucesivamente. Dentro del segundo archivador, en el primer cajón, 11 fólderes; en el segundo cajón, 12 fólderes; en el tercero, 13 fólderes y así sucesivamente. ¿Cuántos fólderes habrá en total en el séptimo archivador?

A) 100 B) 300 C) 454
D) 655 E) 836

16. Una persona tiene que pagar una deuda de S/.3600 en 40 pagos mensuales que forman una progresión aritmética. Cuando ya había pagado 30 de las mensualidades convenidas, quedaba una tercera parte de la deuda por pagar, entonces el importe del primer pago fue:

A) S/.41 B) S/.61 C) S/.51
D) S/.31 E) S/.70

17. Hallar el valor de A:

$$A=\underbrace{\frac{8}{1\times3}-\frac{16}{3\times5}+\frac{24}{5\times7}-\frac{32}{7\times9}+\ldots}_{30\ \text{sumandos}}$$

A) 100/51 B) 120/61 C) 80/41
D) 70/31 E) 60/61

18. Hallar el valor de S:

$$S=\underbrace{-2+2+12+28+50+78+\ldots}_{20\ \text{sumandos}}$$

A) 5120 B) 5024 C) 8800
D) 7048 E) 7560

19. Calcular:

$$S=\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{19}{108}+\frac{65}{648}+\ldots$$

A) 1 B) 1/3 C) 1/6
D) 1/12 E) 2/3

20. Para completar su biblioteca, Alejandro compró por valor de S/.3850, varios libros cuyos precios son: el primer libro S/.10, el segundo S/.40, el tercero S/.90, el cuarto S/.160 y así sucesivamente. ¿Cuántos libros compró en total?

A) 11 B) 9 C) 12
D) 20 E) 10

21. Pili y Mili comienzan a leer una novela el mismo día, Pili lee 12 páginas diarias y Mili lee 2 páginas el primer día, 4 páginas el segundo día, 6 el tercer día y así sucesivamente. ¿Cuántas páginas habrá leído Mili hasta el día en que ambas leyeron la misma página?

A) 120 B) 210 C) 144
D) 121 E) 132

22. Halle la suma de los 20 primeros términos.

$$S=1\times3-3\times5+5\times7-7\times9+\ldots$$

A) –840 B) –800 C) –900
D) –760 E) –820

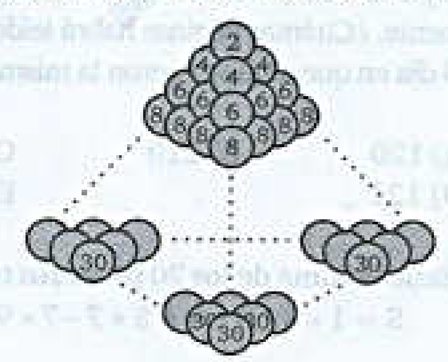
23. Se desea repartir 726 caramelos a un grupo de niños, de tal manera que el primero reciba 4 caramelos, el segundo 9, el tercero 16, el cuarto 25 y así sucesivamente; como sobró caramelos, se le agrega 2 caramelos al primer niño, 3 al segundo, 4 al tercero, 5 al cuarto y así sucesivamente se le agregó a todos y no sobró caramelos. ¿Cuál es el número de niños?

A) 9 B) 10 C) 11
D) 13 E) 12

24. Un atleta se pone a correr en el circuito mostrado. empieza en el círculo sombreado. En la primera vuelta para ir de un círculo a otro emplea 3s y al terminar descansa 8s. En la segunda vuelta para ir de un círculo a otro emplea 8s y al terminar descansa 14s. en la tercera vuelta para ir de un círculo a otro emplea 13s y al terminar descansa 20s y así sucesivamente. ¿Cuánto tiempo estuvo corriendo, si al terminar la última vuelta descansó 92 segundos?

A) 38 min B)36 min C) 40 min
D) 44 min E) 45 min

25. La siguiente figura es un tetraedro regular formado por esferas. En cada nivel todas las esferas tienen la misma numeración (ver fig.) Calcule la suma de todos los números.



A) 12420 B) 15640 C) 16440
D) 15220 E) 16020

26. Halle el valor de S:

$$S = \underbrace{\frac{1}{7\times 10} + \frac{1}{9\times 14} + \frac{1}{11\times 18} + \frac{1}{13\times 22} + \ldots}_{30 \text{ términos}}$$

A) 3/67 B) 5/63 C) 3/65
D) 1/65 E) 1/63

27. Calcular:

$$S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \ldots\infty$$

A) 1/16 B) 3/16 C) 5/16
D) 7/16 E) 9/16

28. En una P.A. la suma de los n primeros términos está dada por: $S_n = n(2n + 5)$. Halle el término de lugar 298.

A) 1025 B) 1115 C) 1200
D) 1195 E) 1205

29. La suma de n números pares consecutivos es S. ¿Cuál es la suma de los n siguientes números pares consecutivos?

A) 2S B) $S + 2n^2$ C) $S + n^2$
D) $2(S + n)$ E) $2S + n^2$

30. Una persona debe vaciar un balde con agua a cada uno de los 20 árboles que están sembrados en fila y separados uno de otro 12 metros. Si la persona, en cada viaje, sólo puede llevar un balde y el pozo se encuentra a 6 metros del primer árbol, ¿cuál es el recorrido total que debe realizar esta persona hasta terminar su tarea y haber devuelto el balde al pozo? La persona inicialmente se encuentra al lado del último árbol.

A) 5034 B) 5004 C) 5224
D) 5124 E) 5134

31. Calcule el valor de la siguiente serie:

$$S=\frac{1}{2\times 6}+\frac{1}{4\times 9}+\frac{1}{6\times 12}+\frac{1}{8\times 15}+\ldots+\frac{1}{48\times 75}$$

A) 1/25 B) 2/25 C) 3/25
D) 4/25 E) 6/25

32. Calcule S:

$$S=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\ldots\infty$$

A) 1/16 B) 3/16 C) 5/16
D) 7/16 E) 9/16

33. Calcule S:

$$S=40\times 1+39\times 2+38\times 3+\ldots+1\times 40$$

A) 11480 B) 11500 C) 11520
D) 11540 E) 11560

34. A un maestro pirotécnico le encargan hacer, con motivo de una fiesta patronal, 5929 cohetecillos, gastando una determinada suma de dinero en su fabricación. El primer día gasta 1 sol y fabrica 1 cohetecillo, el segundo día gasta 2 soles y fabrica 3 cohetecillos, el tercer día gasta 3 soles y fabrica 5 cohetecillos, el cuarto día gasta 4 soles y fabrica 7 cohetecillos, y así sucesivamente. ¿Cuántos días trabajó y cuánto gastó en la fabricación de los cohetecillos?

A) 77 y S/.3113 B) 77 y S/.3003
C) 73 y 3110
D) 73 y S/.3300 E) 77 y S/.3013

35. Un obrero ahorra cada día S/.5 más de lo que ahorra el día anterior; el último día se da cuenta que el número de días que estuvo ahorrando hasta ese día era la séptima parte de lo que ahorró ese día, sabiendo que lo que ahorró el quinto día y el penúltimo día totalizan S/.290; ¿cuánto ahorró en total?

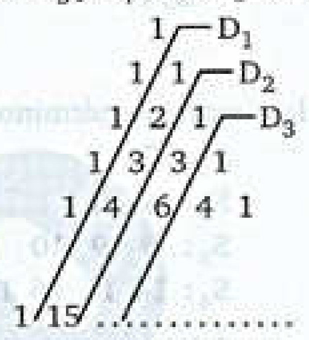
A) 4025 B) 4225 C) 4525
D) 4125 E) 4000

36. Halle la suma de los 10 primeros términos de la siguiente serie:

S=1+(3+5)+(7+9+11)+(13+15+17+19)+...

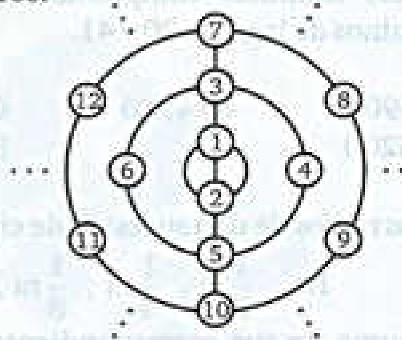
A) 3000 B) 3100 C) 3050
D) 3200 E) 3025

37. Calcular la suma de los términos de las diagonales D_3 y D_4 en el siguiente arreglo:



A) 2340 B) 2350 C) 2360
D) 2370 E) 2380

38. En la siguiente figura, calcule la suma de todos los números que están sobre el diámetro, si en total se cuentan 420 números.



A) 5570 B) 5250 C) 6210
D) 5840 E) 5145

39. Halle el valor de S:

$$S=\left(\frac{3}{4}\right)+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{3}{4}\right)^3+4\left(\frac{3}{4}\right)^4+\ldots$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

40. Halle el valor de m:

$$\frac{2}{1\times 4}+\frac{2}{4\times 7}+\frac{2}{7\times 10}+\frac{2}{10\times 13}+\ldots+\frac{2}{m}=0{,}64$$

A) 460 B) 504 C) 550
D) 598 E) 700

41. A lo largo de un camino había **n** piedras separadas **a** metros una de otra. Una persona empezó por el extremo a llevar una por una todas las piedras, al lugar donde estaba la última piedra. al terminar había recorrido 20 veces la distancia entre las piedras extremas. Hallar **n**.

A) 15 B) 17 C) 19
D) 21 E) 25

42. Calcule la suma de los términos de S_{20}

S_1: 2
S_2: 4 5
S_3: 8 9 10
S_4: 14 15 16 17
⋮

A) 7830 B) 7500 C) 7540
D) 7660 E) 7920

43. En una P.A. la suma de los n primeros términos es $S_n = 2n(2n+3)$. Halle la suma de los términos comprendidos entre los términos de lugares 20 y 41.

A) 4900 B) 4920 C) 4800
D) 5200 E) 5100

44. Si los radios de una sucesión de círculos son:

$$1\text{m}\,,\ \frac{1}{2}\text{m}\,,\ \frac{1}{4}\text{m}\,,\ \frac{1}{8}\text{m}\,,\ \ldots$$

La suma de sus correspondientes áreas es igual a:

A) $4/3\,\pi\,\text{m}^2$ B) $5/3\,\pi\,\text{m}^2$ C) $3/4\,\pi\,\text{m}^2$
D) $5/4\,\pi\,\text{m}^2$ E) $9/8\,\pi\,\text{m}^2$

45. Al inicio de un año no bisiesto un reloj marcaba las 1 h 40 m 25 s (va adelantado). Este reloj se atrasa el primer día 1 segundo el segundo día 3 segundos, el tercer día 5 segundos, y así sucesivamente. al comenzar un día del año el reloj marcará la hora exacta. ¿Cuál es ese día?

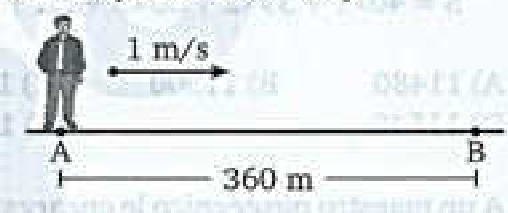
A) 24 / 07 B) 25 / 07 C) 26 / 07
D) 23 / 07 E) 20 / 07

46. Calcular:

$$S = 20\times1^2 + 19\times2^2 + 18\times3^2 + \ldots + 1\times20^2$$

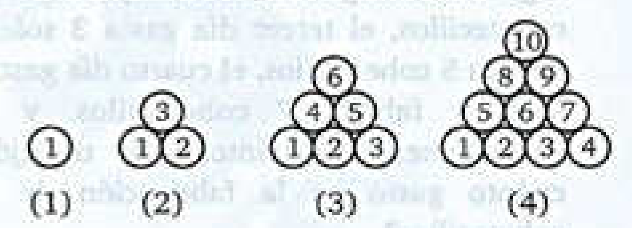
A) 16000 B) 16400 C) 17225
D) 16170 E) 17500

47. Juan, quien se encuentra en el punto A, se dirige hacia el punto B recorriendo 4/5 de la distancia que lo separa de B, y marca el punto C. Luego se dirige hacia A, recorriendo 4/5 de la distancia que lo separa de A y marca el punto D. Después se dirige hacia C recorriendo 4/5 de la distancia que lo separa de C, y marca el punto E; así sucesivamente. ¿A qué distancia de B se encontrará al cabo de x años? (considere $x \to \infty$)



A) 160 m B) 200 m C) 300 m
D) 140 m E) 240 m

48. En la siguiente secuencia, determinar la suma de los números impares de la figura (30).



A) 230^2 B) 235^2 C) 232^2
D) 233^2 E) 235^2

49. Si se cumple:

$$\overline{1n}_{(14)} + \overline{1n}_{(13)} + \overline{1n}_{(12)} + \ldots + \overline{1n}_{(n+1)} = 132$$

halle el mayor valor de n.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

50. Hallar el t_{21} en la siguiente sucesión:

3 ; 4 ; 8 ; 17 ; ...

A) 2873 B) 3314 C) 2783
D) 3413 E) 2870

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

Conteo de Figuras Geométricas

CAPACIDADES

- Desarrollar la capacidad visual.
- Fomentar el criterio de orden en el conteo de figuras.
- Potenciar la capacidad creativa.
- Aplicar técnicas deductivas e inductivas en el conteo de figuras.
- Aplicación de series.

Corte de banquetas

Toma una banqueta. Encuentra un cuadrado o rectángulo.

Ahora consigue un gis y comienza a pensar con ganas. Mira tu pedazo de banqueta e imagina cómo podrías dividirla en partes con sólo una línea recta. ¿Obtendrás siempre dos partes sin importar cómo traces la línea?

Supón que agregas otra línea recta. ¿Cuántas partes obtuviste? Trata de encontrar otra manera de hacer esto. ¿Puedes obtener un número diferente de partes?

¿Y con tres líneas rectas? Marca cada región al tiempo que las cuentas. Esto te ayudará a no perder la pista. ¿De cuántas maneras puedes dividir el cuadrado con tres rectas?

Ahora estas listo para la gran ocasión. ¡Cuatro rectas! (¿Tienes tu gis?)

¿Cuál es el menor número de regiones que puedes formar? ¿Cuál es el mayor número? ¿Puedes obtener todos los números intermedios de regiones? ¿Cuántas maneras puedes encontrar de obtener 5 regiones? ¿Qué te parece intentar dividir una banqueta con 5 rectas? ¿Con 6 rectas? ¿Qué tal una competencia en tu cuadra para encontrar el máximo de regiones que pueden obtenerse con 10 rectas? ¿Qué sucedería si pudieras hacer líneas curvas?

INTRODUCCIÓN

La experiencia de contar es una práctica cotidiana del ser humano que unida a la habilidad e ingenio posibilitan la cuantificación en forma contundente de figuras.

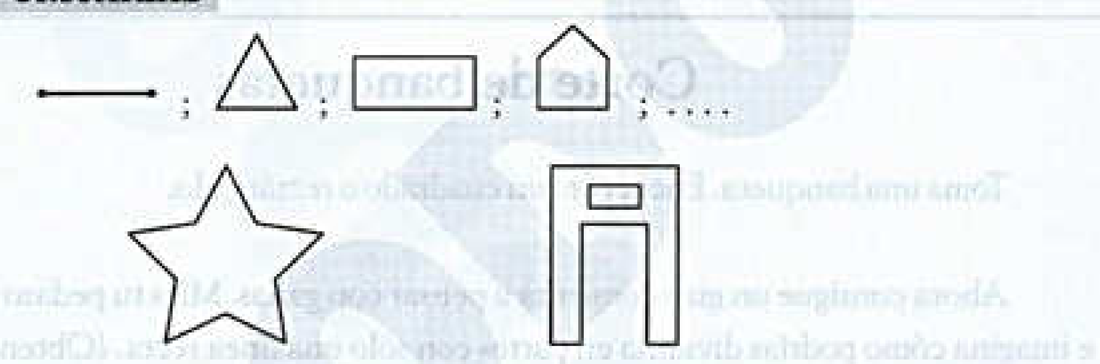
... Al pasar frente a un edificio de 30 pisos muchas veces nos preguntamos ¿cuántas oficinas habrán como máximo? y por lo tanto cuántas personas habrían en el edificio como máximo.

... ¿Cuántos cuadrados habrán en un tablero de ajedrez? ... etc. etc.

Ésta oportunidad desarrollaremos algunas técnicas que nos ayuden a ser eficaz en el conteo de figuras.

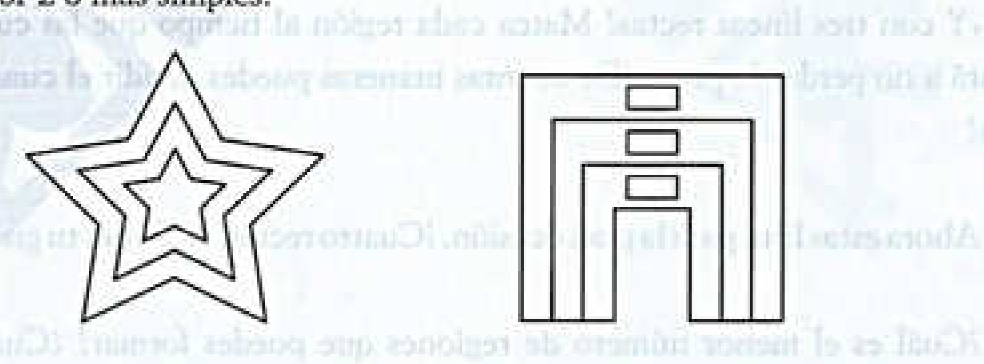
TIPOS DE FIGURAS

I. SIMPLES O UNITARIAS



II. COMPUESTAS

Conformados por 2 ó más simples.



Ejemplos: Cuántas regiones simples hay en:

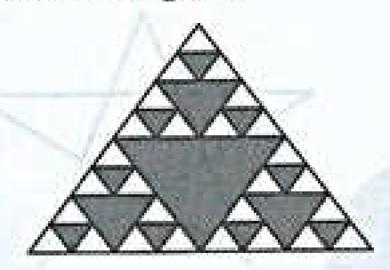
Observamos en total
9 regiones simples

TÉCNICAS DE CONTEO

I. POR SIMPLE INSPECCIÓN

En este método debemos fijarnos primero en las primeras formas que se presenta la figura pedida y luego contar por repetición secuencial.

Ejemplo: Hallar el número total de triángulos.



Resolución: Observamos que: se repite 3 veces

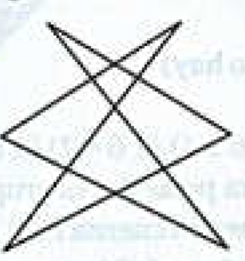
Por tanto sólo lo añadimos lo que falta, el central y el que encierra a todos.

$$3[17] + 2 = 53$$

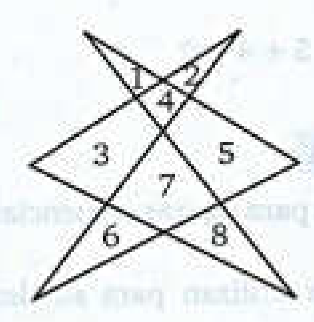
II. POR AGRUPACIÓN DE PARTES (DE SHOENK)

Se trata de asignar valores o variables a cada parte o porción de la gráfica, luego agrupar dichos elementos de 1 en 1 2 en 2, 3 en 3, etc. empezando por el menor valor.

Ejemplo: Hallar el total de triángulos en:



Resolución:



De 1 en 1: (1) (2) (6) (8) → 4 triángulos

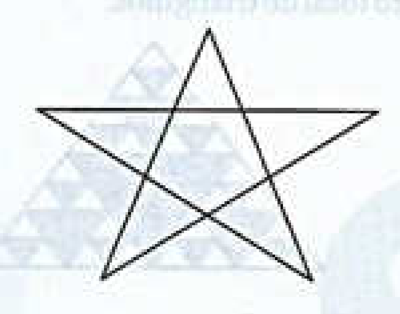
De 2 en 2: (1 4) (2 4) (6 7) (7 8) → 4 triángulos

De 3 en 3: (1 4 5) (2 4 3) (3 7 8) (5 7 6) → 4 triángulos

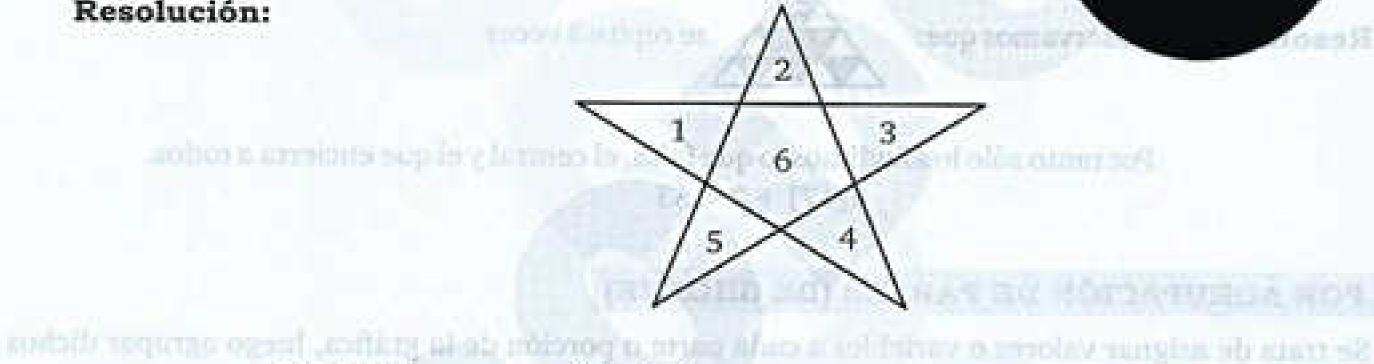
De 4 en 4: (No hay)

$\therefore\ 3(4) = 12$

Ejemplo: Hallar el total de cuadriláteros.



Resolución:



De 1 en 1: (No hay)

De 2 en 2: (1 6) (2 6) (3 6) (4 6) (5 6) → 5 cuadriláteros

De 3 en 3: (No hay)

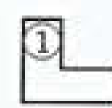
De 4 en 4: (1 6 3 4) (1 6 4 2) (2 6 5 4) (2 6 5 3)
Para posteriores grupos deberíamos empezar con 3 pero ya no tener en cuenta ni al ni al 2 y vemos que ya no existen.
→ 4 cuadriláteros

$\therefore\ 5 + 4 = 9$

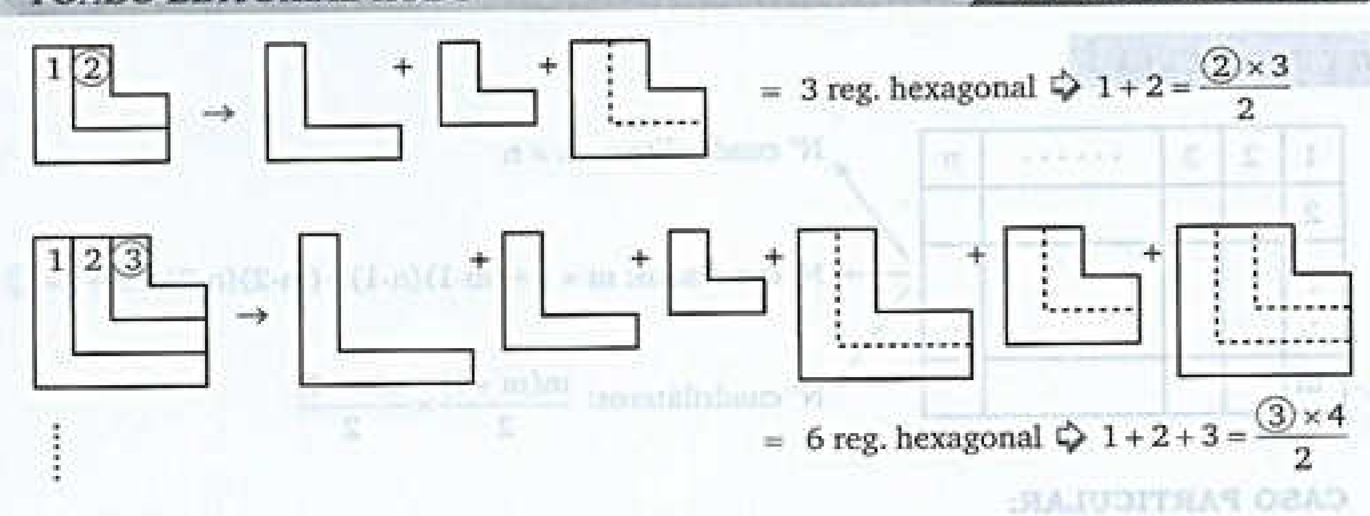
III. POR INDUCCIÓN O FÓRMULA

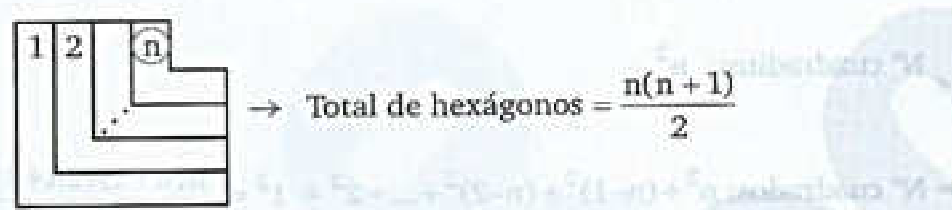
En éste caso solo se tendrá en cuenta para figuras secuencias y en la misma forma (repetitivas).

La modalidad que todos los casos utilizan para su demosttración lo veremos con regiones hexagonales.



→ 1 reg. hexagonal ⇨ $1 = \dfrac{①\times 2}{2}$





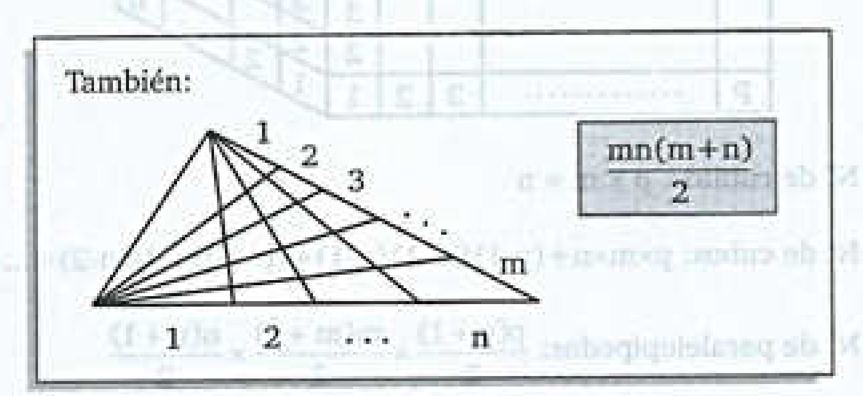
En general:

1 2 .... n

1	2	....	n

1
2
n

$$\frac{n(n+1)}{2}$$



$$\frac{mn(m+n)}{2}$$

EN CUADRÍCULAS

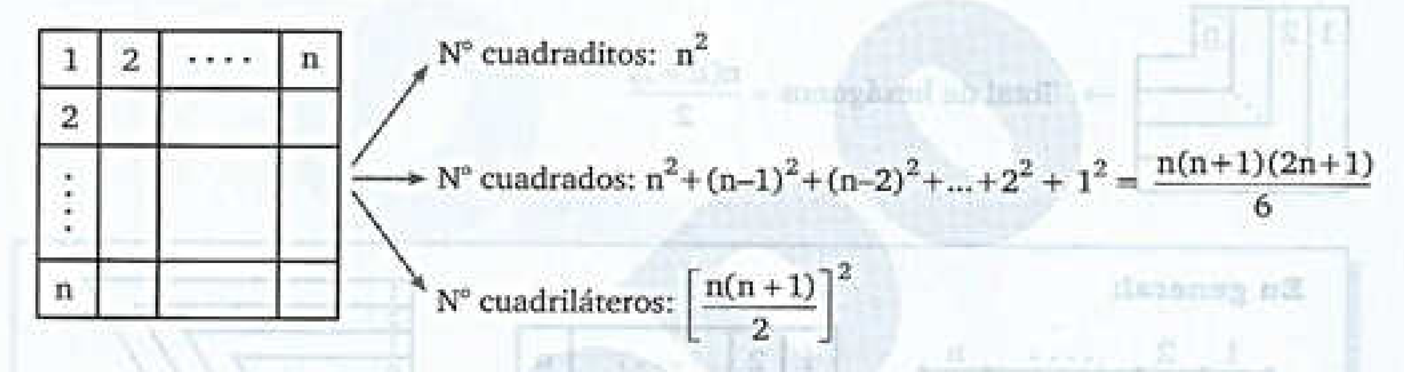
1	2	3	·······	n
2				
⋮				
m				

N° cuadraditos: $m \times n$

N° cuadrados: $m \times n + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + ... + 1 \times \bigcirc$

N° cuadriláteros: $\dfrac{m(m+1)}{2} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

CASO PARTICULAR:



N° cuadraditos: n^2

N° cuadrados: $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + 2^2 + 1^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

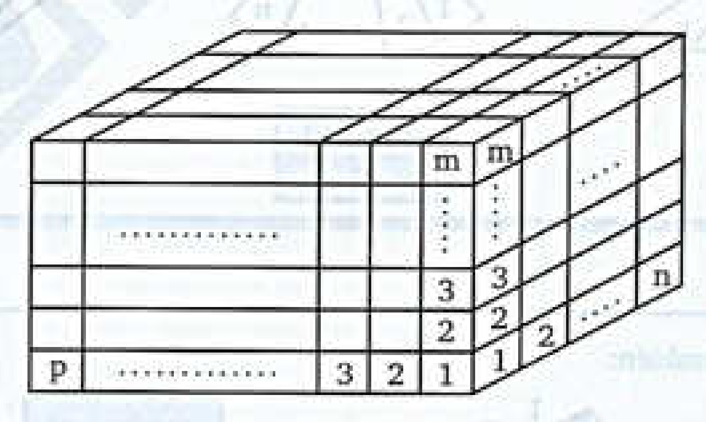
N° cuadriláteros: $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

NOTA "S"

En el caso que nos pidan cuadriláteros que no sean cuadrados (rectángulos), a todos los cuadriláteros le quitamos los que son cuadrados.

PARALELEPÍPEDOS

Se denomina así a los hexaedros con caras opuestas paralelas 2 a 2. Ejem: un ladrillo, una cajita de fósforo, un libro, un cubo, ... etc.



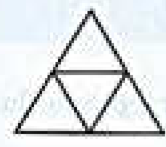
N° de cubitos: $p \times m \times n$

N° de cubos: $p \times m \times n + (p-1)(m-1)(n-1) + (p-2)(m-2)(n-2) + ... + 1 \times \bigcirc \times \bigcirc$

N° de paralelepípedos: $\dfrac{p(p+1)}{2} \times \dfrac{m(m+1)}{2} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

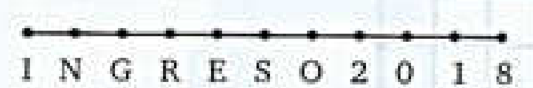
EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. ¿Cuántos cuadriláteros se cuentan en la siguiente figura?



Rpta.: ....

2. ¿Cuántos segmentos se cuentan en la siguiente figura?

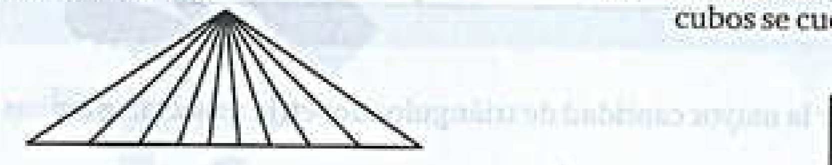


Rpta.: ....

3. ¿Cuántos ángulos menores de 180° se cuentan en la siguiente figura?

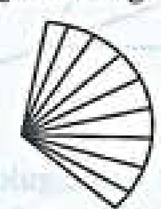
Rpta.: ....

4. ¿Cuántos triángulos se cuentan en la siguiente figura?



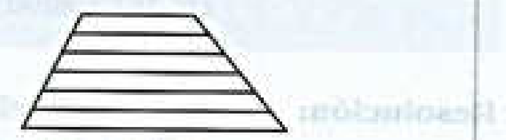
Rpta.: ....

5. ¿Cuántos sectores circulares se cuentan en la siguiente figura?



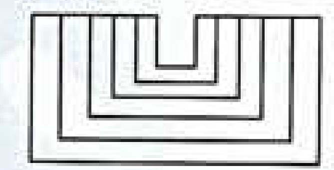
Rpta.: ....

6. ¿Cuántos cuadriláteros se cuentan en la siguiente figura?



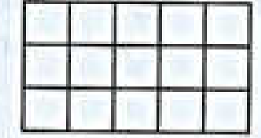
Rpta.: ....

7. ¿Cuántos octógonos se cuentan en la siguiente figura?



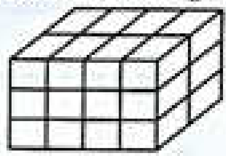
Rpta.: ....

8. ¿Cuántos cuadriláteros y cuántos cuadrados se cuentan en la siguiente figura?



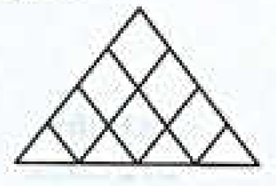
Rpta.: ....

9. ¿Cuántos paralelepípedos y cuántos cubos se cuentan en la siguiente figura?



Rpta.: ....

10. ¿Cuántos triángulos se cuentan en la siguiente figura?



Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Hallar el máximo número de cuadrados que se pueden formar con 12 palitos de 10 cm de longitud.

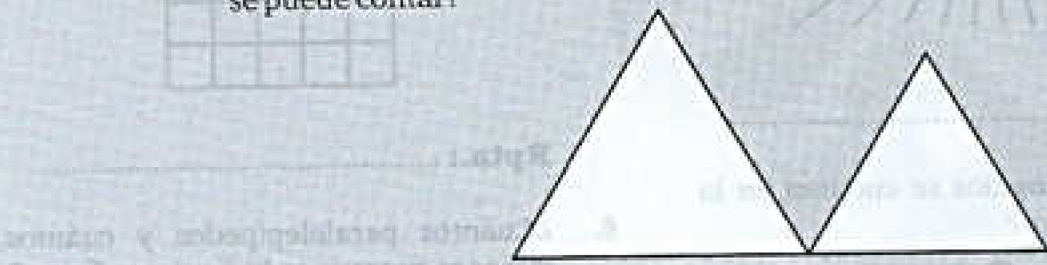
Resolución: Para obtener el máximo número deben estas interceptados la mayor cantidad de palitos tal que se generen muchos cuadrados:

5				
4				
3				
2				
1	2	3	4	5

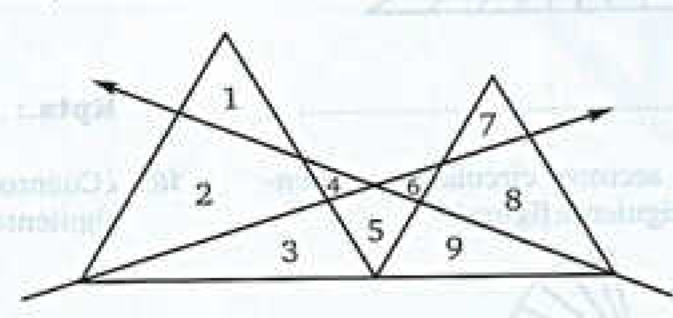
∴ N° de cuadrados en total:

$$5\times5+4\times4+\ldots+1\times1=\frac{5\times6\times11}{6}=55$$

PROBLEMA 2 Al gráfico mostrado se le añade 2 rectas ¿cuál es el máximo número de rectas que se puede contar?



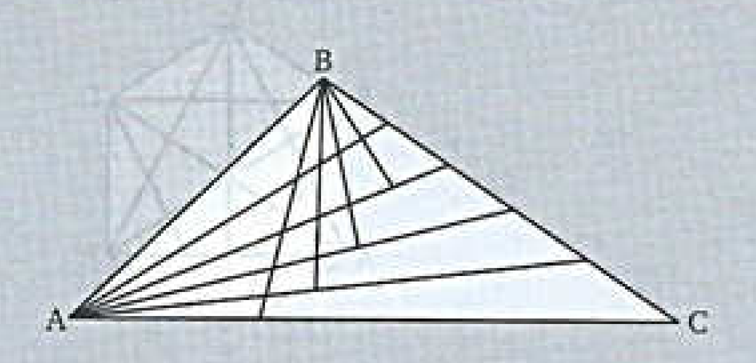
Resolución: Para obtener la mayor cantidad de triángulos deben intersectarse ambas rectas.



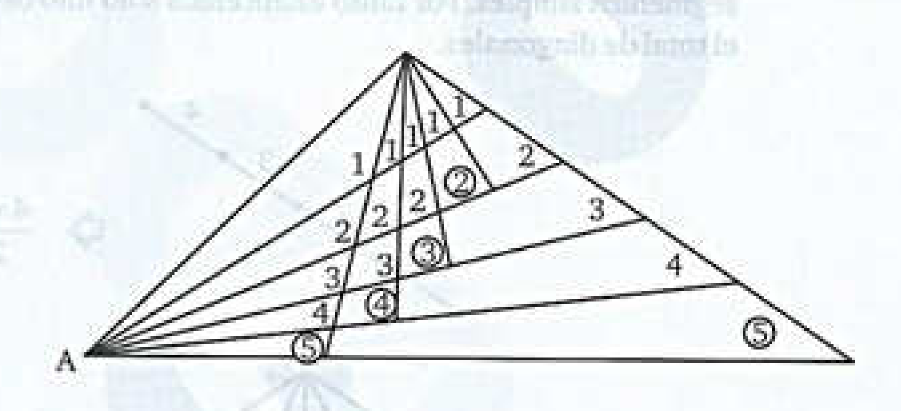
De 1 cifra: 1, 3, 4, 6, 7, 9 → 6 triángulos
De 2 cifras: (1 2) (2 4) (5 6) (6 8) (7 8) → 6 triángulos
De 3 cifras: (1 2 3) (3 5 6) (3 5 9) (4 5 9) (7 8 5) → 5 triángulos
De 5 cifras: (3 5 6 8 9) (2 4 3 5 9) → 2 triángulos

∴ TOTAL: 6 + 6 + 5 + 2 = 19 triángulos

PROBLEMA 3 Calcule el número de triángulos en la siguiente figura.

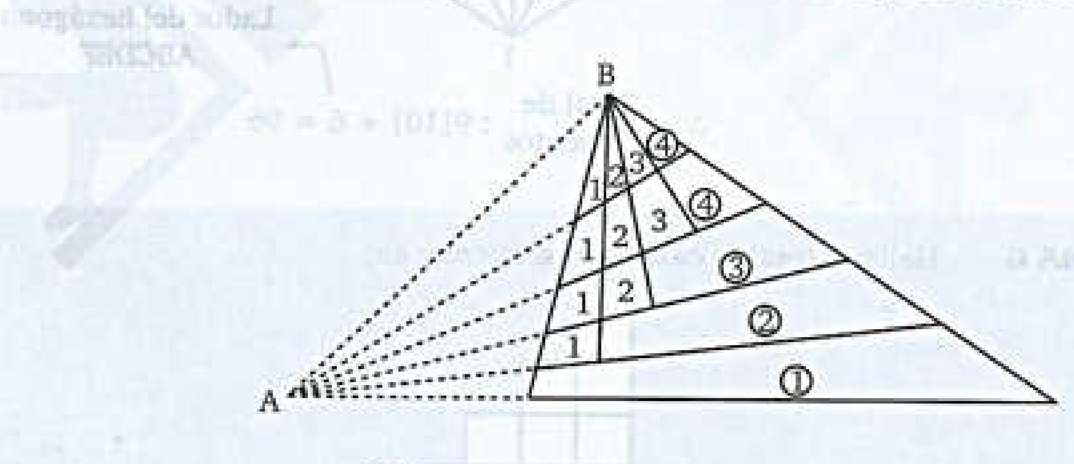


Resolución: Fase 1: Contando a los triángulos que contienen al vértice A.



$$\text{N° de triángulos} = \frac{5\times6}{2}+\frac{4\times5}{2}+\frac{3\times4}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{5\times6}{2}=49$$

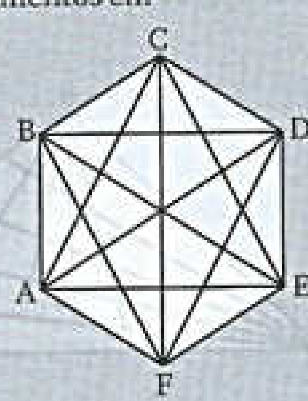
Fase 2: Contando a los triángulos que contienen al vértice B pero NO al vértice A.



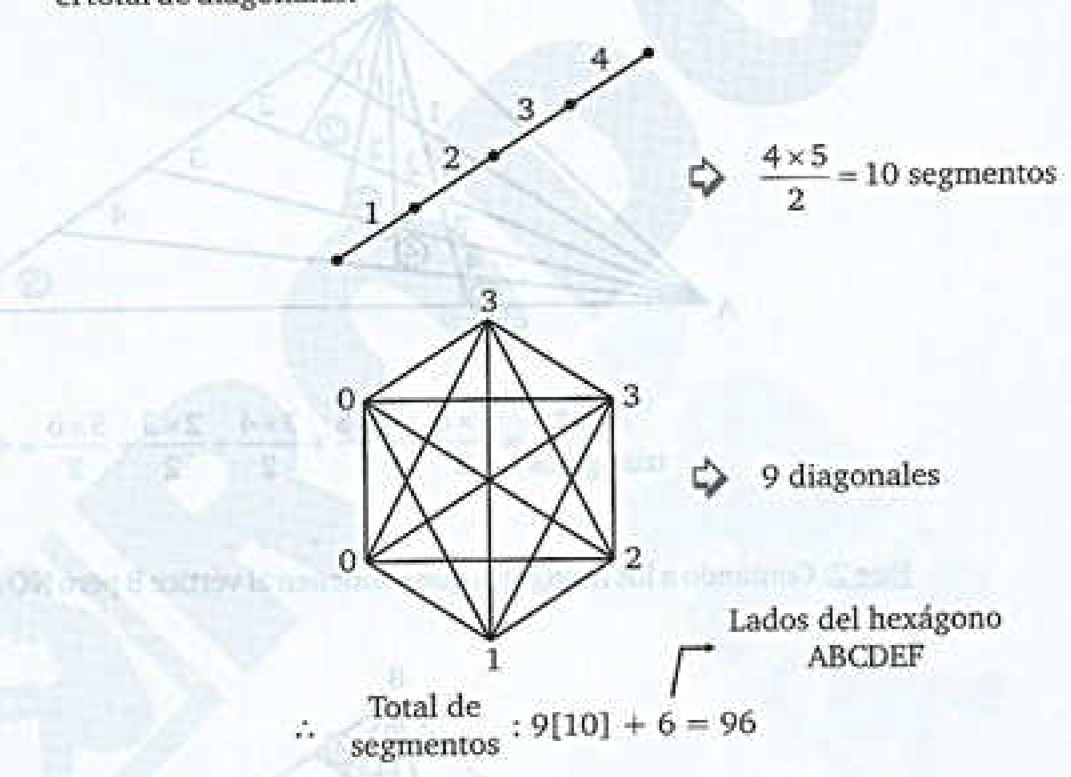
$$\text{N° de triángulos} = \frac{4\times5}{2}+\frac{4\times5}{2}+\frac{3\times4}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{1\times2}{2}=30$$

$$\therefore \text{Total de triángulos que hay en la figura} = 49+30=79$$

PROBLEMA 4 Hallar el total de segmentos en:



Resolución: Observamos que todos las diagonales del hexágono están compuestos por 4 segmentos simples. Por tanto analicemos sólo uno de ellos y lo multiplicamos por el total de diagonales.

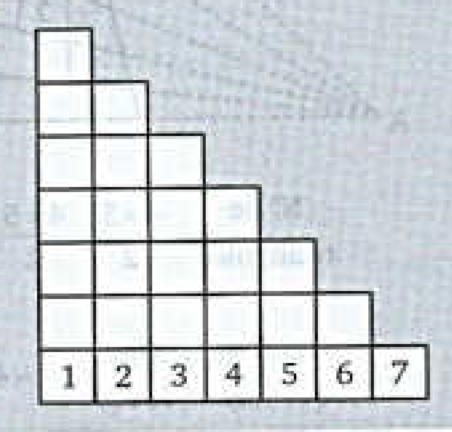


$\Rightarrow \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$ segmentos

$\Rightarrow$ 9 diagonales

$\therefore$ Total de segmentos : $9[10] + 6 = 96$

PROBLEMA 6 Hallar el total de cuadrados existentes en:



Resolución: Contemos ordenadamente desde el más pequeño:

De 1 casillero por lado $\rightarrow$ $1+2+3+...+7=\frac{7\times 8}{2}$

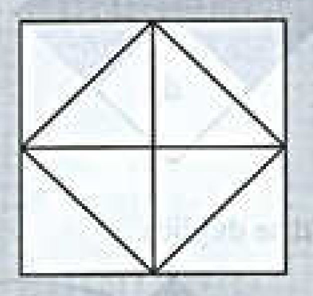
De 2 casilleros por lado $\rightarrow$ $1+2+3+...+5=\frac{5\times 6}{2}$

De 3 casilleros por lado $\rightarrow$ $1+2+3=\frac{3\times 4}{2}$

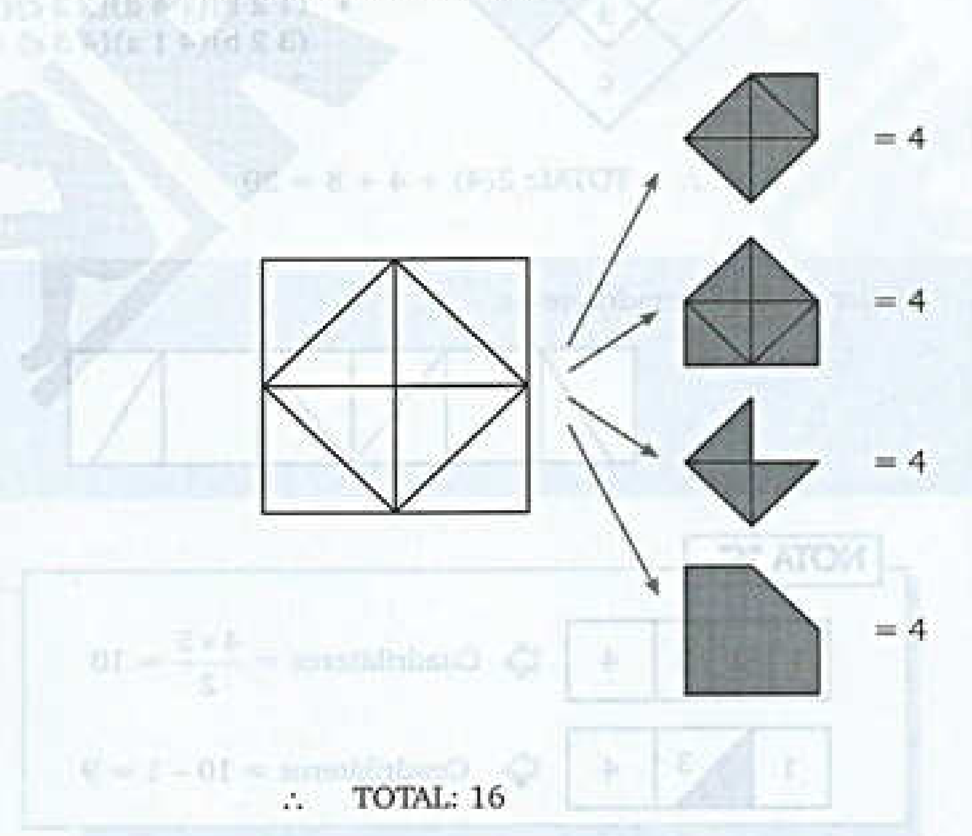
De 4 por lado $\rightarrow$ $1=\frac{1\times 2}{2}$

$\therefore$ TOTAL: $28+15+6+1=50$

PROBLEMA 6 Hallar el número máximo de pentágonos en:

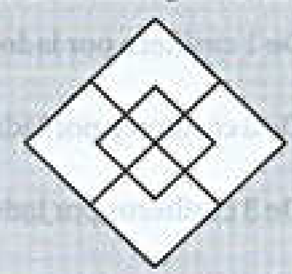


Resolución: Primero observemos las diversas formas de pentágonos y luego vemos de cada uno de dichas formas, cuántas hay.

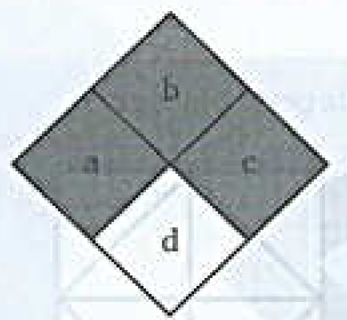


$\therefore$ TOTAL: 16

PROBLEMA 7 Hallar la cantidad total de hexágonos en:

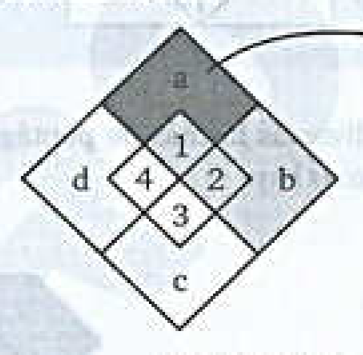


Resolución: Al igual que en el caso anterior contaremos sin fórmulas, pero aquí hay 2 figuras que se repiten en su forma, busquemos en ella la cantidad de hexágonos y luego por 2.



⇨ Hexágonos: $\underbrace{(a\ b\ c)(b\ c\ d)(c\ d\ a)(d\ a\ b)}_{4}$

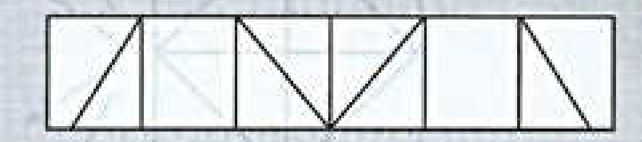
Esta cantidad se duplica.



- Hexágonos que no se contaron: 4 (a b c d)
- (1 2 b)(1 4 d)(2 3 c)(2 1 a)(3 4 d) (3 2 b)(4 1 a)(4 3 c) = 8

∴ TOTAL: 2(4) + 4 + 8 = 20

PROBLEMA 8 Hallar el total de cuadriláteros:



Resolución:

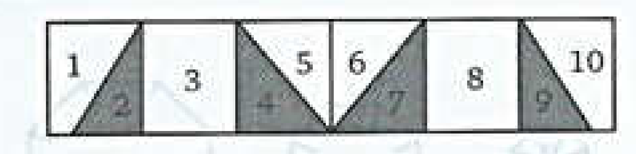
NOTA "S"

1	2	3	4

⇨ Cuadriláteros $= \frac{4 \times 5}{2} = 10$

1	2 / 3	4

⇨ Cuadriláteros = 10 − 1 = 9



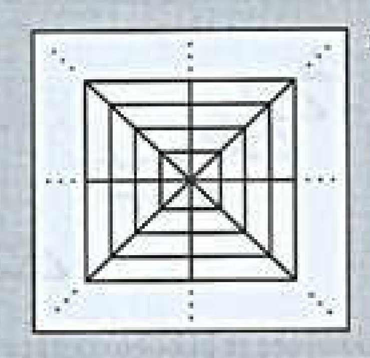
Deberán haber: $\frac{10 \times 11}{2}$ cuadriláteros

Pero hay que quitar los triángulos:

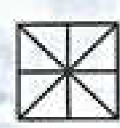
{(2); (4); (7); (9); (5); (6); (5; 6)} → 7 triángulos

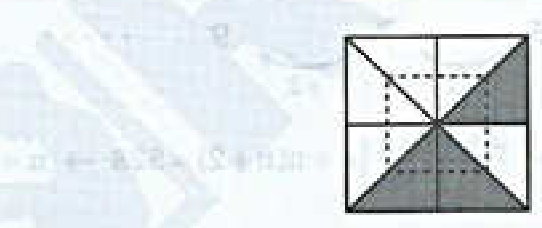
$$\therefore \quad \text{TOTAL: } \frac{10 \times 11}{2} - 7 = 48$$

PROBLEMA 9 Hallar el total e triángulos en:



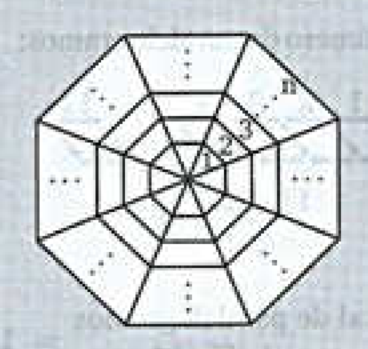
Resolución:

 = 16 triángulos

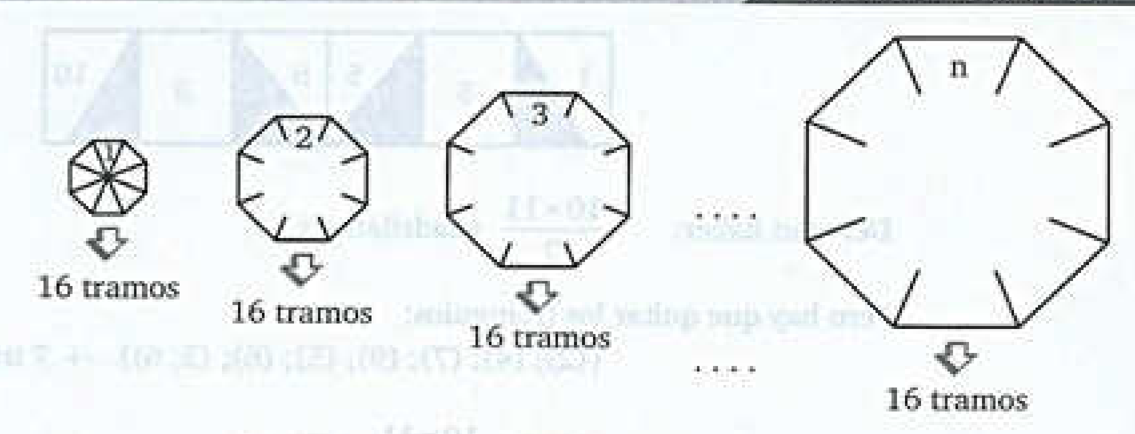
 = 16 triángulos

∴ Como son n cuadrados y en cada uno hay 16 el total será: 16n

PROBLEMA 10 Cuántos tramos tuvo que unir una araña para tejer su tela araña.

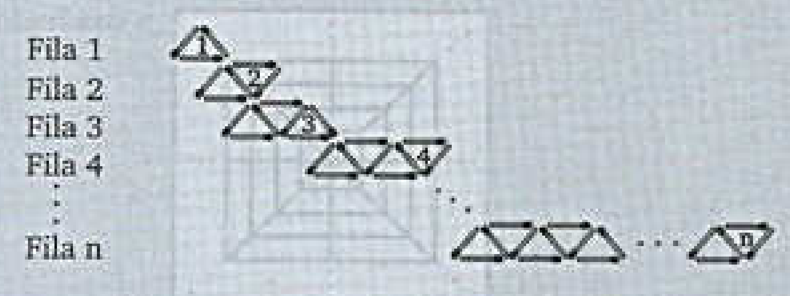


Resolución:



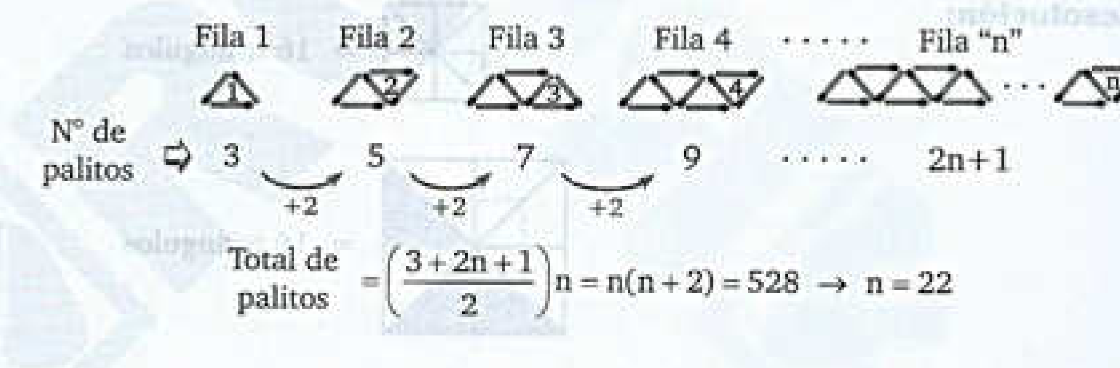
$\therefore$ TOTAL: $16 \times n$

PROBLEMA 11 Ronald ha utilizado 528 palitos de fósforo en la construcción del siguiente arreglo:



¿Cuántos paralelogramos se pueden contar en la última fila "n"?

Resolución:



Total de palitos $= \left(\dfrac{3+2n+1}{2}\right)n = n(n+2) = 528 \rightarrow n = 22$

NOTA "S"

Recuerda:

$S_A = \left(\dfrac{a+u}{2}\right)n$

a: primero; u: último; n: número de términos

Luego en la última fila tenemos:

1 2 3 .... 10 11

1 2 3 4 5 6 7 .... 19 20 21 22

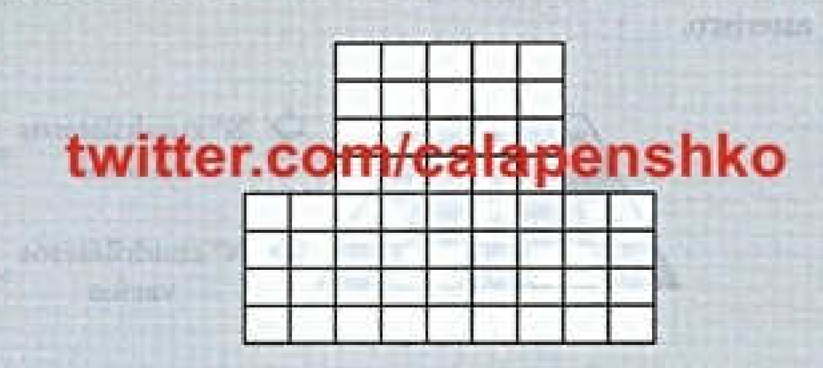
Contando el número de paralelogramos:

1 2 3 4 ... 11 — $\dfrac{11\times 12}{2} = 66$

1 2 3 ... 9 10 — $\dfrac{10\times 11}{2} = 55$

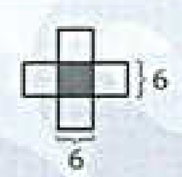
$\therefore$ Total de paralelogramos en la fila 12 $= 121$

PROBLEMA 12 Hallar el total de cuadriláteros en:



Resolución:

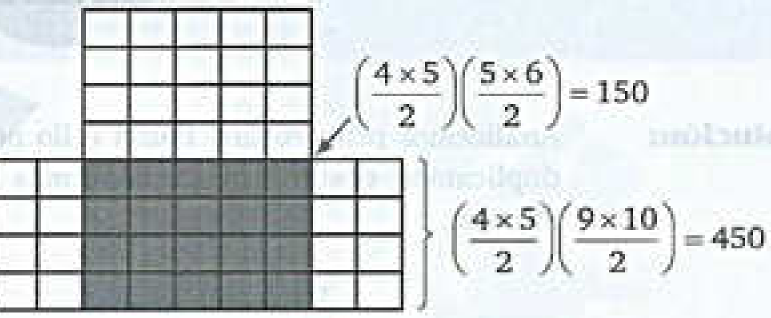
NOTA "S"



El total de cuadriláteros es igual a lo que hay en la vertical más lo que hay en la horizontal menos los cuadriláteros que hay en la intersección 6+6–1=11

En el problema:

$$\left(\frac{8\times 9}{2}\right)\left(\frac{5\times 6}{2}\right)=540$$

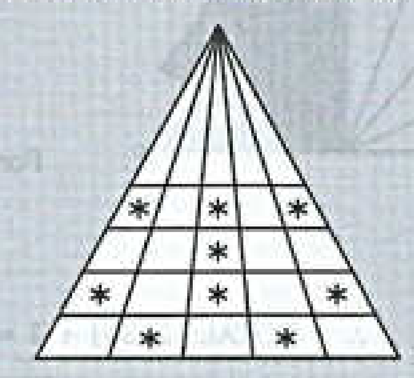


$$\left(\frac{4\times 5}{2}\right)\left(\frac{5\times 6}{2}\right)=150$$

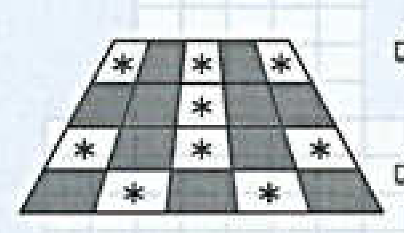
$$\left(\frac{4\times 5}{2}\right)\left(\frac{9\times 10}{2}\right)=450$$

$\therefore$ TOTAL: $540 + 540 - 150 = 840$

PROBLEMA 13 Hallar el total de cuadriláteros que tengan por lo menos un asterisco.



Resolución: Primero calcularemos el total de cuadriláteros y luego le restaremos el número de cuadriláteros vacíos y lo que resulta serán los cuadriláteros con al menos un asterisco.

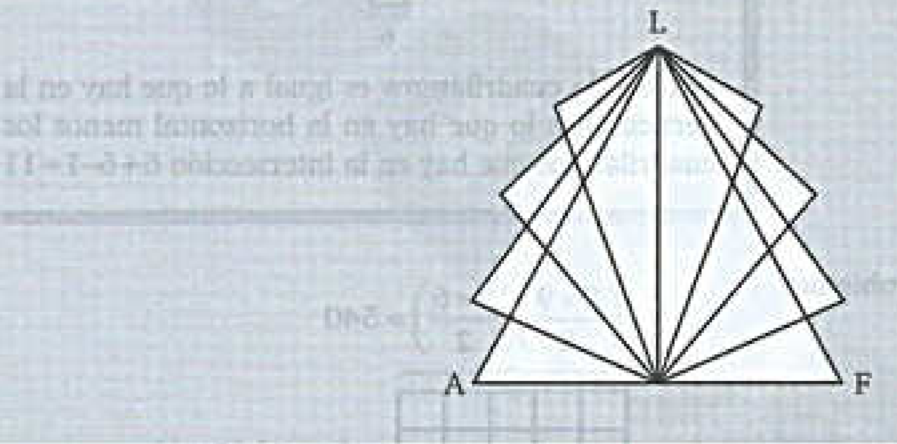


⇨ Nº cuadriláteros en total $= \left(\frac{4\times5}{2}\right)\left(\frac{5\times6}{2}\right) = 150$

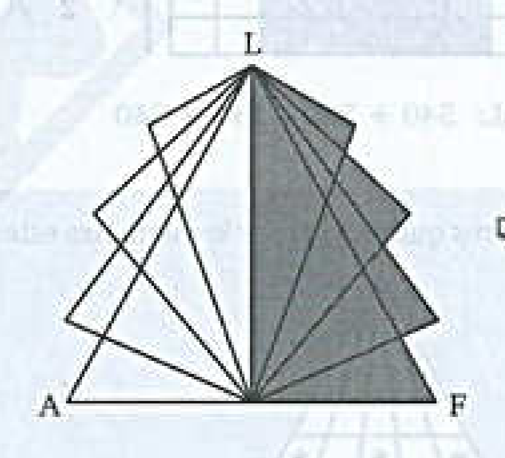
⇨ Nº cuadriláteros vacíos $= 2[8] + 3 = 19$

$\therefore$ Cuadriláteros pedidos $= 150 - 19 = 131$

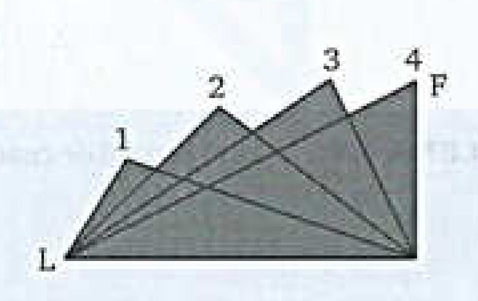
PROBLEMA 14 Hallar el total de triángulos en:



Resolución: Analicemos primero una mitad (ello por que la figura es simétrica) y luego lo duplicamos; posteriormente añadimos aquellos que aparecen por juntar ambas mitades.



⇨

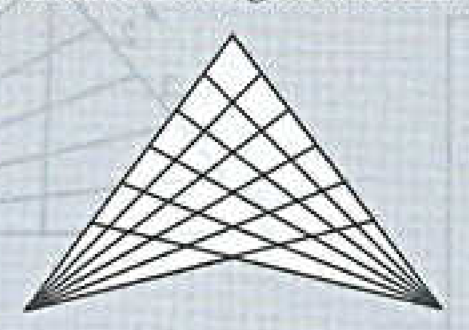


Por deducción se llega:

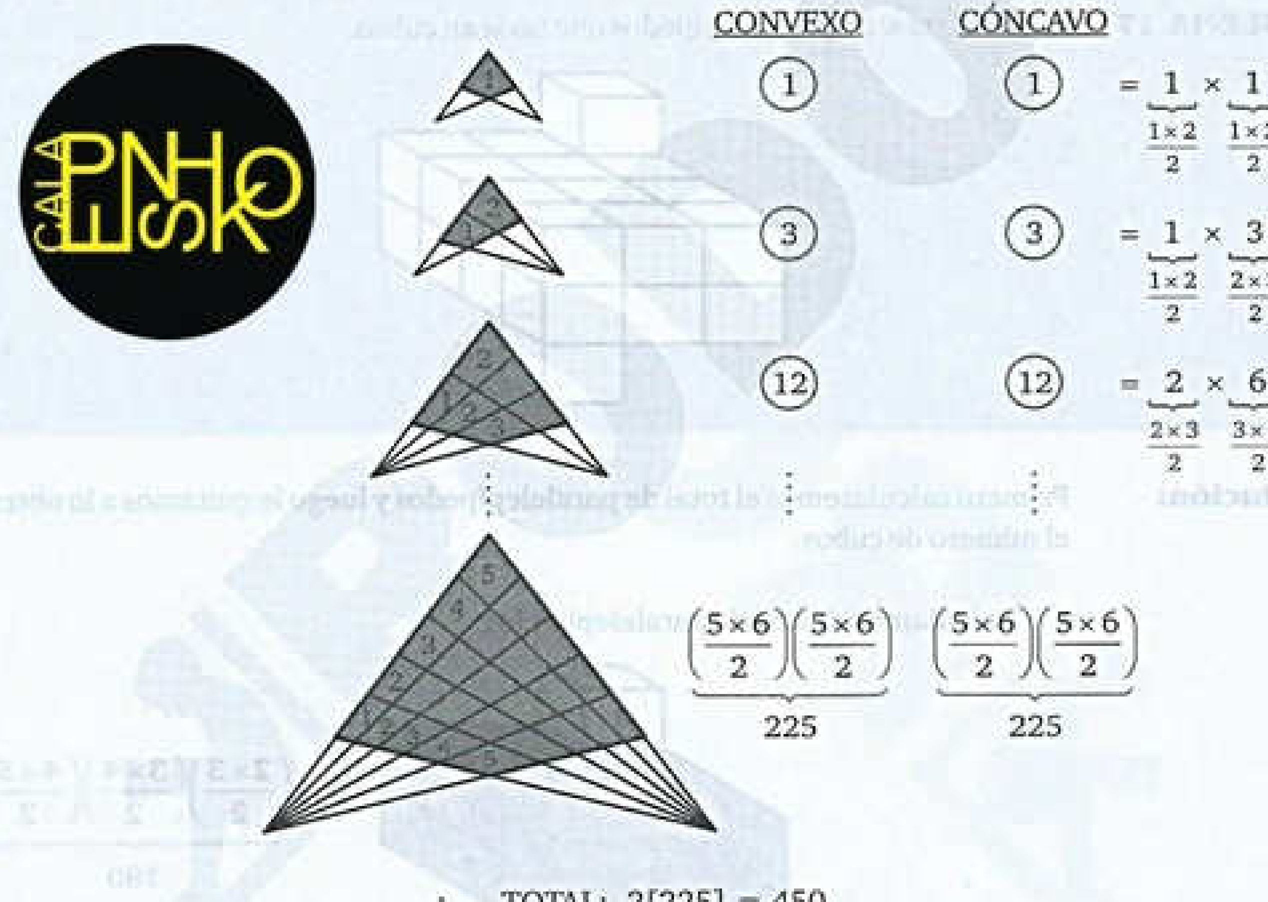
12 + 22 + 32 + 42 = 30 triángulos

$\therefore$ TOTAL: $2[30] + \underbrace{1}_{\text{ALF (único)}} = 61$

PROBLEMA 15 Hallar el total de cuadriláteros en la figura mostrada.



Resolución: En la gráfica se observa cuadriláteros convexos (◇) y cóncavos (△). Desarrollando en forma inductiva:

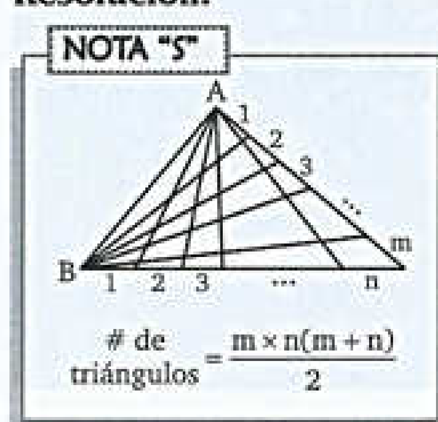


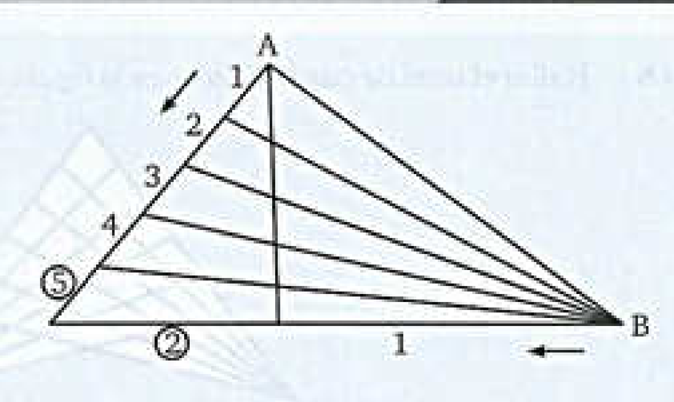
$\therefore$ TOTAL: 2[225] = 450

PROBLEMA 16 Determine la cantidad de triángulos que contiene la figura adjunta.

ADMISIÓN UNI 2016-II

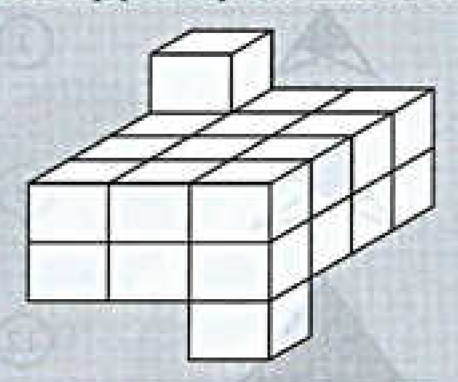
Resolución:





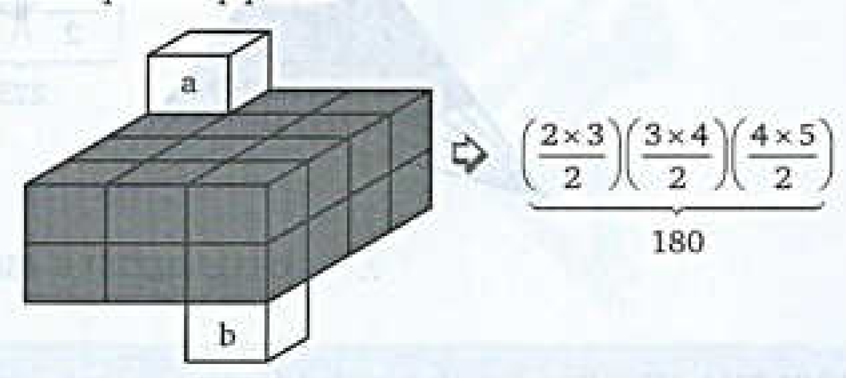
$\therefore$ # de triángulos $= \frac{2\times5\times(2+5)}{2} = 35$

PROBLEMA 17 Hallar el total de paralelepípedos que no sean cubos.



Resolución: Primero calcularemos el total de paralelepípedos y luego le quitamos a lo obtenido el número de cubos.

1° Calculamos el total de paralelepípedos:



$\left(\frac{2\times3}{2}\right)\left(\frac{3\times4}{2}\right)\left(\frac{4\times5}{2}\right)$ = 180

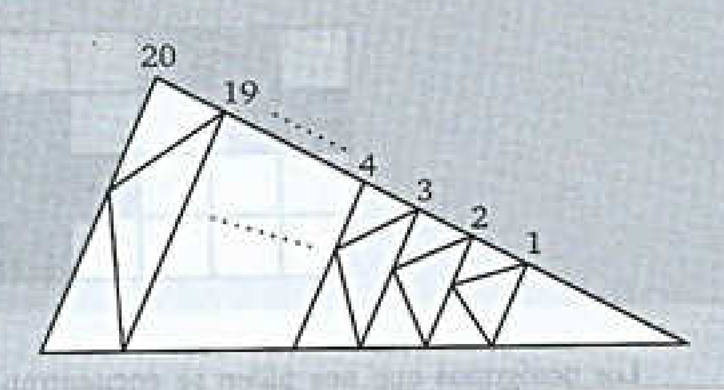
con "b": (b) (b 1) (b 1 2) = 3
con "a": También 3

$\therefore$ Total de paralelepípedos: 180 + 2(3) = 186

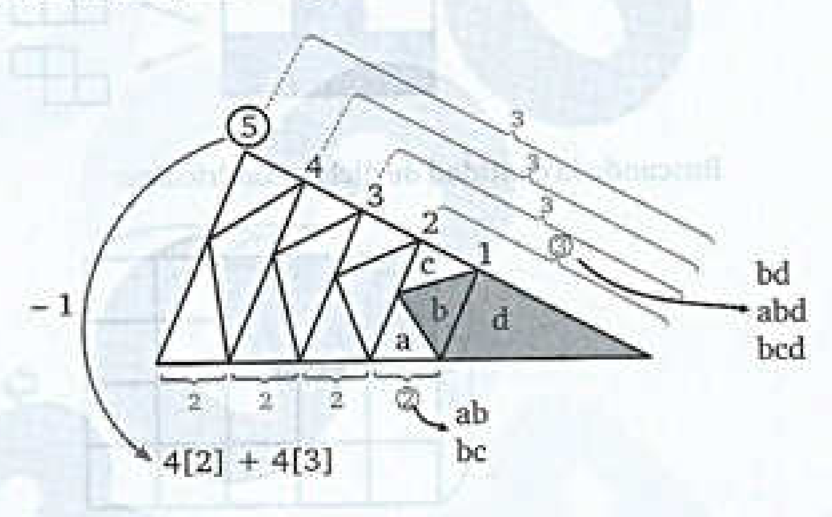
2° Cálculo de cubos: $3\times2\times4 + 2\times1\times3 + \underbrace{(a)}_{1} + \underbrace{(b)}_{1} = 32$

$\therefore$ Los paralelepípedos que no son cubos serán: 186 − 32 = 154

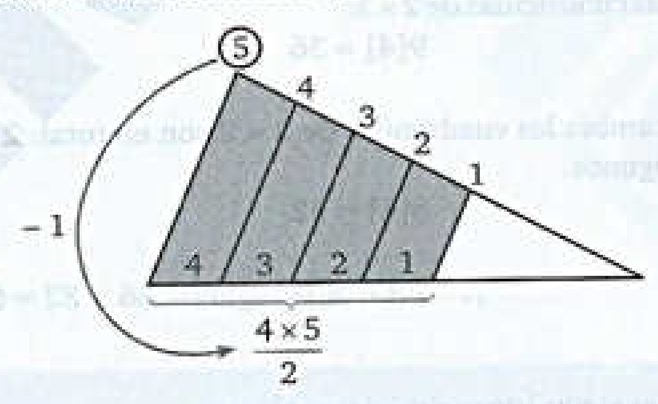
PROBLEMA 18 Hallar el total de cuadriláteros en:



Resolución: * Primero haremos el desarrollo en una figura de numeración pequeña y en forma análoga proyectamos para el mayor:



** Ahora contamos los cuadriláteros que se encuentran como franjas oblicuas:

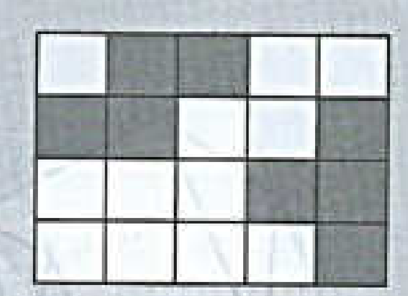


➩ Para numeración 5 : $4[2]+4[3]+\frac{4\times 5}{2}$ (–1, –1, –1)

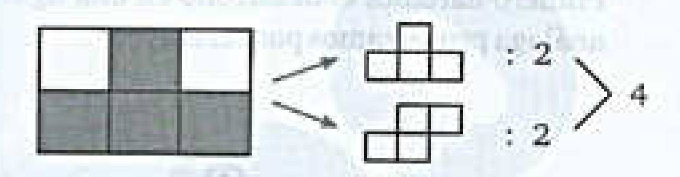
➩ Para numeración 20: $19[2]+19[3]+\frac{19\times 20}{2}$ (–1, –1, –1)

∴ TOTAL: 285

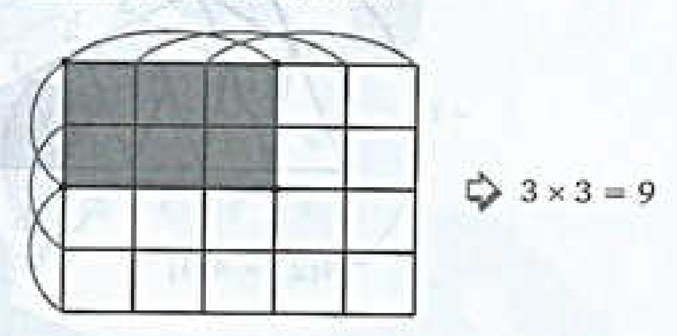
PROBLEMA 19 Hallar el total de octógonos con $4u^2$ de área en la cuadrícula mostrada:



Resolución: Los octógonos que nos piden se encuentran en cuadrículas de 2×3 ó 3×2; analizando el primero caso:



Buscando la cantidad de dichas cuadrículas:



En las cuadrículas de 2×3:

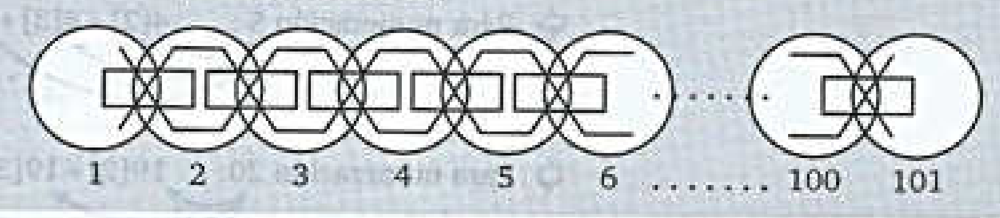
$$9[4] = 36$$

En cambio las cuadrículas de 3×2 son en total: $2 \times 4 = 8$ y en cada uno hay 4 octógonos.

$$8[4] = 32$$

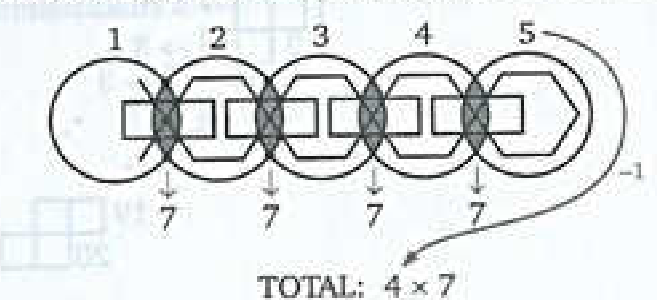
$\therefore$ Total de octógonos: $36 + 32 = 68$

PROBLEMA 20 Hallar el total de puntos de corte en:



Resolución: La mayor concentración de puntos de corte se dan en las intersecciones de circunferencias.

Por analogía desarrollaremos en base a una cadena de 5 circunferencias:

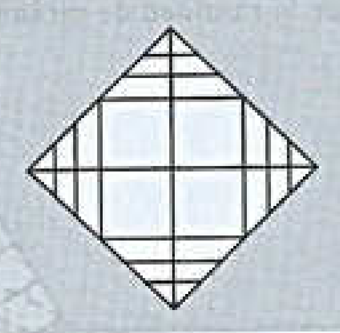


TOTAL: 4×7

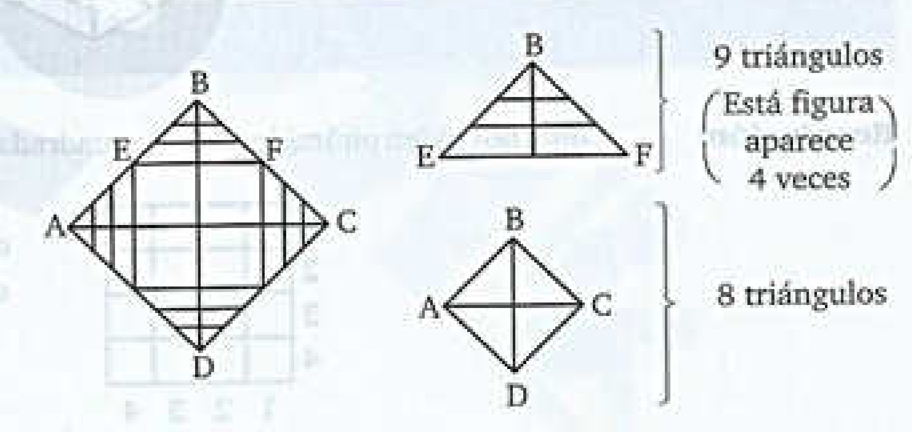
$\therefore$ En el gráfico original de 101 números:

$100 \times 7 = 700$ puntos

PROBLEMA 21 El número de triángulos en la figura es:

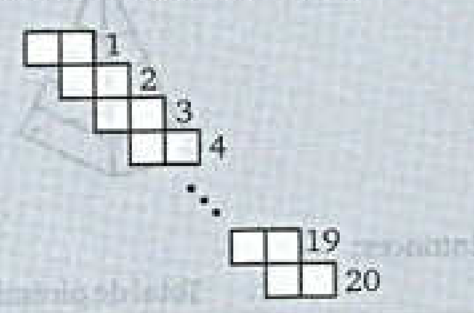


Resolución:

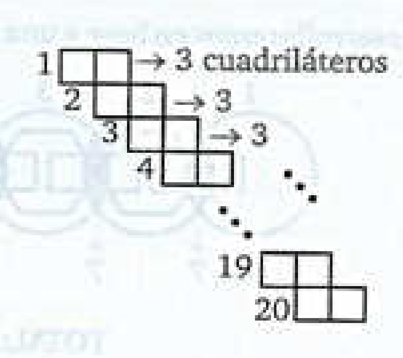


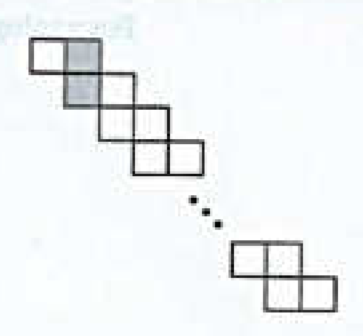
$\therefore$ Total $= 4(9) + 8 = 44$ triángulos

PROBLEMA 22 Hallar el número de cuadrados en la siguiente figura.



Resolución:



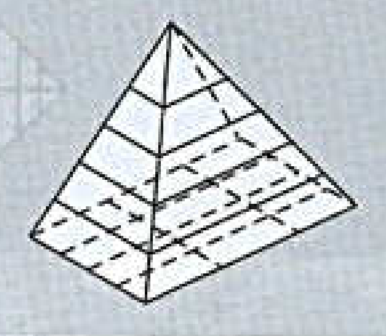


30(3) = 60 cuadriláteros

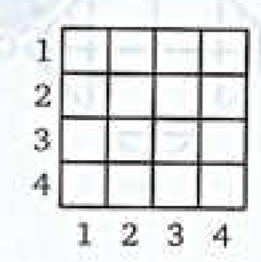
como el sombreado hay 19 cuadriláteros.

∴ Total = 60 + 19 = 79

PROBLEMA 23 Determine la cantidad de pirámides de base cuadrada que contiene el siguiente sólido:

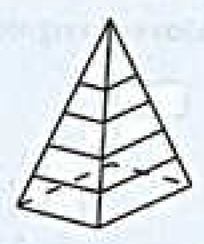


Resolución: Como nos piden pirámides de base cuadrada, en la base contaremos cuadrados



$$\text{número de cuadrados} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4\times5\times9}{6} = 30$$

Son 30 cuadrados, cada uno de ellos sera base de las pirámides. Tomemos uno de los cuadrados como referencia.

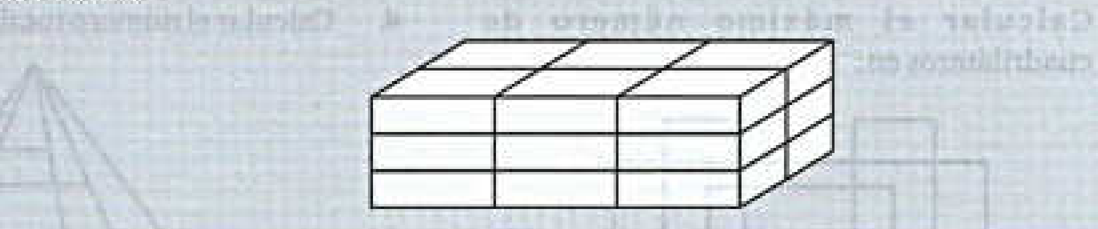


se pueden contar 6 pirámides

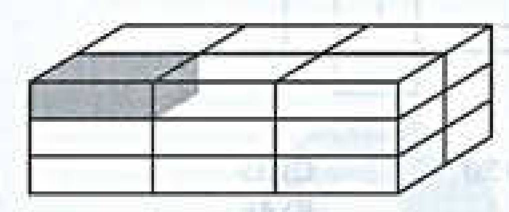
Entonces:

∴ Total de pirámides = 30 × 6 = 180

PROBLEMA 24 En la figura de 18 planchas, ¿cuántas planchas están en contacto, cara a cara, con otras tres?



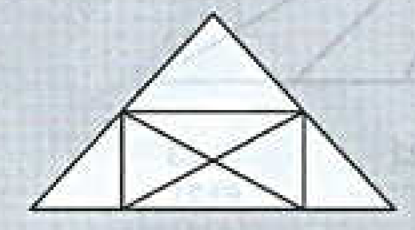
Resolución:



La plancha sombreada está en contacto, de cara, con otras 3, y así como ella las otras 7 que están en las otras esquinas también.

∴ En total son 8 planchas

PROBLEMA 25 ¿Cuántos triángulos em total presenta la figura?



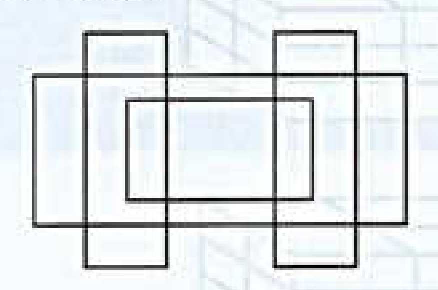
Resolución:

con 1 dígito: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 → 7 triángulos
con 2 dígitos: 24, 26, 45, 56 → 4 triángulos
con 3 dígitos: 345, 567 → 2 triángulos
con 4 dígitos: ninguno
con 5 dígitos: ninguno
con 6 dígitos: ninguno
con 7 dígitos 1234567 → 1 triángulo
Total = 7 + 4 + 2 + 1

∴ Total = 14 triángulos

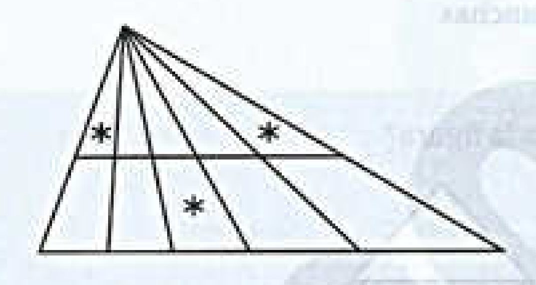
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el máximo número de cuadriláteros en:



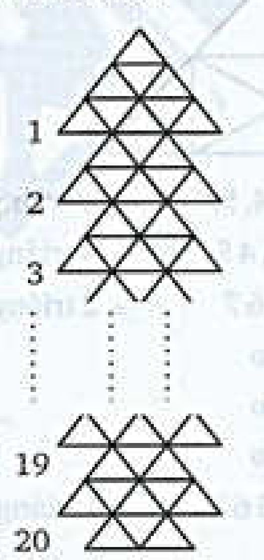
A) 25 B) 30 C) 35
D) 40 E) 45

2. En la siguiente figura, ¿cuántos triángulos tienen por lo menos un asterisco?



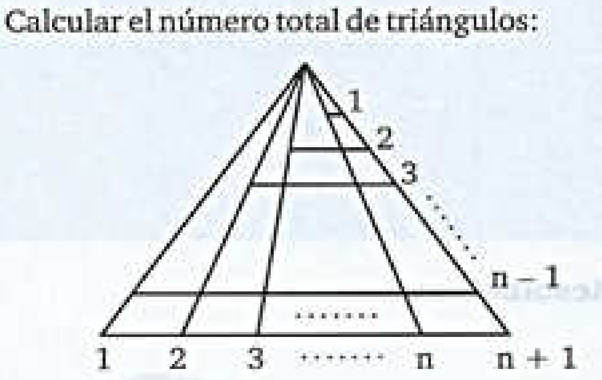
A) 20 B) 22 C) 23
D) 24 E) 21

3. En la figura mostrada, ¿cuántos triángulos se pueden contar en total?



A) 250 B) 252 C) 254
D) 266 E) 248

4. Calcular el número total de triángulos:

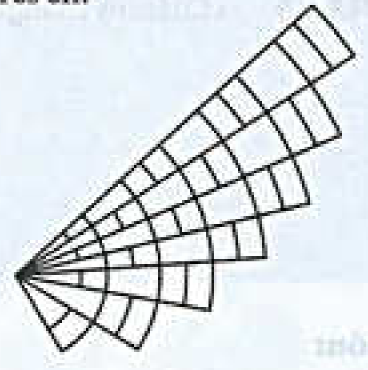


A) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ B) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

C) $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

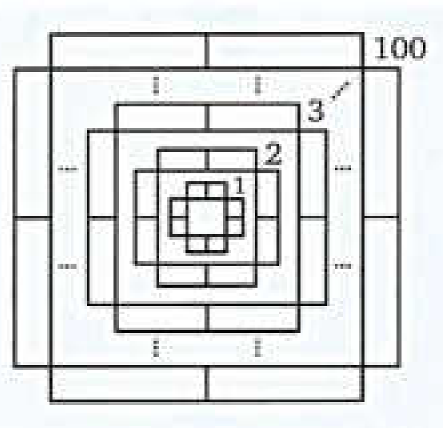
D) $\frac{n(2n+1)(n+3)}{3}$ E) n^3+n^2+n+1

5. En la figura hallar el número de sectores circulares en:



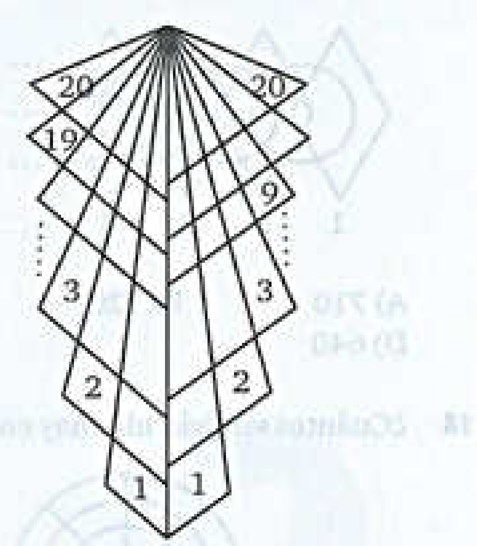
A) 90 B) 95 C) 100
D) 99 E) 105

6. Hallar el número total de cuadriláteros en:



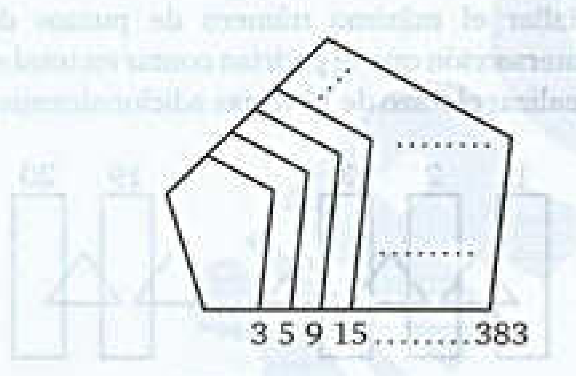
A) 2100 B) 2300 C) 2400
D) 2650 E) 2710

7. En la figura, hallar el número de triángulos:



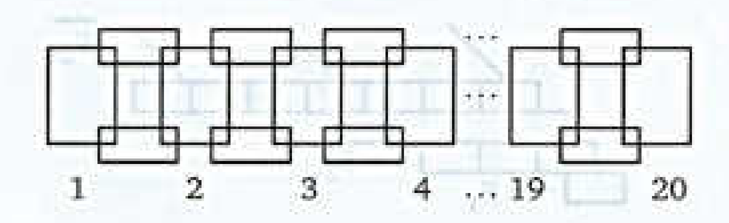
A) 3080 B) 2880 C) 3200
D) 4200 E) 3100

8. Calcular la diferencia entre el número t total de hexágonos y número total de pentágonos existentes en la siguiente figura:



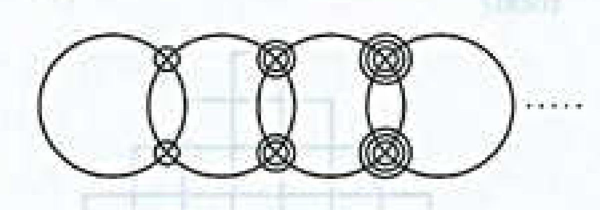
A) 170 B) 160 C) 180
D) 190 E) 210

9. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar en total en la siguiente figura?



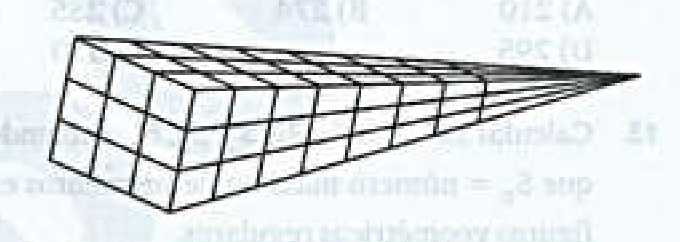
A) 153 B) 163 C) 172
D) 182 E) 192

10. ¿Cuántos puntos de corte se generan si se llegan a trazar 225 circunferencias?



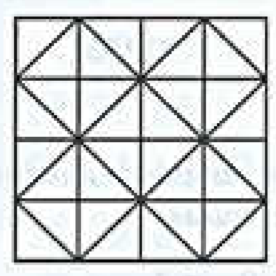
A) 800 B) 900 C) 990
D) 980 E) 875

11. ¿Cuántas pirámides de base cuadrada hay en el sólido mostrado?



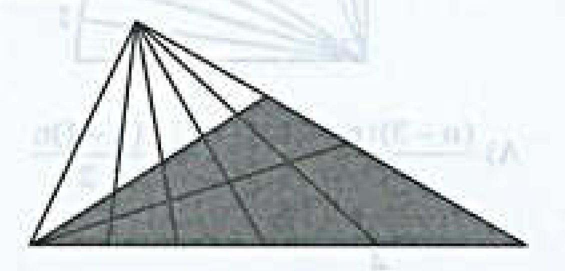
A) 1(n) B) 14(n – 1) C) 14
D) 14(n + 1 E) 13n

12. Calcular el número total de cuadrados:



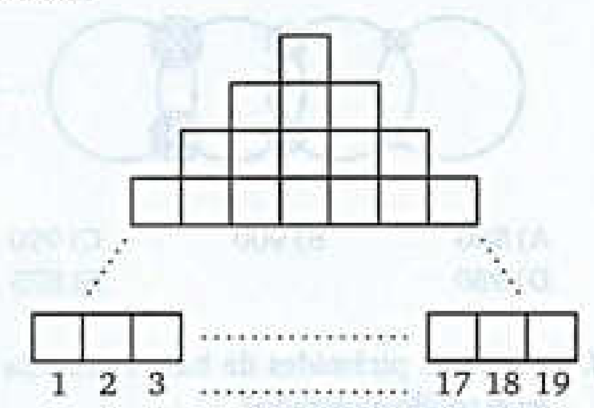
A) 40 B) 35 C) 32
D) 33 E) 42

13. ¿Cuántos triángulos se cuentan como máximo en:



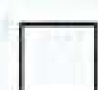
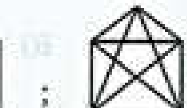
A) 180 B) 195 C) 160
D) 205 E) 3005

14. Si la figura está formada por cuadraditos iguales, ¿cuántos cuadrados se contaran en total?



A) 210 B) 274 C) 285
D) 295 E) 310

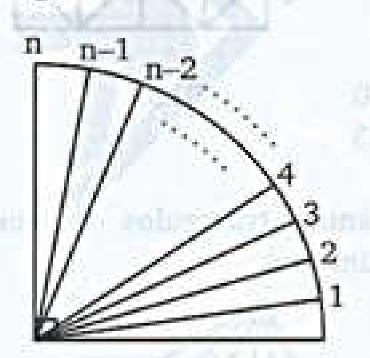
15. Calcular la suma de S_1, S_2, S_3, S_4, sabiendo que S_n = número máximo de segmentos en figuras geométricas regulares.

;  ;  ; ...

$S_1 = 3$ $S_2 = 10$ $S_3 = ...$ $S_4 = ...$

A) 110 B) 153 C) 160
D) 180 E) 164

16. ¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?

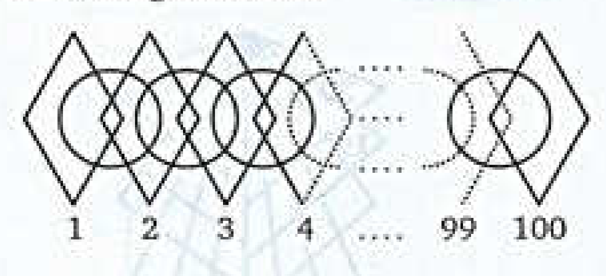


A) $\frac{(n-3)(n+2)}{2}$ B) $\frac{(n-1)n}{2}$

C) $\frac{(n-1)(n+1)}{2}$

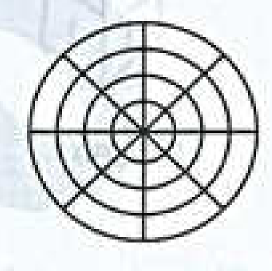
D) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ E) $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$

17. Calcular el número total de puntos de corte entre las figuras dadas.



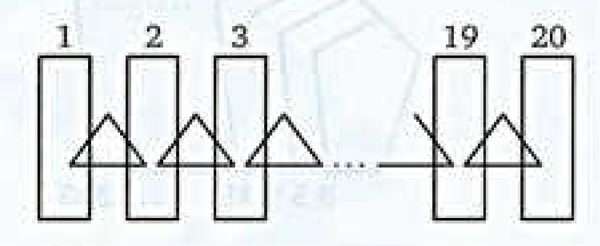
A) 710 B) 720 C) 810
D) 640 E) 700

18. ¿Cuántos semicírculos hay en total?



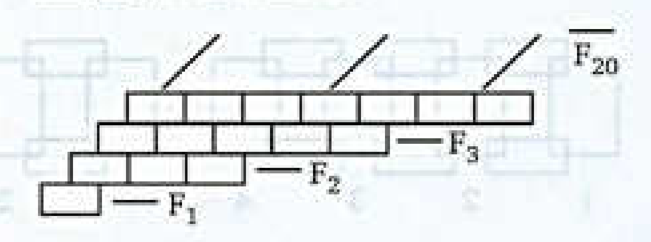
A) 28 B) 30 C) 32
D) 40 E) 56

19. Hallar el máximo número de puntos de intersección que se podrían contar en total al realizar el trazo de 10 rectas adicionalmente:



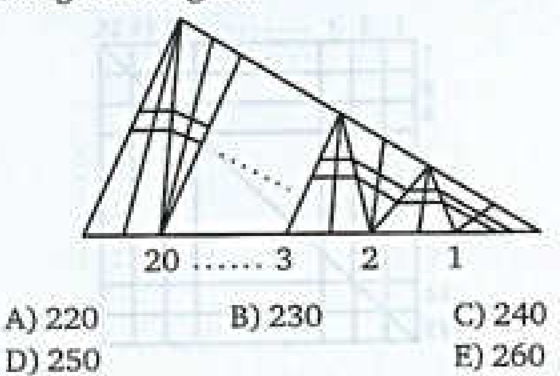
A) 156 B) 148 C) 160
D) 165 E) 168

20. Calcular el número total de cuadriláteros que contengan como máximo dos regiones simples, hasta la fila 20.



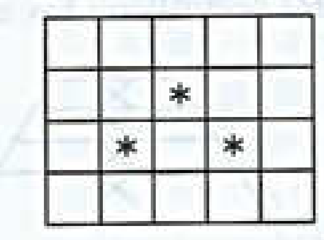
A) 1280 B) 1400 C) 1360
D) 1200 E) 1260

21. ¿Cuántos triángulos se cuentan en total en la siguiente figura?



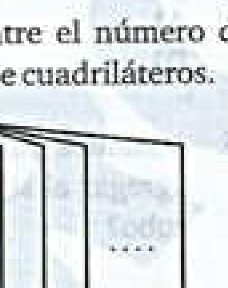
A) 220 B) 230 C) 240
D) 250 E) 260

22. ¿Cuántos cuadrados se podrán contar como máximo tal que posean al menos un asterisco?



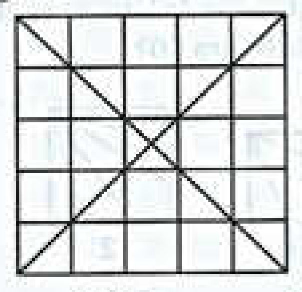
A) 11 B) 15 C) 21
D) 23 E) 25

23. Calcular la diferencia entre el número de pentágonos y el número de cuadriláteros.



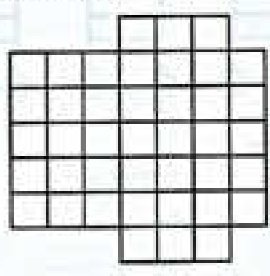
A) 140 B) 135 C) 150
D) 160 E) 190

24. ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?



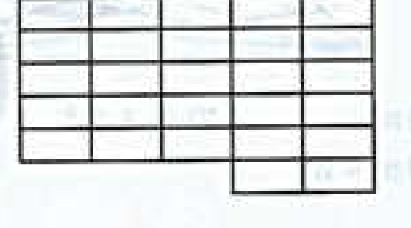
A) 70 B) 71 C) 72
D) 73 E) 75

25. Sabiendo que cada casillero es un "cuadradito", hallar la diferencia entre el número de cuadriláteros y el número de cuadrados en total.



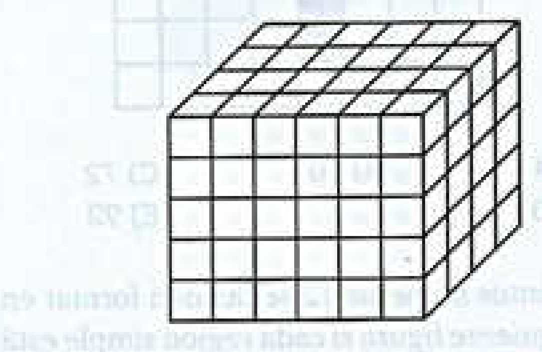
A) 100 B) 211 C) 311
D) 401 E) 440

26. ¿Cuántas diagonales pueden ser trazadas en total en el siguiente gráfico?



A) 620 B) 520 C) 528
D) 530 E) 570

27. Calcular el número de paralelepípedos que no sean cubos en el gráfico mostrado sabiendo que está formado por "cubitos"

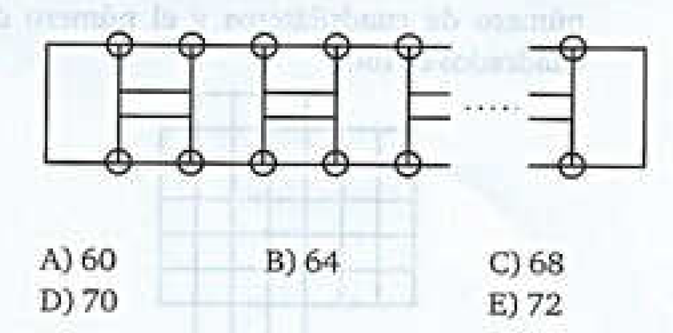


A) 2410 B) 2940 C) 1820
D) 2160 E) 2490

28. Calcular el máximo número de puntos de intersección que se podrían contar al intersectar 10 circunferencias y 10 rectas.

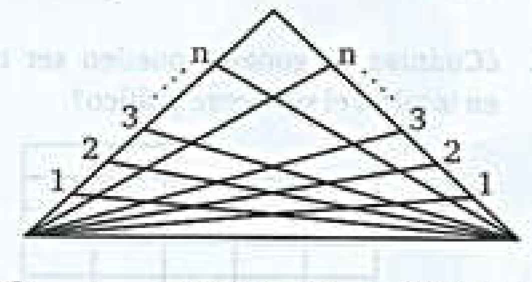
A) 45 B) 50 C) 55
D) 60 E) 64

29. En la siguiente figura, ¿cuántas circunferencias se contarán, si existen 295 cuadriláteros?



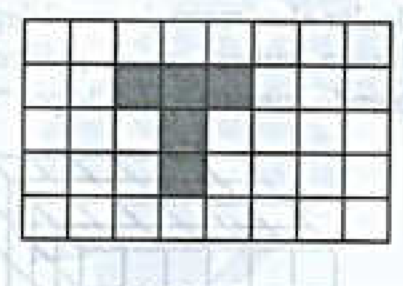
A) 60 B) 64 C) 68
D) 70 E) 72

30. ¿Cuántos triángulos se cuentan en la siguiente figura?



A) n^3 B) $(n+1)^3$ C) $(n-1)^3$
D) n^3+n E) n^3-n

31. ¿Cuántas letras T de la forma y tamaño de la sombreada se contarán en total en la siguiente figura?

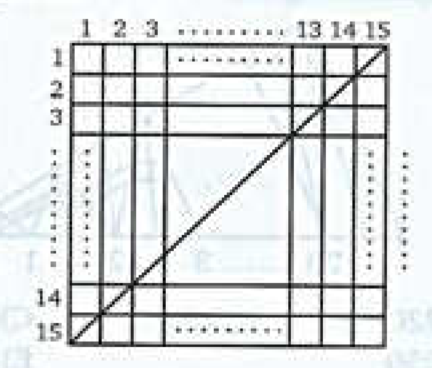


A) 64 B) 70 C) 72
D) 80 E) 92

32. ¿Cuántos números 12 se pueden formar en la siguiente figura si cada región simple está sombreada de colores diferentes al igual que las líneas que la envuelven.

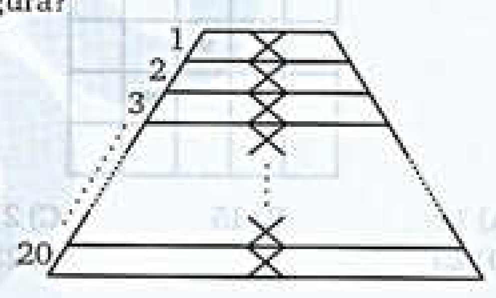
A) 668 B) 784 C) 824
D) 999 E) 555

33. ¿Cuántos cuadrados tienen trazada su diagonal?



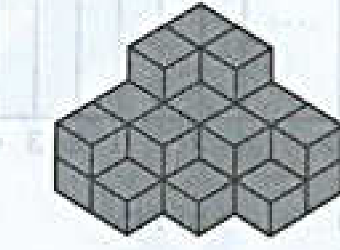
A) 100 B) 120 C) 140
D) 150 E) 160

34. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?



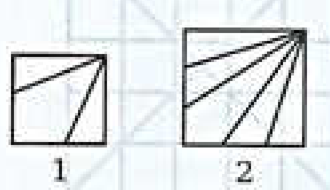
A) B) C)
D) E)

35. ¿Cuántos cubitos como mínimo se deben agregar al siguiente sólido para formar un cubo?



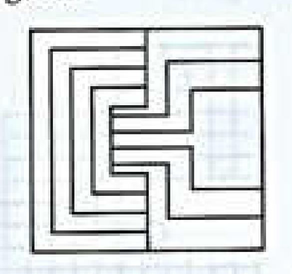
A) 33 B) 35 C) 38
D) 40 E) 30

36. ¿Cuántos cuadriláteros se contarán en total hasta la figura 20?



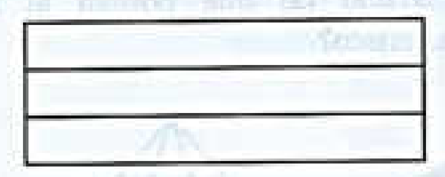
A) 400 B) 441 C) 225
D) 900 E) 468

37. ¿Cuántos octogonos sse cuentan en la siguiente figura?



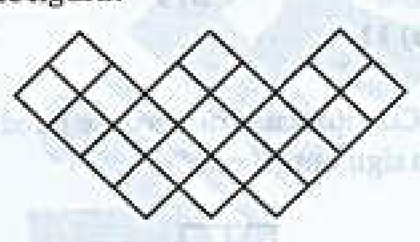
A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

38. Trace las diagonales que sean posibles tal que no corten a ninguna recta horizontal e indique, ¿cuántos triángulos existen cuyos lados estén formados por dichas digonales?



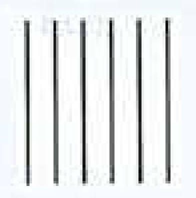
A) 20 B) 24 C) 25
D) 27 E) 28

39. ¿Cuántos rombos se cuentan en total en la siguiente figura?



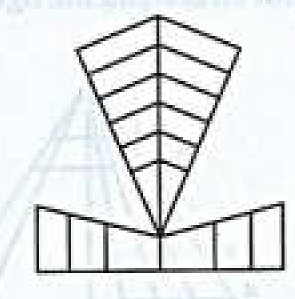
A) 28 B) 33 C) 25
D) 20 E) 32

40. La figura muestra 6 segmentos, verticales ¿cuál es el menor número de rectas adicionales que se deben trazar para obtener en total 46 segmentos?



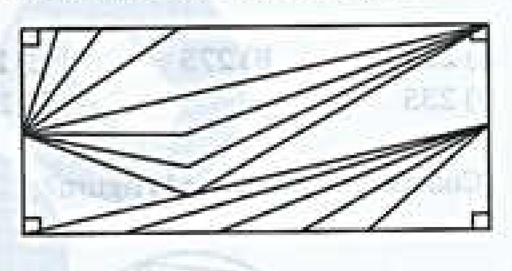
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

41. Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura.



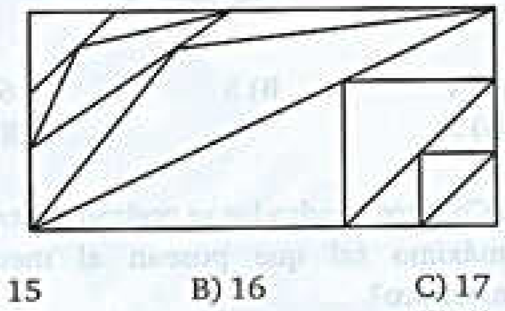
A) 45 B) 48 C) 49
D) 50 E) 51

42. Cuántos triángulos hay en la figura.



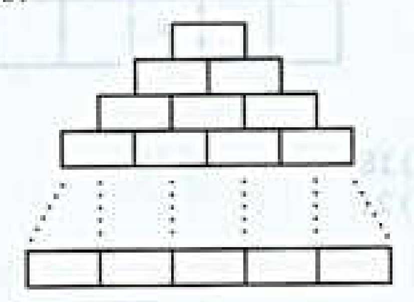
A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 25

43. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



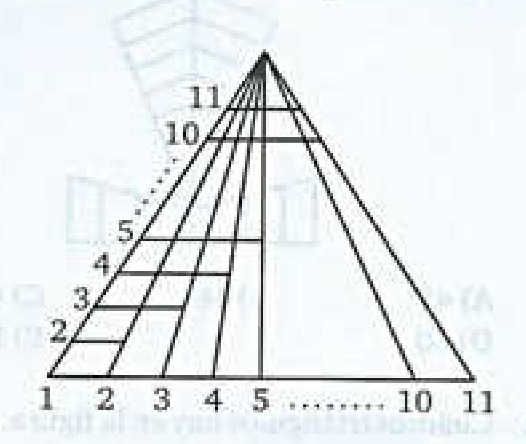
A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

44. Se ha construido un muro con 190 ladrillos de 15 cm de alto cada uno. ¿Cuál es la altura del muro?



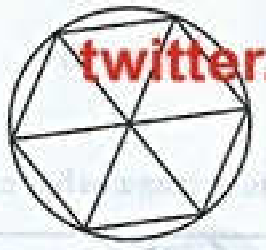
A) 1,45 m B) 2,35 m C) 2,85 m
D) 2,70 m E) 2,95 m

45. Determinar cuál es el máximo número de triángulos en la siguiente figura:



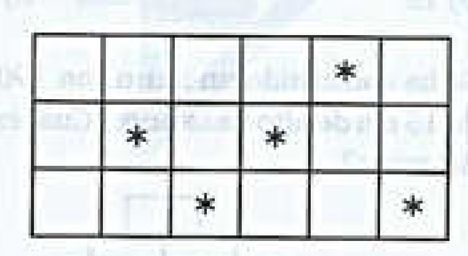
A) 225 B) 275 C) 215
D) 235 E) 250

46. ¿Cuántos rombos tiene la figura?



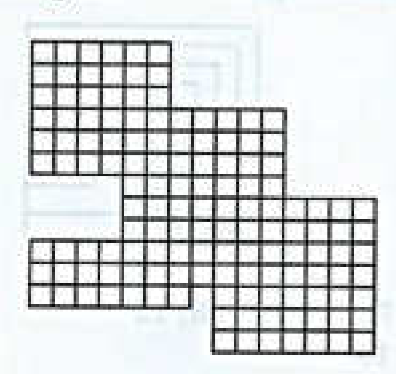
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

47. ¿Cuántos cuadrados se podrán contar como máximo tal que posean al menos un asterisco?



A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

48. Halle el número total de cuadriláteros en la siguiente figura.

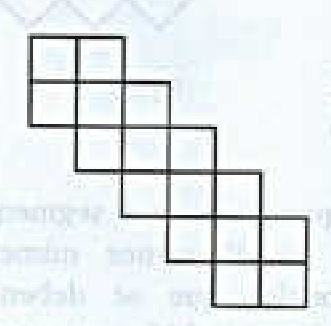


A) 1620 B) 2305 C) 2240
D) 3210 E) 3105

49. ¿Cuántos triángulos se podrán contar como máximo tal que posean al menos un asterisco?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

50. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar en la siguiente figura?



A) 45 B) 49 C) 50
D) 60 E) 38

Introducción a la Topología

CAPACIDADES

- Desarrollar y potenciar la capacidad visuespacial y el razonamiento arbitrario.
- Conocer las aplicaciones en la realidad.
- Estimular la lectura matemática.
- Incentivar la agradable enseñanza de las matemáticas.

La matemática actual se diferencia mucho de la matemática de comienzos del siglo XX. En ella ha aparecido una gran cantidad de nuevas disciplinas que se utilizan ampliamente en la práctica. Entre ellas tenemos, por ejemplo, las que se agrupan bajo la denominación de "Matemática discreta". La *Enciclopedia de las Matemáticas* define la matemática discreta como una serie de teorías matemáticas no relacionadas directamente con los conceptos de límite y continuidad. La matemática discreta desarrolla impetuosamente en la actualidad, debido ante todo a la gran difusión que han adquirido los sistemas computacionales, en cuya descripción se utiliza fundamentalmente el lenguaje de la matemática discreta. La matemática discreta e sla base teórica de la informática, la cual con mayor intensidad día a día penetra no sólo en la ciencia y la técnica, sino también en la vida cotidiana.

Entre los temas de la matemática discreta la teoría de grafos ocupa un importante lugar. Esta disciplina nació a partir de los intentos de formalización de la resolución de rompecabezas y constituye actualmente un método simple, accesible y potente para resolver problemas tanto teóricos como prácticos.

¿Cuándo la letra O es lo mismo que la letra D?

Cuando están siendo observadas por un topólogo. Cualesquiera dos figuras que puedan estirarse, encogerse o aplastarse para darles la misma forma, son lo mismo topológicamente.

Para esto necesitarás el abuelo de alguien. Es topológicamente posible quitarle el saco. Inténtalo. (Pero con cuidado, ¡los abuelos son frágiles!)

INTRODUCCIÓN

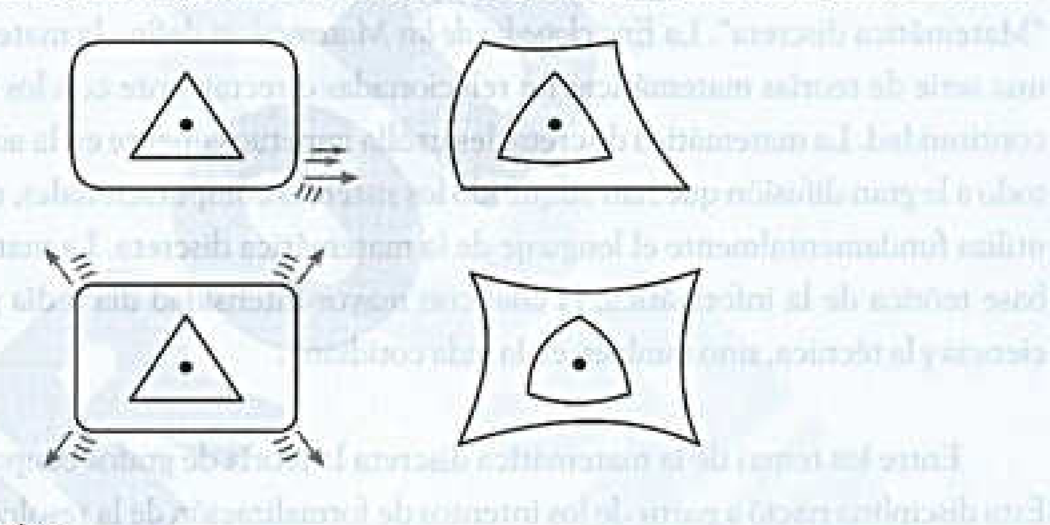
La topología es parte de las matemáticas que estudia las modificaciones y propiedades que se dan en la transformación de una figura; se inicia con las investigaciones de Leonard Euler en el siglo XVIII y de Moebius (1790 – 1868), consiguiente avances sobre las transformaciones geométrica, grafos, etc.

En ésta disciplina es estudio se basa en las características de la forma y no en la medición de la figura.

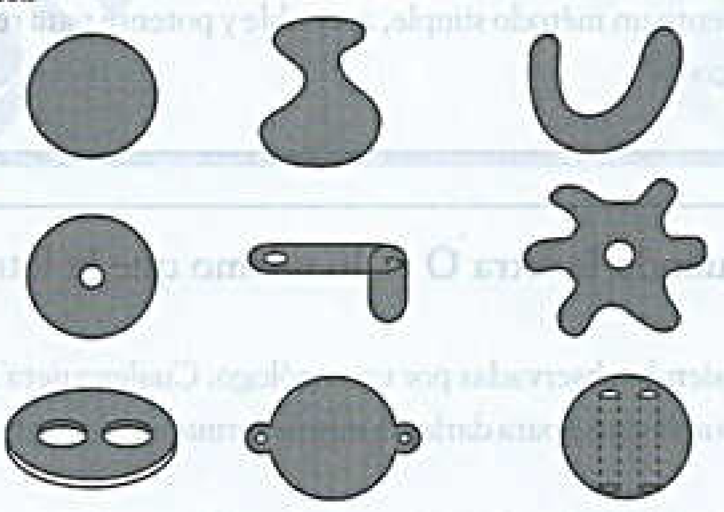
TRANSFORMACIÓN TOPOLÓGICA

Es las infinitas modificaciones que puede sufrir una figura a través de deformaciones continuas, siempre que se evite separar partes conexas entre sí y superponer puntos distintos; es decir mantienen sus cualidades originales aunque la forma no, por ejemplo en el esquema triangular siguiente por más que estiramos la lámina en las direcciones que queramos el punto interior jamás pasará fuera del triángulo.

En una lámina elástica (tipo una goma de mascar) se dibuja un triángulo con un punto interior.



Con una esfera elástica



Luego de transformaciones topológicas se obtienen figuras topológicamente equivalentes.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del
Team Calapenshko,
el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

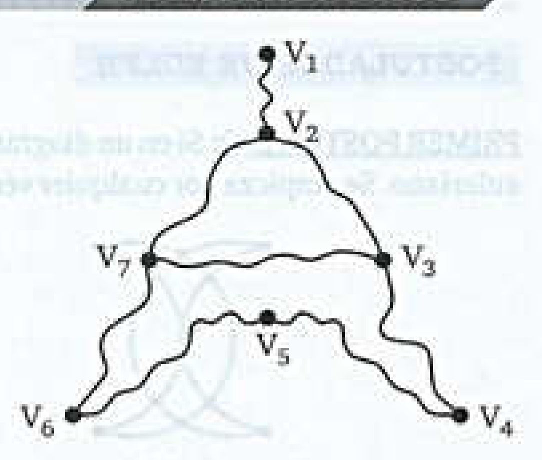
Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**,
búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

03 de setiembre del 2020

GRAFO



DEFINICIÓN.-

Se le da el nombre de grafo a todo par ordenado G = (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío (los elementos de V se denominan vértices del grafo) E es un multiconjunto finito de pares no ordenados de elementos de V. (los elementos de E son las aristas del grafo).

$V_1 ; V_2 ; V_3 ; \ldots ; V_7$ ⇨ vértices, puntos, nodos

- Cuando de un vértice sale una cantidad impar de líneas se denomina "vértices impares".

$V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_7$

- Cuando de un vértice sale una cantidad par de líneas se llama "vértices pares"

$V_4 ; V_5 ; V_6$

$V_1V_2 \; ; V_2V_3 ; \ldots ; V_7V_2$ ⇨ aristas, arcos, líneas, fronteras

NOTA

1 2 3 4 5

GRAFO SIMPLE CONEXO
(Si cada par de sus vértices están conectados, es decir, no hay vértices aislados).

1 2 3 4 5

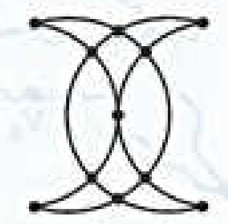
GRAFO SIMPLE NO CONEXO
(Al menos uno no está conectado y jamás se puede tocar todos los puntos cuando se trazan)

RECORRIDO EULERIANO

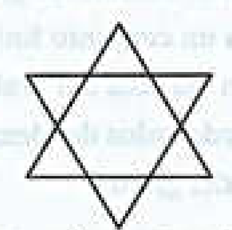
Sólo se da en grafos conexos y consiste en recorrer de un solo trazo y sin levantar el lápiz del papel todos los vértices o puntos del grafo y además sin pasar por una arista o línea más de una vez.

POSTULADOS DE EULER

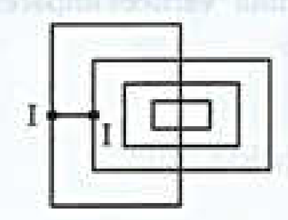
PRIMER POSTULADO: Si en un diagrama (grafo) existen sólo vértices pares, se puede realizar un recorrido euleriano. Se empieza por cualquier vértice y se concluirá en el mismo punto.

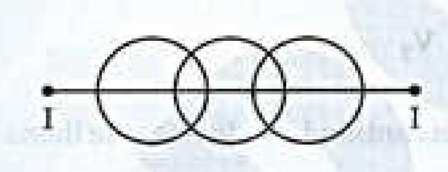


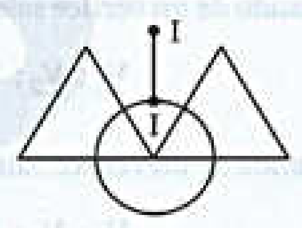
Firma de Mahoma


Estrella de David

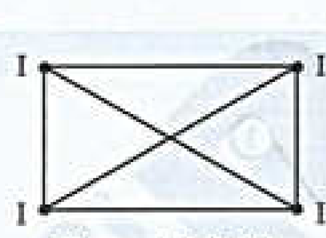
SEGUNDO POSTULADO: Si en un diagrama hay 2 vértices impares, para realizar el recorrido se debe empezar en cualquiera de dichos puntos impares y terminar en el otro.



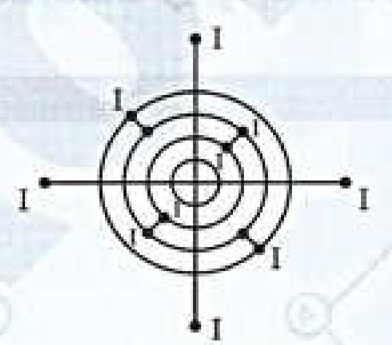


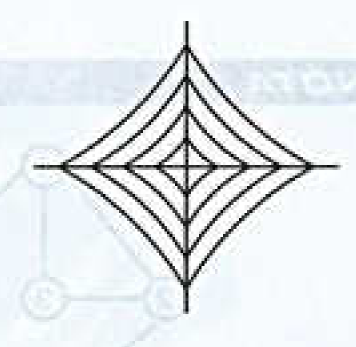


TERCER POSTULADO: Si en un diagrama hay 2 vértices impares en dicho diagrama jamás se podrá realizar un recorrido euleriano.

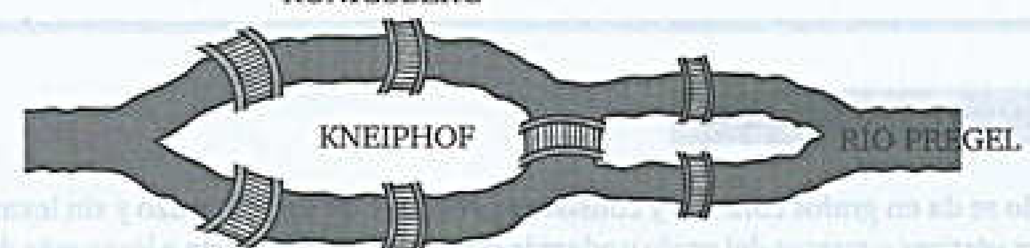


Firma del diablo





Aplicación: Uno de los problemas que dió origen a la topología es de carácter popular. La ciudad de KÖNIGSBERG estaba atravesada por el río PREGEL pero en el centro del río había una isla llamada KNEIPHOF. Los habitantes buscaban una ruta a través del cual sólo se pasara una vez por cada puente recorriendo los 7 puentes; durante muchos años fue un dolor de cabeza para aquel que se atrevía a dar solución. Euler recolvió el problema demostrando que no hay recorrido con tales condiciones ... ¡Es imposible!



Resolución: Euler llevó dicho problema a un esquema mucho más manejable (grafo)

A

D C

B

A

D C

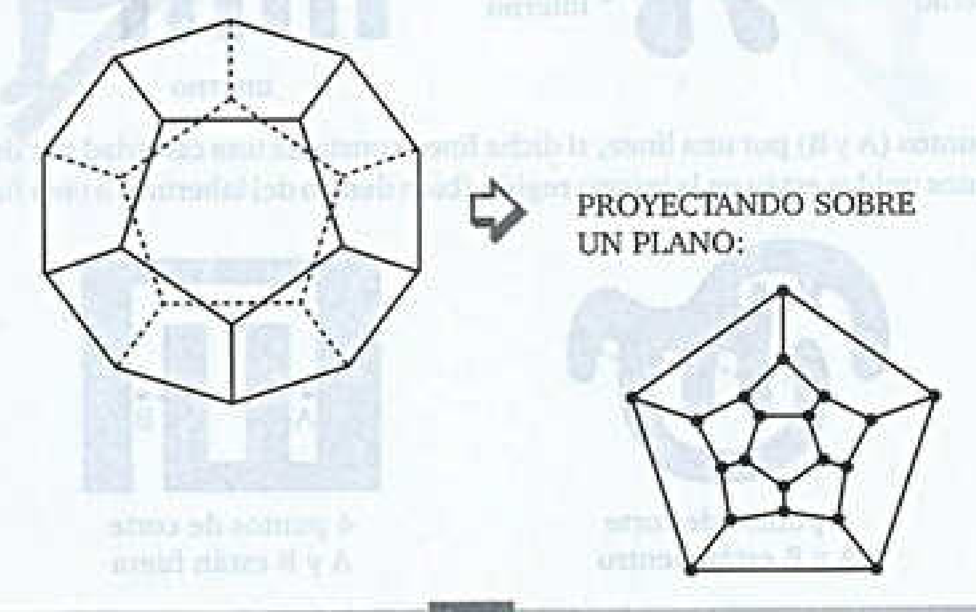
B

Se observa que no hay más de 2 vértices impares por tanto no admite un recorrido euleriano

RECORRIDO HAMILTONIANO

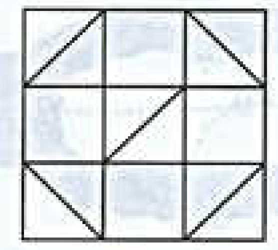
Se da en un grafo convexo en el cual se debe pasar por todos los vértices una sola vez, una de sus aplicaciones en la realidad se da en el problema del viajero comerciante.

En 1850 R. Hamilton pensaba en un dodecaedro regular como un planeta formado por ciudades (vértices) y carreteras (líneas), se planteaba si se podría visitar cada una de las ciudades una sola vez utilizando los caminos y terminando en el punto inicial.

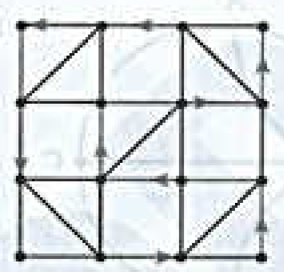


No existe un método sistemático para la determinación **de un recorrido** hamiltoniano, sigue siendo un dolor de cabeza para aquellos que **se desarrollan en** la rama de la optimización en teoría de investigación operativa.

Aplicación: Admite un recorrido hamiltoniano la figura mostrada:



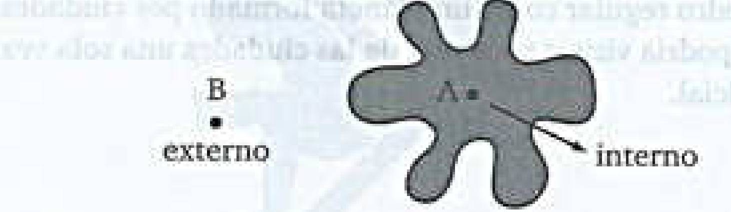
Resolución: Como no hay un método práctico, tendremos que realizar el recorrido tratando de abarcar la mayor cantidad de puntos en nuestro recorrido pero buscando una salida siempre.

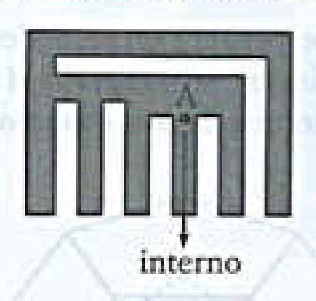


¡Sí! ... admite un recorrido hamiltoniano, pasamos por todos los vértices una sola vez. Sólo interesan los vértices.

TEOREMA DE JORDAN

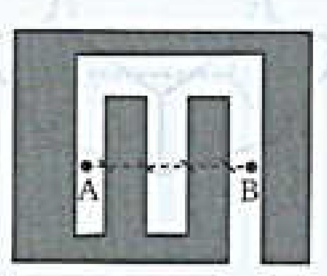
Principalmente se da en un circuito cerrado o laberinto donde hay una región externa y otra interna.





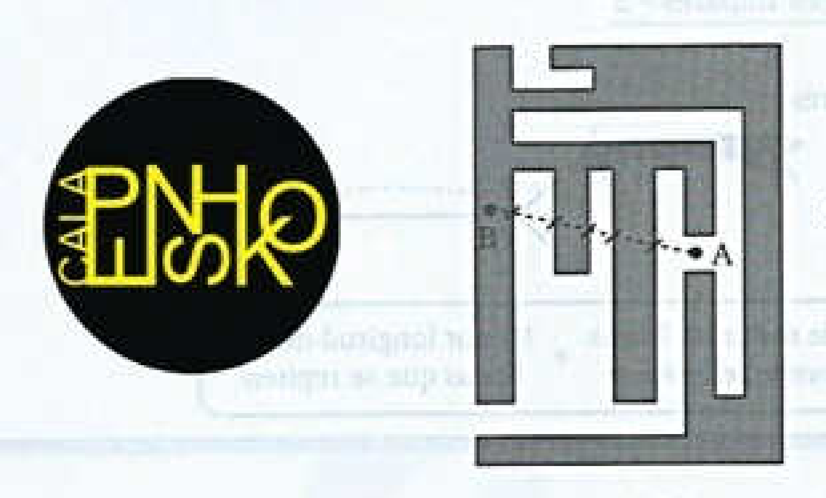
1. Al unir 2 puntos (A y B) por una línea, si dicha línea consta de una cantidad par de puntos de corte, ambos puntos unidos están en la misma región (bien dentro del laberinto o bien fuera de el).

8 puntos de corte
A y B están dentro



4 puntos de corte
A y B están fuera

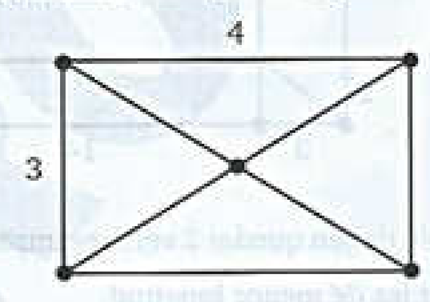
2. Al unir 2 puntos A y B por una línea, dicha línea consta de una cantidad impar de puntos de corte estarán ambos en diferentes zonas.



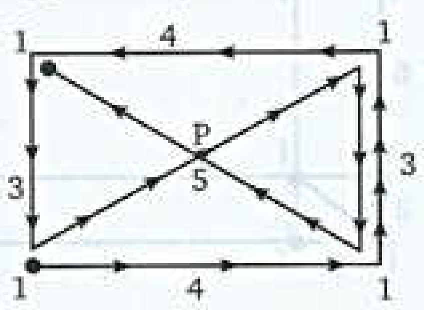
RECORRIDOS MÍNIMOS EN UN GRAFO

Para obtener el menor recorrido es importante saber que el grafo debe constar de 2 vértices impares, si no hubiese tal cantidad se reduce uniendo por línea los vértices impares 2 a 2, siendo estas líneas, líneas repetidas.

Ejemplo 1: Hallar el recorrido mínimo del siguiente grafo:



Resolución: Aquí observamos 4 puntos impares y debemos tener más que 2 impares, por tanto unimos 2 impares por una línea y como buscamos el recorrido mínimo nos conviene unir 2 impares unidos por la longitud 3.



Se observa que se repitió una línea

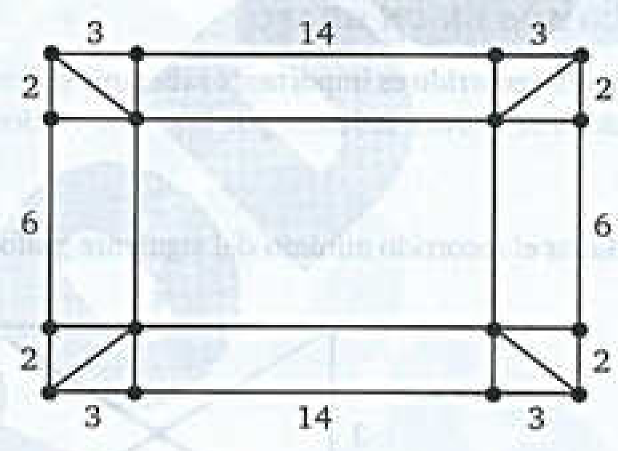
$$\text{longitud mínima} = \underbrace{2(4) + 2(3) + 2(5)}_{\text{longitud total}} + \underbrace{1(3)}_{\text{longitud de la línea que se repite}} = 27$$

NOTAS "S"

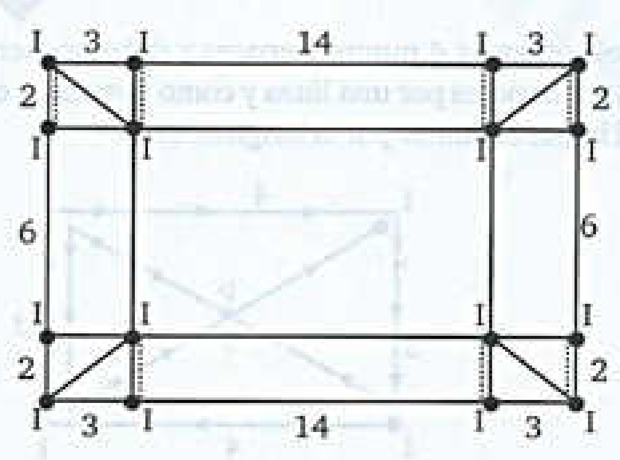
- $N°\text{ de líneas a repetir} = \dfrac{N°\text{ vértices impares} - 2}{2}$
- Cuando se repite 2 vértices impares

Menor longitud = Longitud de todas las líneas que conforman el gráfico + Menor longitud de las líneas que se repiten

Ejemplo 2: Hallar el recorrido mínimo que debe hacer la punta de un lápiz para pasar por todas las líneas.



Resolución: En la gráfica sólo deben quedar 2 vértices impares; entonces hay que repetir líneas y estas deben ser las de menor longitud.

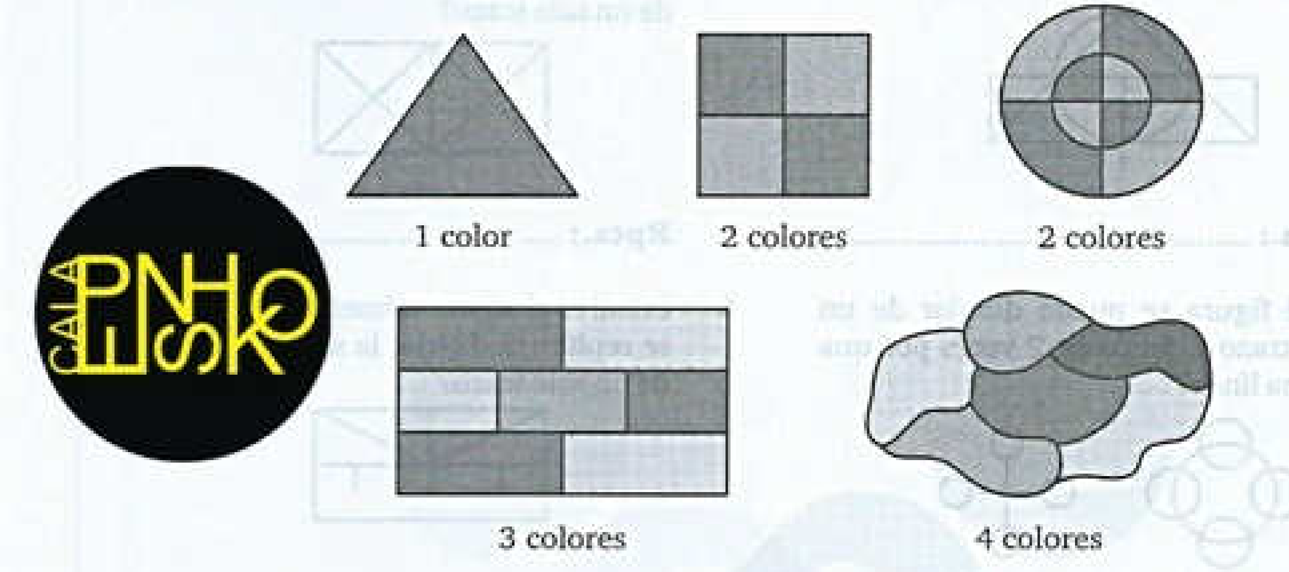


$N°\text{ de líneas a repetir} = \dfrac{16-2}{2} = 7$

$$\text{longitud mínima} = \underbrace{4(20) + 4(10) + 4(\sqrt{13})}_{\text{longitud total}} + 7\underbrace{(2)}_{\text{longitud de la línea que se repite}} = 134 + 4\sqrt{13}$$

COLORACIÓN DE MAPAS

Se dice que un mapa tiene una buena coloración si 2 regiones o países vecinos por una frontera no tiene el mismo color y en dicha coloración han intervenido el menor número de colores.



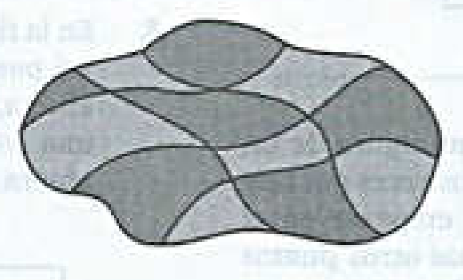
TEOREMA DE LOS 4 COLORES

En 1976 Kenneth Appel y Wolfang Haren demostraron a través de la ayuda de un ordenador que:

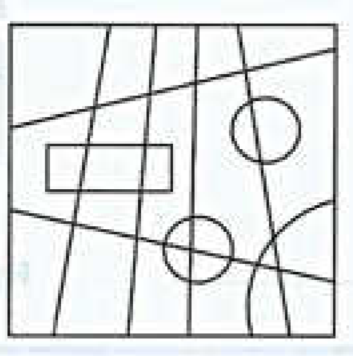
"Cuatro colores bastan para colorear cualquier mapa por más complicado que este fuera, inclusive en gráficos en el espacio"

OBSERVACIÓN

Si un mapa tiene interiormente sólo vértices pares, dicho mapa sólo necesita 2 colores para su buena coloración.



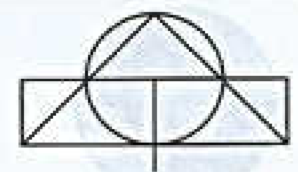
2 colores



2 colores

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. ¿Cuántos puntos pares y cuántos impares tiene la siguiente figura?



Rpta.: ....

2. ¿Qué figura se puede dibujar de un solo trazo y sin pasar 2 veces por una misma línea?

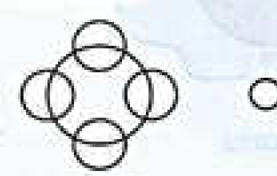
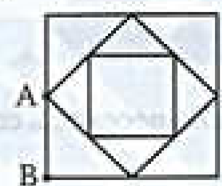


Fig. 1 Fig. 2

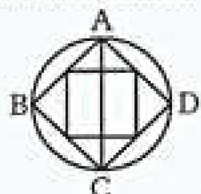
Rpta.: ....

3. Para dibujar la siguiente figura sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea, ¿en cuál de los puntos señalados se debe empezar?



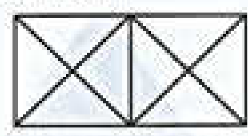
Rpta.: ....

4. Para dibujar la siguiente figura de un solo trazo y sin pasar dos veces por una misma línea, se debe empezar en el punto A, ¿en cuál de los otros puntos señalados se terminará?



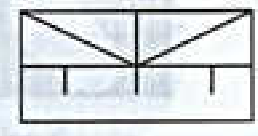
Rpta.: ....

5. ¿Cuál es el menor número de líneas que se repiten al dibujar la siguiente figura de un solo trazo?



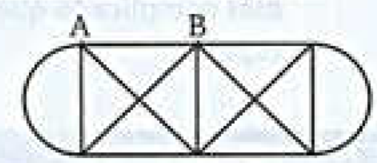
Rpta.: ....

6. ¿Cuál es el menor número de líneas que se repiten al dibujar la siguiente figura de un solo trazo?



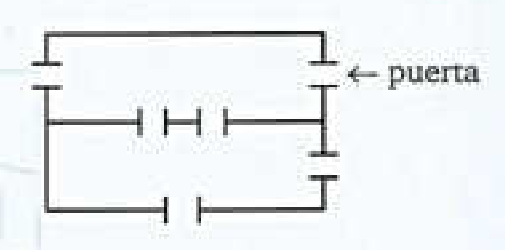
Rpta.: ....

7. Para dibujar la siguiente figura de un solo trazo y sin pasar dos veces por la misma línea, ¿en cuál de los puntos señalados se debe empezar?



Rpta.: ....

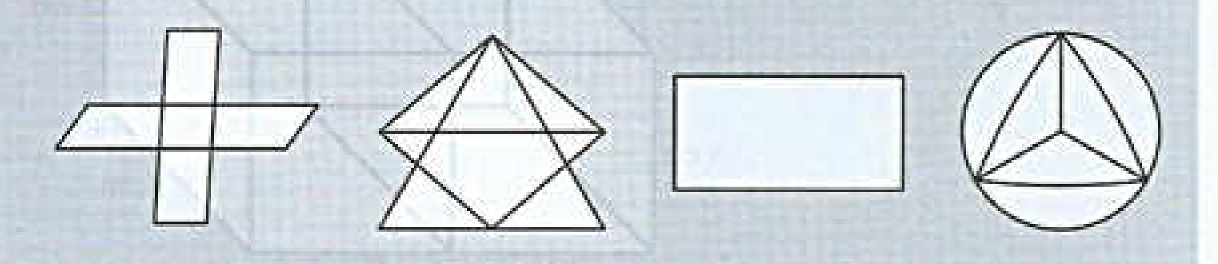
8. En la figura se muestran 2 habitaciones y 6 puertas. Diga si es posible empezar afuera, pasar por todas las puertas, sólo una vez por cada una, y terminar afuera.



Rpta.: ....

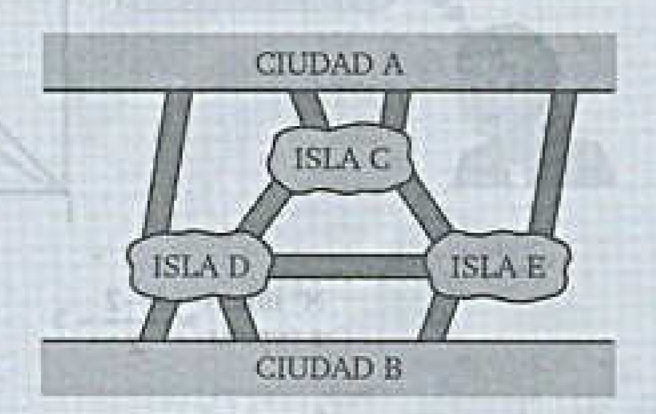
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 ¿Cuántas de las siguientes figuras se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel ni pasar dos veces por la misma línea?

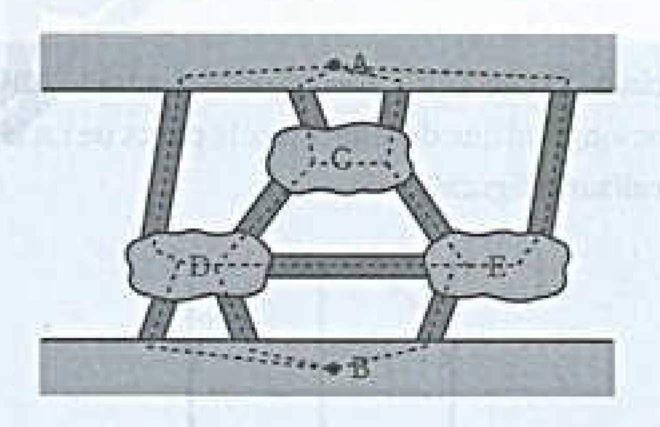


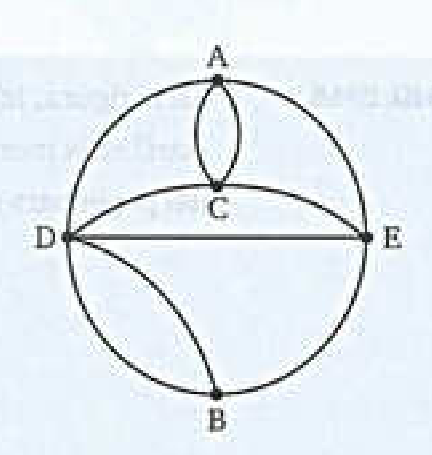
Resolución: ∴ 3 figuras

PROBLEMA 2 En la gráfica se muestra un río no navegable ¿es posible pasar por todos los puentes una sola vez?



Resolución: Realizando el grafo respectivo:

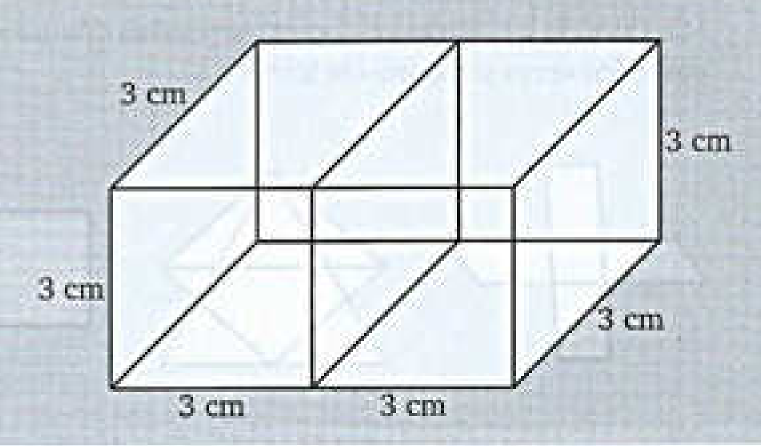




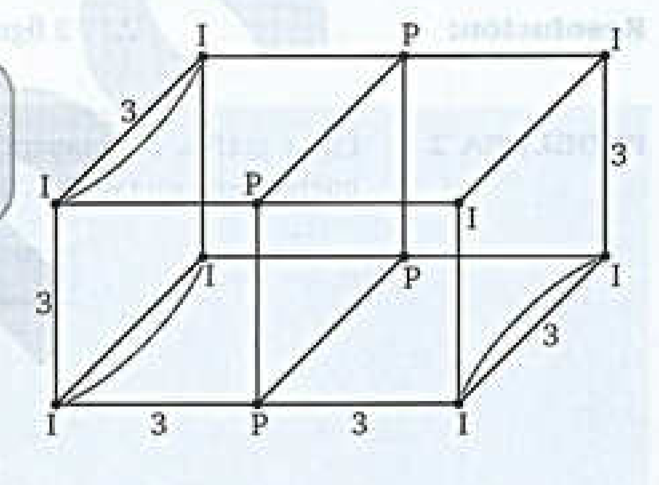
Se observa que B (impar) y D (impar)

∴ Sí, empezando en B.

PROBLEMA 3 ¿Cuál es el mínimo recorrido que debe hacer una hormiga para pasar por todas las aristas del sólido mostrado?



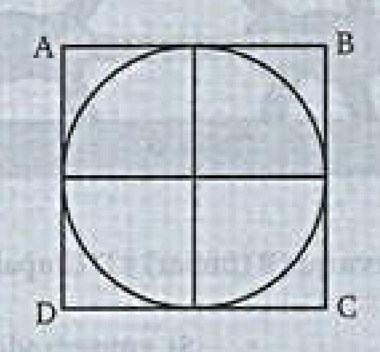
Resolución:



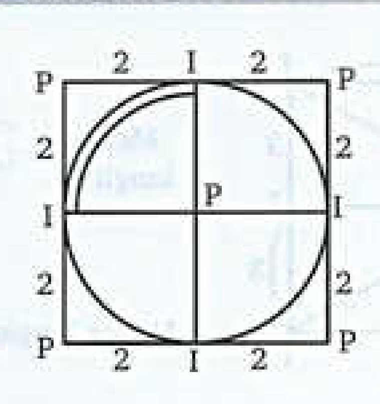
$$\text{N° líneas a repetir} = \frac{8-2}{2} = 3$$

$$\therefore \text{Longitud mínima} = \underbrace{60}_{\substack{\text{Longitud}\\\text{de todos las}\\\text{líneas del grafo}}} + \underbrace{3(3)}_{\substack{\text{Menor longitud}\\\text{de las líneas}\\\text{que se repiten}}} = 69\text{ cm}$$

PROBLEMA 4 En la figura, la circunferencia está inscrita en el cuadrado ABCD. Si AB = 4cm, ¿cuál es la menor longitud que debe recorrer la punta de un lápiz, sin separarla del papel para realizar la figura?



Resolución:

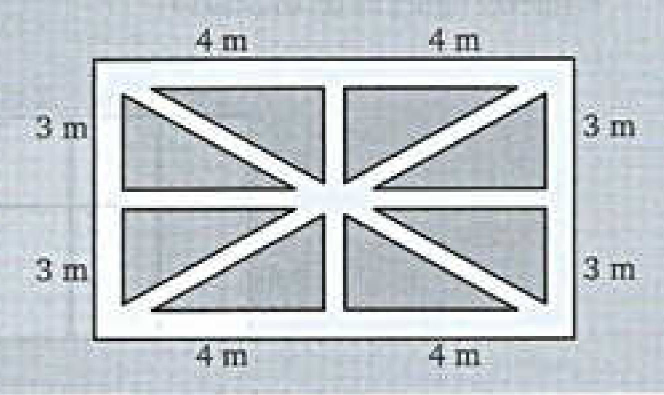


$$\begin{matrix}\text{N° de líneas} \\ \text{arepetir}\end{matrix} = \frac{4-2}{2} = 1$$

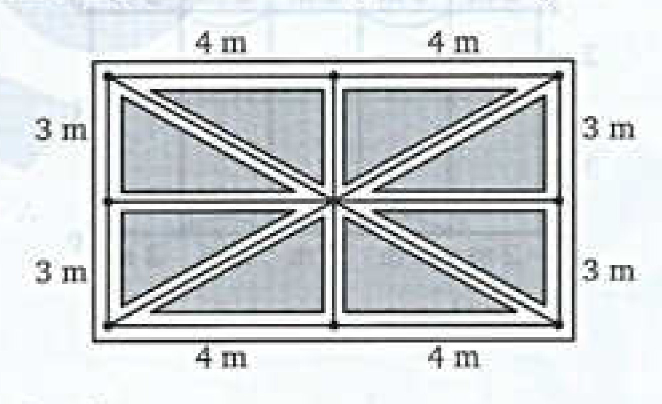
$$\begin{matrix}\text{Longitud} \\ \text{mínima}\end{matrix} = \underbrace{24+4\pi}_{\text{longitud de todas las líneas}} + \underbrace{\pi}_{\text{longitud mínima de la línea a repetir}}$$

$$\therefore \begin{matrix}\text{Longitud} \\ \text{mínima}\end{matrix} = (24+5\pi)\ \text{cm}$$

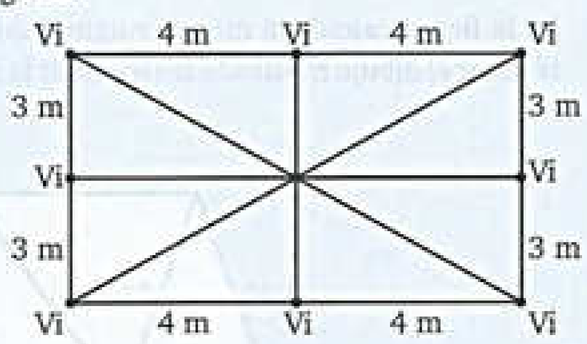
PROBLEMA 5 Una persona desea realizar un paseo por todas las calles del siguiente esquema y regresar al punto de partida. ¿Cuál es la menor longitud que puede realizar?



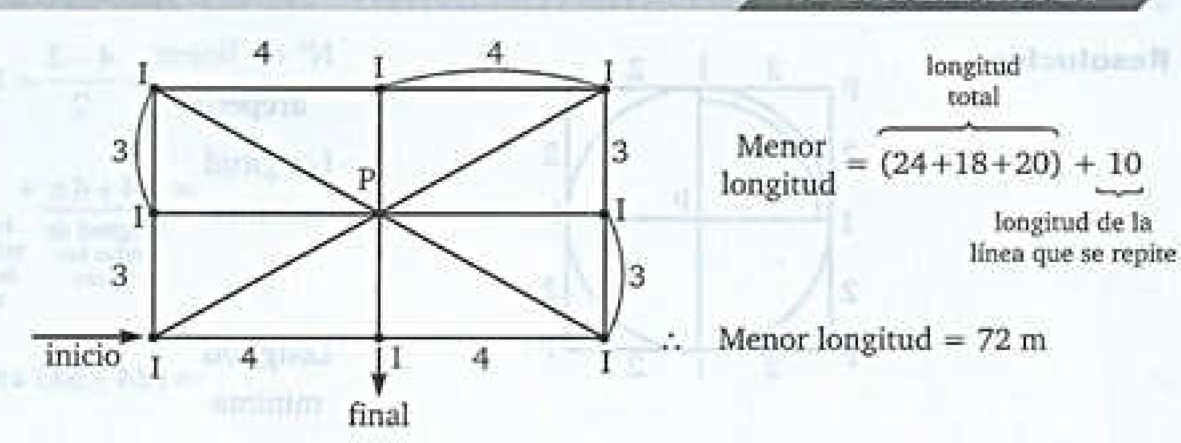
Resolución: Primero debemos hacer el grafo asociado al plano de la figura.



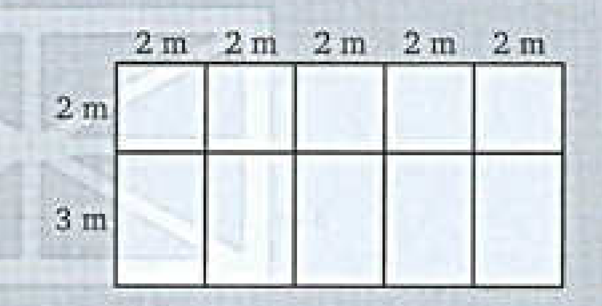
Luego analizamos el grafo.



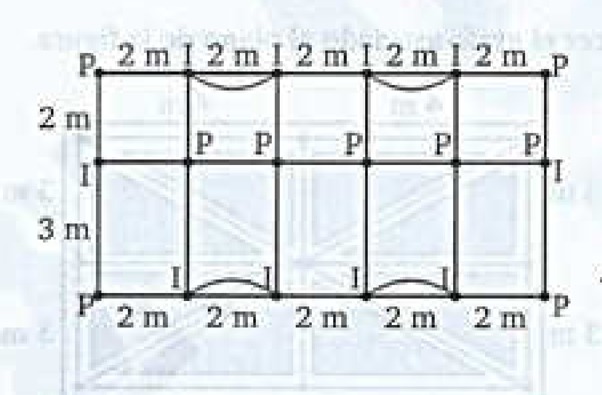
Necesariamente se van a repetir líneas, la idea es que las líneas que se repitan unan puntos impares y que su longitud sea mínima.



PROBLEMA 6 ¿Cuál es el mínimo recorrido que debe realizar la punta del lápiz para dibujar la siguiente figura de un solo trazo?



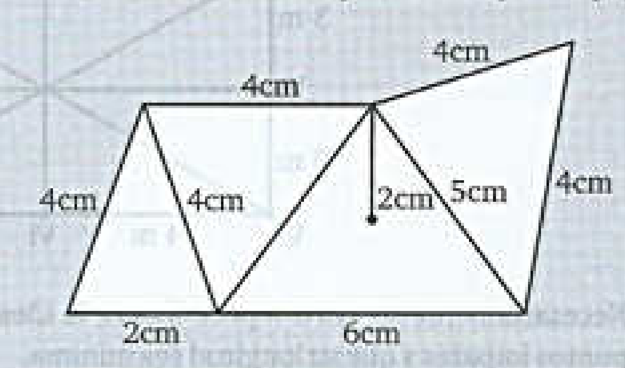
Resolución:



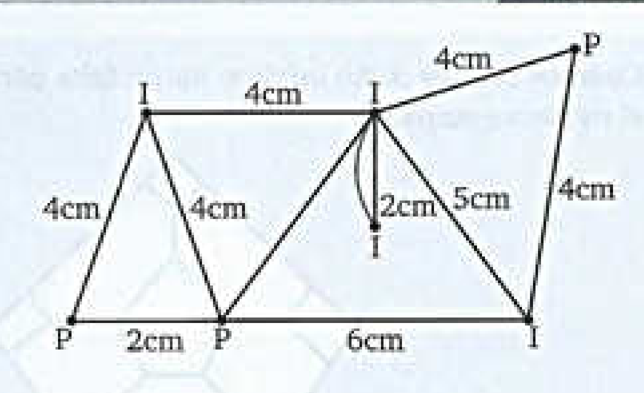
$$\text{N° de líneas a repetir} = \frac{10-2}{2} = 4$$

$$\therefore \text{Longitud mínima} = \underbrace{60}_{\text{Longitud de todas las líneas}} + \underbrace{2(4)}_{\text{Menor longitud de las líneas que se repiten}} = 68 \text{ m}$$

PROBLEMA 7 En la figura calcule la menor longitud que debe recorrer la punta de un lápiz para realizar el dibujo mostrado sin levantar la punta del lápiz del papel.



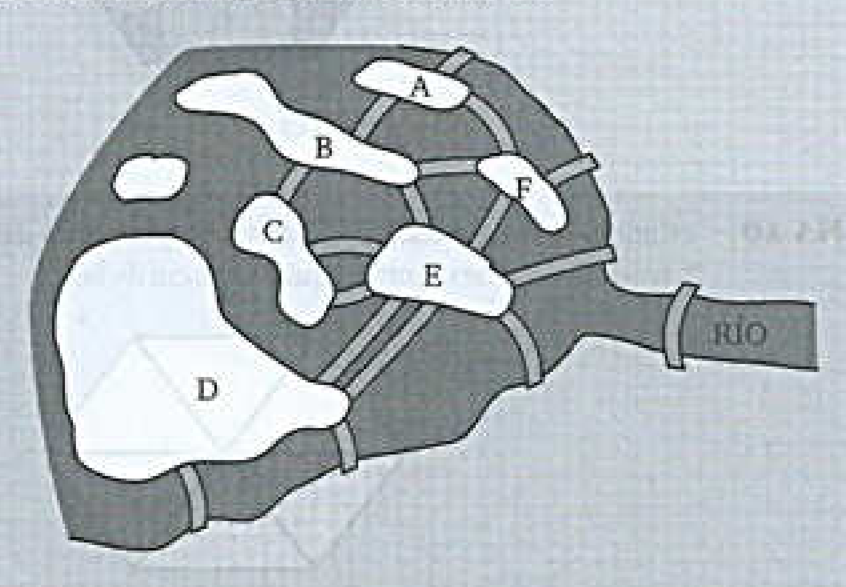
Resolución:



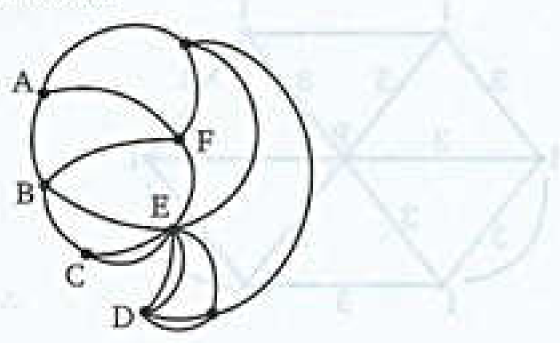
$$\begin{array}{c}\text{N° de líneas} \\ \text{a repetir}\end{array} = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$\therefore \begin{array}{c}\text{Longitud} \\ \text{mínima}\end{array} = \underbrace{40}_{\substack{\text{Longitud} \\ \text{total}}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{Longitud} \\ \text{mínima de la} \\ \text{línea a repetir}}} = 42 \text{ cm}$$

PROBLEMA 8 ¿Se puede pasar por los 17 puentes que unen entre sí las partes del territorio de Leningrado, sin pasar por cada uno más de una vez?

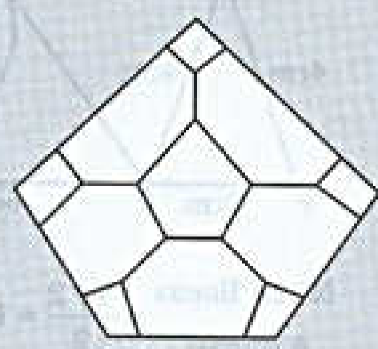


Resolución: Graficando adecuadamente:

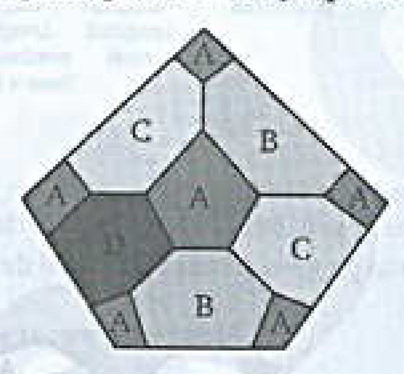


Solo A y C son los impares por tanto si se puede.

PROBLEMA 9 Cuántos colores como mínimo hacen falta para realizar una buena coloración en el siguiente mapa.

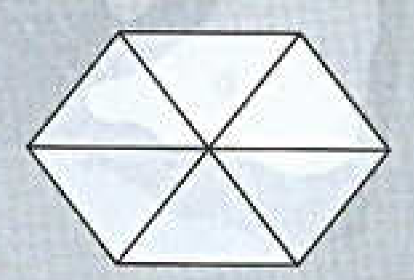


Resolución: Primero pintamos el pentágono central ya que tiene más países vecinos.

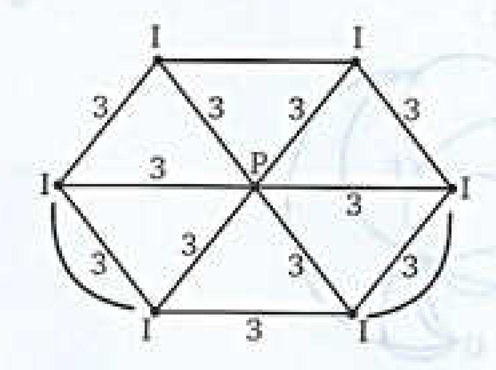


$\therefore$ 4 colores

PROBLEMA 10 ¿Cuál es la menor longitud que recorre la punta de un lápiz sin separarlo del papel para dibujar el hexágono regular de 3 cm de lado?



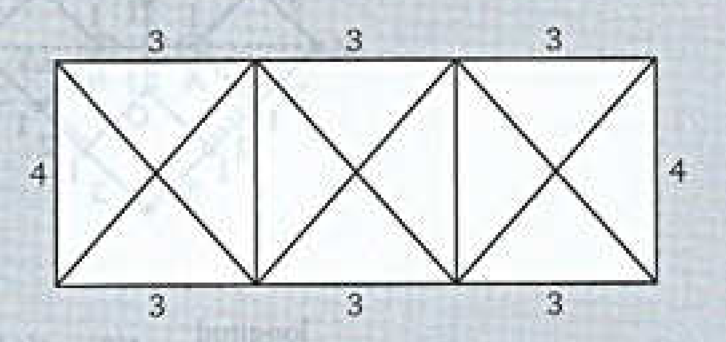
Resolución:



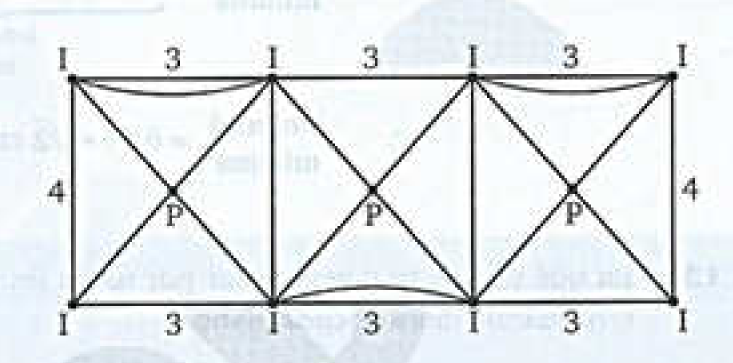
$$\text{N° líneas a repetir} = \frac{6-2}{2} = 2$$

$$\therefore \text{Longitud mínima} = \underbrace{36}_{\text{longitud de todas las líneas}} + \underbrace{2(3)}_{\text{longitud de la línea que se repite}} = 42 \text{ cm}$$

PROBLEMA 11 ¿Cuál es la menor longitud que recorre la punta de un lápiz para graficar la siguiente figura de un trazo continuo, es decir sin levantar el lápiz del papel?



Resolución:

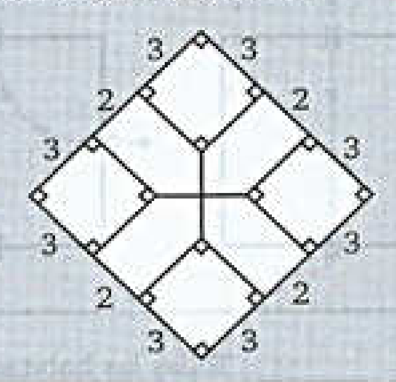


$$\text{N° de líneas a repetir} = \frac{8-2}{2} = 3$$

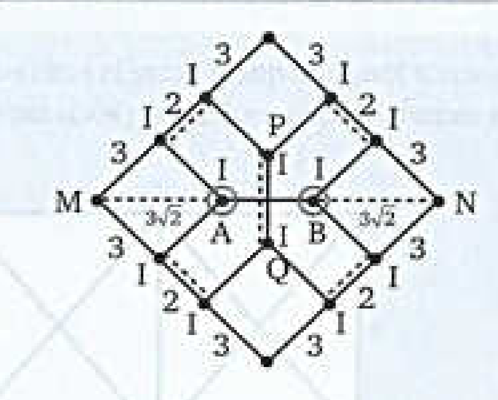
$$\text{Menor longitud} = \underbrace{(3\times6+4\times4+5\times6)}_{\text{Longitud de todas las líneas del grafo}} + \underbrace{(3(3))}_{\text{Menor longitud de las líneas que se repiten}}$$

$\therefore$ Menor longitud = 73

PROBLEMA 12 Una hormiga debe recorrer por todas la líneas que conforman la figura. Hallar su menor recorrido para cumplir su objetivo.



Resolución: Para obtener el recorrido mínimo debemos quedarnos con sólo 2 de los 12 vértices impares



N° de líneas a repetir $= \dfrac{12-2}{2} = 5$

$MN = 8\sqrt{2}$

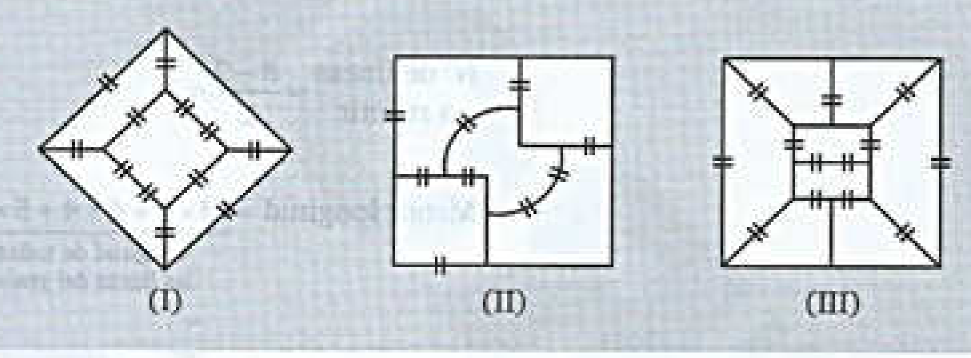
$AB = \underbrace{8\sqrt{2}}_{MN} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$AB = 2\sqrt{2}$

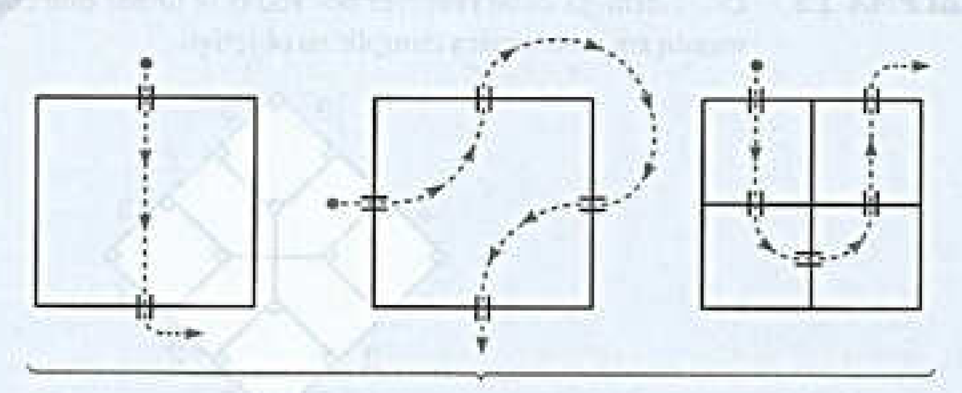
$$\text{longitud mínima} = \underbrace{4[8] + 4[6] + \overbrace{2\sqrt{2}}^{AB} + \overbrace{2\sqrt{2}}^{PQ}}_{\text{longitud total}} + \underbrace{4[2]}_{\text{longitud de las líneas a repetir}}$$

$$\therefore \quad \text{longitud mínima} = 64 + 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

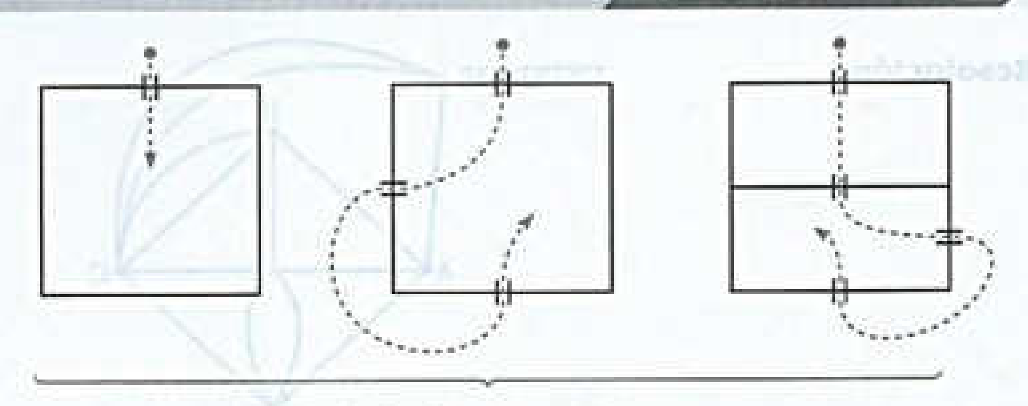
PROBLEMA 13 En qué planos se puede pasar por todas las puertas una sola vez empezando y terminando fuera de cada plano.



Resolución: Primero observemos los casos siguientes, intentemos entrar y salir de cada habitación pasando por cada puerta una sola vez y terminando fuera de cada gráfica mostrada.



Todas las habitaciones tienen una cantidad par de puertas

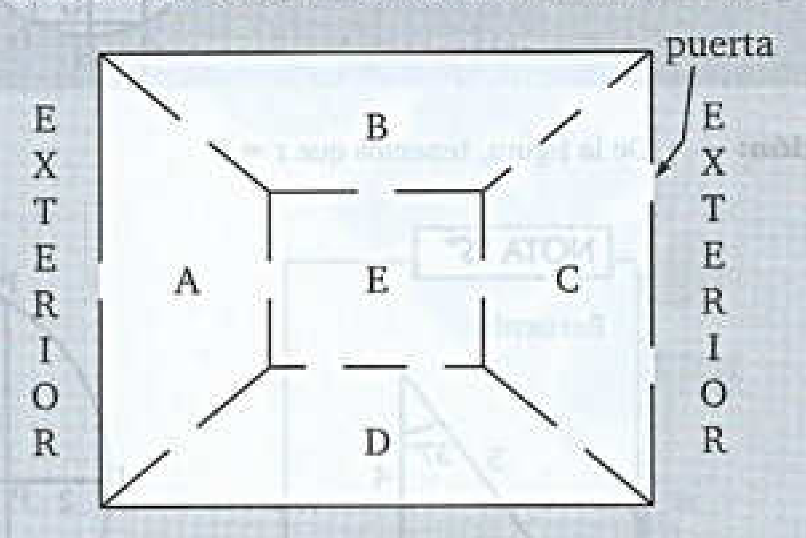


Todas las habitaciones tienen una cantidad impar de puertas

Se deduce que sólo se puede pasar por todas s una sola vez y retornar a la parte exterior em el caso que todas las habitaciones tengan una cantidad par de puertas.

∴ Sólo I y III cumplen con tales requisitos

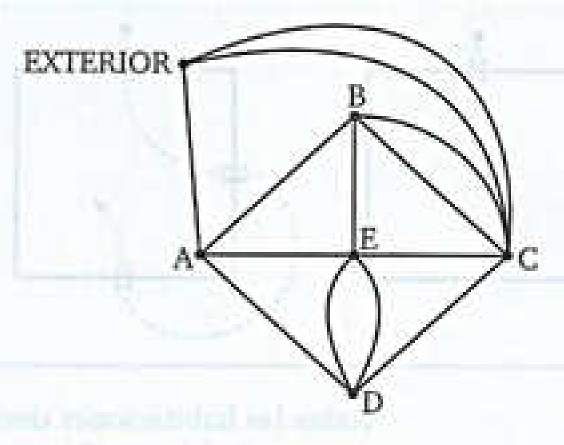
PROBLEMA 14 En la figura se indica el plano del primer piso de una casa que tiene cinco ambientes: A, B, C, D y E las cuales están conectadas entre sí por puestas, además de las puertas que dan al exterior. De las siguientes afirmaciones indique Verdadero (V) o falso (F).



I. Si desea pasar por todas las puestas es necesario repetir por lo menos dos de ellas.
II. Si se inicia el recorrido en E, entonces al pasar por todas las puertas y terminar en D es necesario repetir por lo menos cuatro puertas.
III. Si se inicia el recorrido en A, entonces al pasar por todas las puertas y terminar en el mismo A es necesario repetir por lo menos dos puertas.

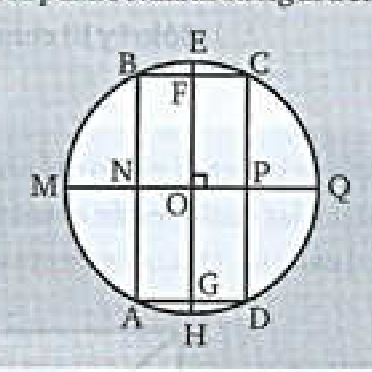
(Observación: En los recorridos solo está permitido pasar por las puertas)

Resolución:

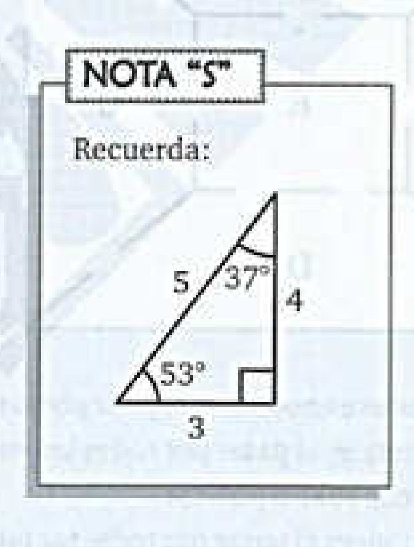


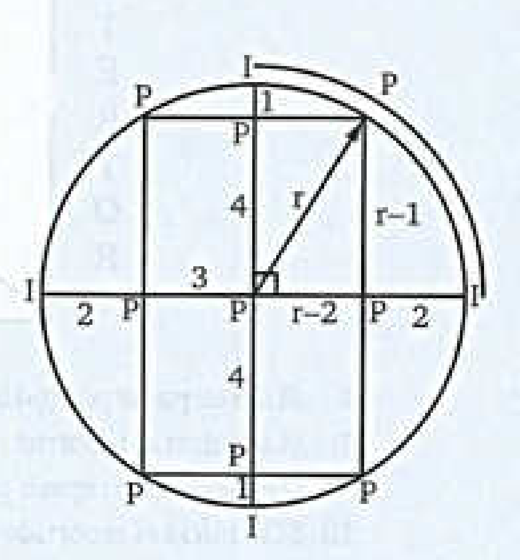
$\therefore$ I. F - II. F - III. V

PROBLEMA 15 En la figura se muestra un rectángulo inscrito en una circunferencia de centro O. Si EF = GH = 1 cm, MN = PQ = 2 cm. Calcule la mínima longitud que debe recorrer la punta de un lápiz para realizar la figura sin separarse del papel.



Resolución: De la figura, tenemos que r = 5

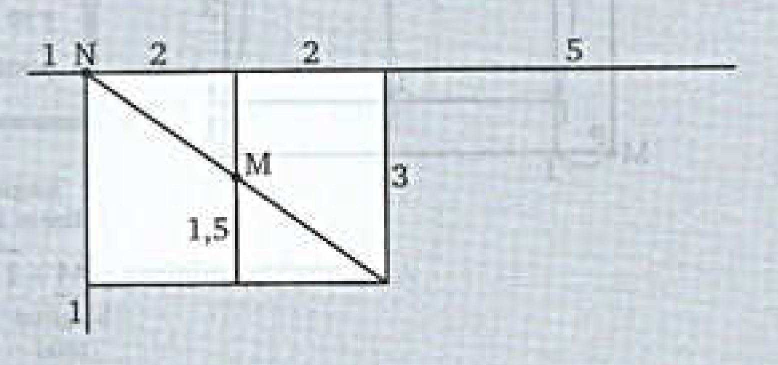




$$\text{Longitud mínima} = \underbrace{48 + 10\pi}_{\text{Longitud total}} + \underbrace{25\pi}_{\text{Longitud mínima a repetir}}$$

$$\therefore \text{Longitud mínima} = 48 + 35\pi$$

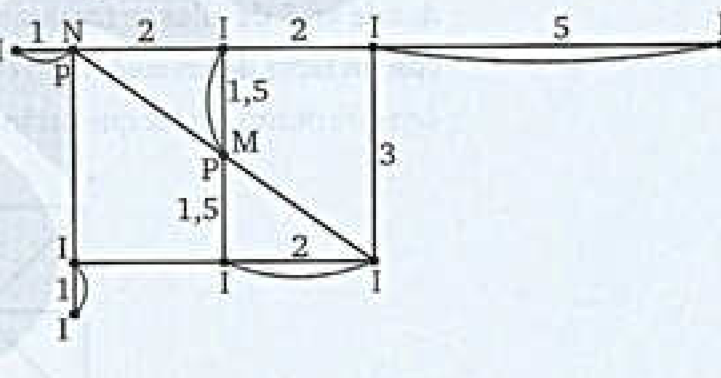
PROBLEMA 16 En la figura se muestra una estructura de alambre formada por varillas paralelas, perpendiculares y una diagonal. ¿Cuál es la mínima longitud, en centímetros, que debe recorrer una hormiga, que se encuentra en el punto M, para pasar por todas las varillas de la estructura y terminar finalmente en el punto N? (longitudes en centímetros)



Resolución: En la figura se muestra los trazos a repetir.

$$\text{N° líneas a repetir} = \frac{8-2}{2} = 3$$

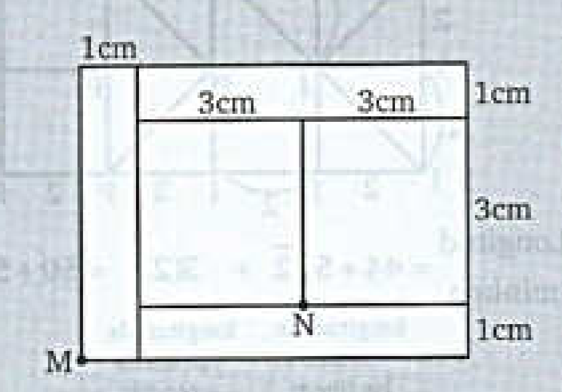
Esto si se empieza en un punto impar, pero como se debe empezar en M (punto par) se repiten dos líneas más como muestra el grafo.



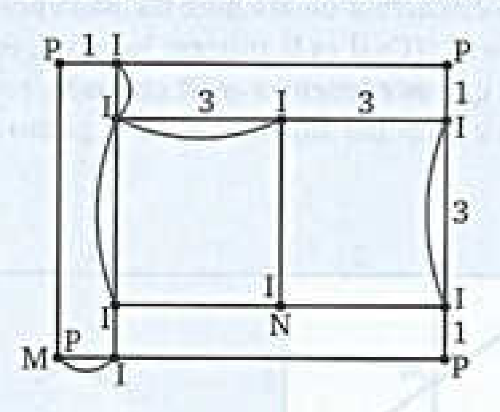
$$\text{Longitud mínima} = \underbrace{29}_{\text{longitud total}} + \underbrace{10{,}5}_{\text{longitud mínima de líneas a repetir}}$$

$$\therefore \text{Longitud mínima} = 39{,}5 \text{ cm}$$

PROBLEMA 17 En la figura se muestra una estructura de alambre formada por varillas paralelas y perpendiculares. ¿Cuál es la mínima longitud, en centímetros, que debe recorrer una hormiga, que se encuentra en el punto M, para pasar por todas las varillas de la estructura y terminar finalmente en el punto N? (longitudes en centímetros)



Resolución: En la figura se muestra los trazos a repetir.

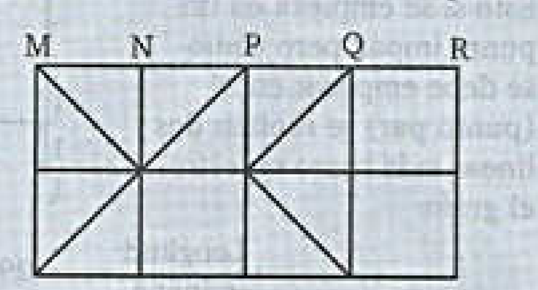


NOTA "S"

Cuando se empieza en un punto par se busca ir al punto impar más cercano y se deja otro punto impar, los demás puntos se convierten en pares.

$\therefore$ Longitud mínima = $\underbrace{44}_{\text{longitud total}} + \overbrace{11}^{\text{longitud de líneas a repetir}} = 55$ cm

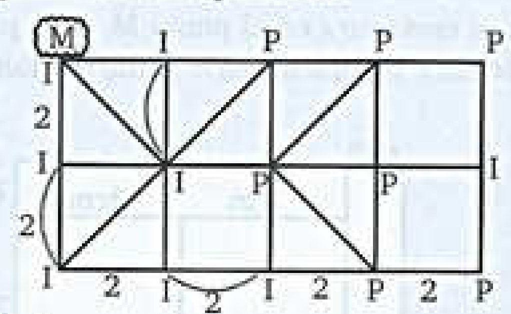
PROBLEMA 18 La figura mostrada está formada por 8 cuadrados congruentes de 2 cm de lado donde en 5 de ellos se trazaron su diagonal. Si Carlos quiere realizar la figura con un lápiz de un solo trazo continuo recorriendo la menor longitud posible, ¿en qué punto, de los que están nombrados con letras, podría comenzar?



Resolución: N° líneas a repetir $= \dfrac{8-2}{2} = 3$

Analicemos

* Si empezamos en el punto M.

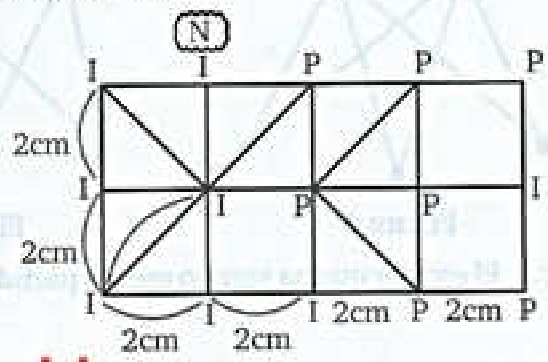


NOTA "S"

Si empieza en un punto par se debe terminar en el mismo punto par.

Longitud mínima $= \underbrace{44+5\sqrt{2}}_{\text{longitud de todas las líneas}} + \underbrace{3(2)}_{\text{longitud de las líneas a repetir}} = 50+5\sqrt{2}$

* Si empezamos en el punto N.



$$\text{Longitud mínima} = 44 + 5\sqrt{2} + \underbrace{4 + \sqrt{2}}_{\text{longitud de las líneas a repetir}} = 48 + 6\sqrt{2}$$

* Si empezamos en los puntos P, Q y R (puntos pares) la longitud mínima sería mayor a los dos casos anteriores.

∴ Para lograr la menor longitud posible se debe empezar en el punto M.

PROBLEMA 19 En un torneo de ajedrez organizado según el sistema de todos contra todos y en el que participan 5 escolares ya se jugaron 6 partidas. Iván y Mijaíl han jugado la mayor cantidad de partidas: 3 cada uno. ¿Cuántas partidas efectuó el jugador que ha realizado la menor cantidad de encuentros?

Resolución: Consideremos 2 casos.

CASO 1: Iván y Mijaíl no han jugado entre sí.
Cada uno de los restantes jugadores efectuó 2 partidas (Figura 1)

CASO 2: Iván jugó con Mijaíl.

Dividamos este caso en dos:

2a) Existe un jugador que no se ha enfrentado ni a Iván ni a Mijaíl.

2b) Cada uno de los escolares ha jugado o bien con Iván, o bien con Mijaíl (también es probable que haya jugado con ambos).

Representemos las cinco partidas efectuadas por Iván y Mijaíl.

2a) Este caso es imposible, por cuanto al trazar la secta arista, obtenemos una contradicción con la condición del problema, puesto que habrá otro escolar que también ha jugado 3 partidas (Figura 2).

2b) Hay sólo una posibilidad de trazar la sexta arista sin alterar las condiciones del problema (Figura 3).

Figura 1

Figura 2

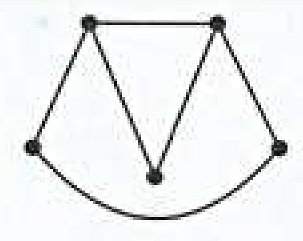
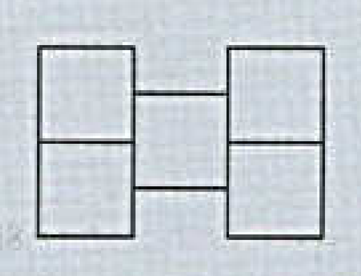


Figura 3

∴ El escolar que ha jugado menos partidas se ha enfrentado a dos participantes.

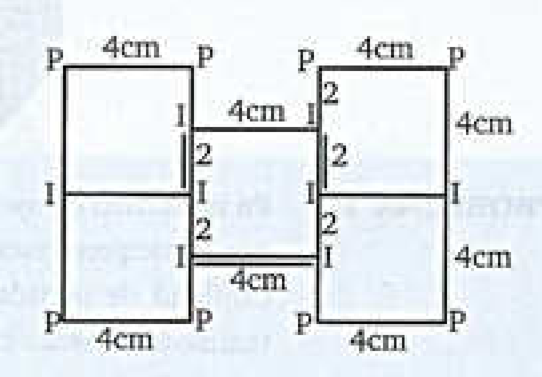
PROBLEMA 20 La figura está formada por 5 cuadrados congruentes de 4 cm de lado donde los vértices del cuadrado del centro son puntos medios de los lados de los cuadrados adyacentes a este. ¿Cuál es la mínima longitud que debe recorrer la punta de un lápiz para dibujar la figura de un solo trazo continuo?



Resolución:

$$\text{N° líneas a repetir} = \frac{8-2}{2} = 3$$

$$\text{Longitud mínima} = \underbrace{64}_{\text{longitud total}} + \underbrace{4+2(2)}_{\text{longitud mínima de líneas a repetir}} = 72 \text{ cm}$$



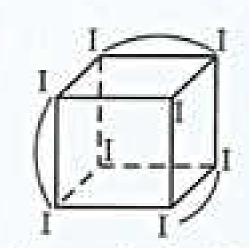
PROBLEMA 21 Una hormiga tarda 10 minutos en recorrer todas las aristas de una caja cúbica. Si cada arista mide 40 cm, ¿cuál es la menor rapidez en cm/minuto de la hormiga?

Resolución: Nos dicen que el recorrido lo hizo en 10 minutos, y nos piden la rapidez mínima, entonces el recorrido debe ser mínimo.

La figura tiene 8 puntos impares (sus vértices).

Entonces en su recorrido repite:

$$\frac{8-2}{2} = 3 \text{ aristas.}$$

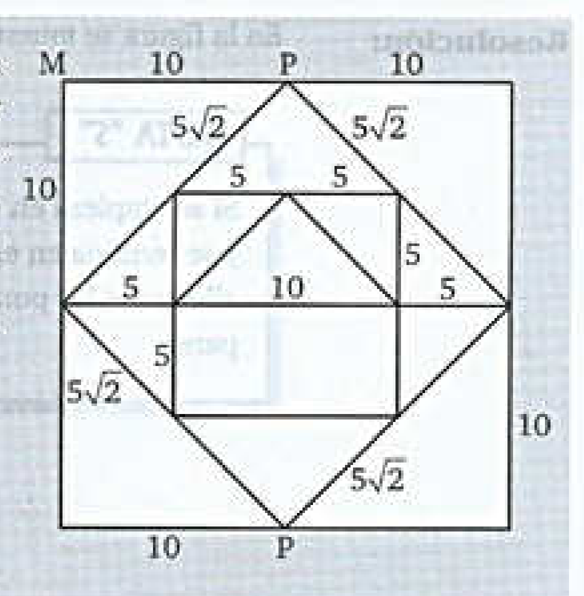


Como la figura tiene 12 aristas y repite 3 aristas, entonces está recorriendo 15 aristas y cada una mide 40 cm.

$$\text{recorrido mínimo} = 15(40 \text{ cm}) = 600 \text{ cm.}$$

$$\therefore \quad \text{rapidez} = \frac{600\text{cm}}{10\text{min}} = 60 \text{ cm / min}$$

PROBLEMA 22 En la figura se muestra una estructura de alambre formada de tres cuadrados y algunas varillas paralelas a los lados de los cuadrados. ¿Cuál es la mínima longitud, en centímetros, que debe recorrer una hormiga, que se encuentra en el punto M, para pasar por toda la estructura? (longitudes en centímetros)

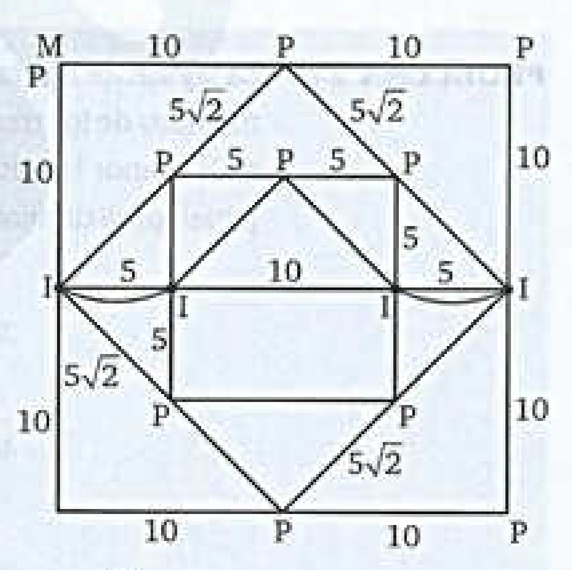


Resolución: En la figura se muestra los trazos a repetir.

$$\text{N° líneas a repetir} = \frac{4-2}{2} = 1$$

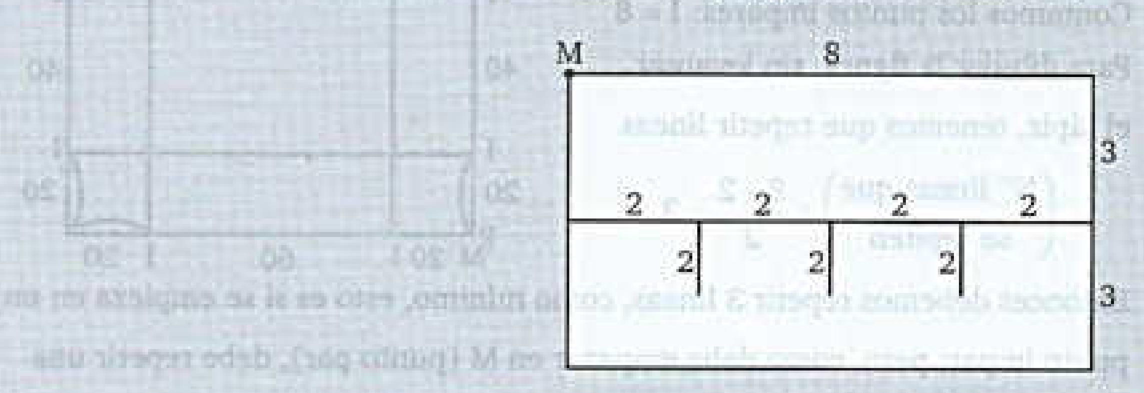
Esto si se empieza en un punto impar, pero como se empieza en M (punto par) debemos repetir una línea más para que todos los puntos sean pares.

$$\text{Longitud mínima} = \underbrace{140 + 50\sqrt{2}}_{\text{longitud total}} + \underbrace{5+5}_{\text{longitud de líneas a repetir}}$$



$\therefore$ Longitud mínima $= (150 + 50\sqrt{2})$ centímetros

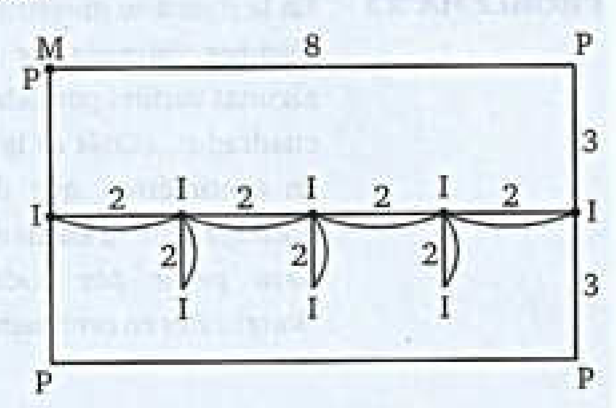
PROBLEMA 23 En la figura se muestra una estructura por varillas paralelas y perpendiculares. ¿Cuál es la mínima longitud, rn centímetros, que debe recorrer una hormiga, que se encuentra en el punto M, para pasar por todas las varillas de la estructura y terminar finalmente en el mismo punto? (longitudes en centímetros)



Resolución: En la figura se muestra los trazos a repetir.

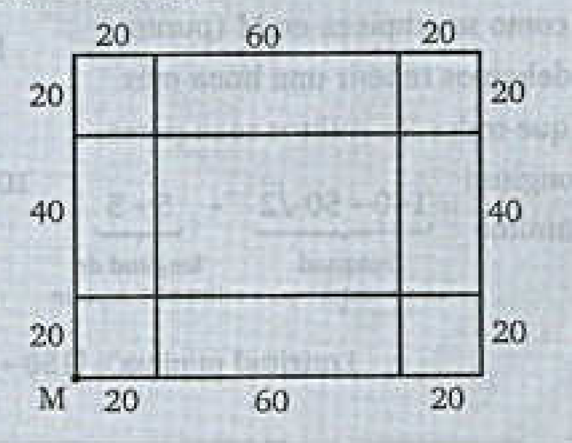
NOTA "S"

Si se empieza en un punto par y se termina en el mismo, para ello todos los puntos deben ser pares.



$\therefore$ Longitud mínima = $\underbrace{42}_{\text{longitud total}} + \underbrace{7(2)}_{\text{longitud de líneas a repetir}} = 56$ cm

PROBLEMA 24 La siguiente figura está formada por segmentos horizontales y verticales, y las medidas de los tramos están en centímetros. Si se empieza en el punto M, ¿cuál es la menor longitud que debe recorrer la punta de un lápiz, sin separarla del papel, para dibujar dicha figura?

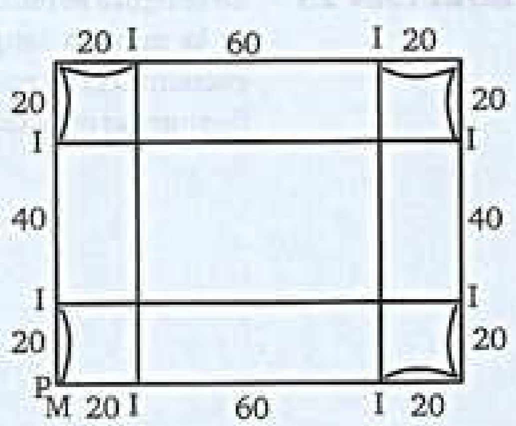


Resolución: Condición: Se empieza en el punto M.

Contamos los puntos impares: I = 8

Para dibujar la figura, sin levantar el lápiz, tenemos que repetir líneas.

$$\left(\begin{array}{c}\text{N° líneas que}\\ \text{se repiten}\end{array}\right) = \frac{8-2}{2} = 3$$

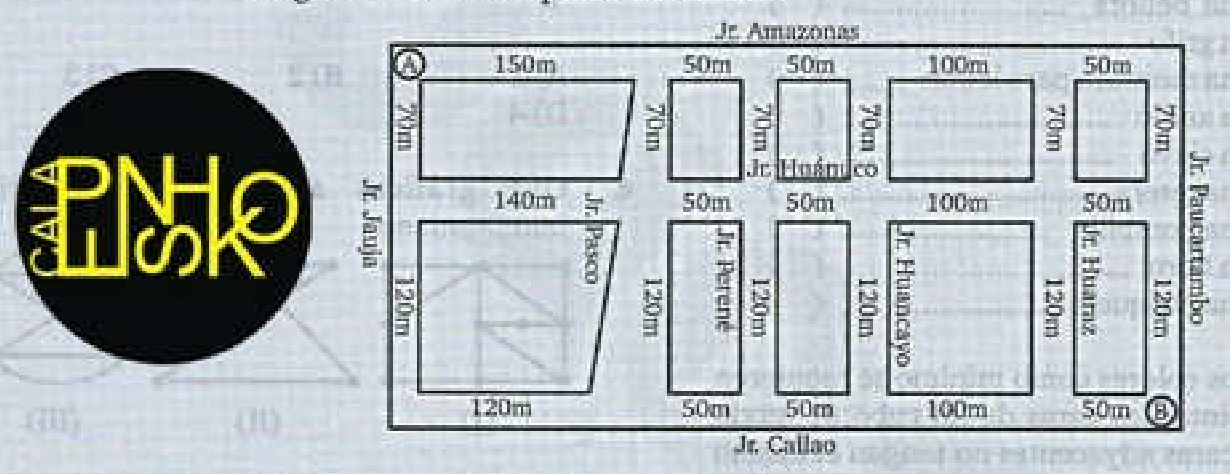


Entonces debemos repetir 3 líneas, como mínimo, esto es si se empieza en un punto impar; pero, como debe empezar en M (punto par), debe repetir una línea más (de M a P)

$$\begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{recorrida}\end{pmatrix} = \overbrace{4(100)+4(80)}^{\text{sin repetir}} + \overbrace{40+40+40}^{\text{repiten 3 líneas}} + \overbrace{20}^{\text{repite 1 línea más}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{recorrida}\end{pmatrix} = 720+120+20 = 860$$

PROBLEMA 25 Un turista llega a la ciudad de Tarma y pide informes en la oficina de turismo y le dan el siguiente mapa. El turista llega a la esquina del Jr. Amazonas con Jr. Jauja y observa su mapa y decide ir al cruce del Jr. Callao con Jr. Paucartambo, pero quiere pasearse por todos los jirones que están en el mapa antes de llegar a ese cruce, pero quiere hacerlo con el menor recorrido posible. ¿Cuál será la longitud mínima del paseo del turista?

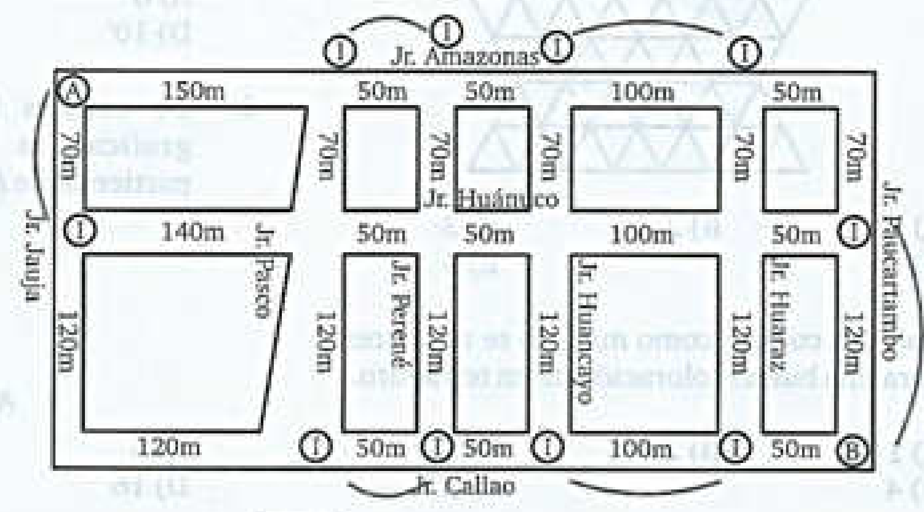


Resolución: Líneas a repetir $= \dfrac{10-2}{2} = 4$ y dos líneas más para cumplir con el objetivo de empezar en A y terminar en B

Longitud total : $400+390+370+6(190) = 2300$

Longiud de trazos repetidos : $50+100+70+120+50+100 = 490$

Longitud mínima $= 2300+490 = 2790 = 2{,}790$ km



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Relacione correctamente cada objeto con las categorías A, B, y C.

A. Objeto topológicamente equivalente a una esfera:

B. Objeto topológicamente equivalente a un toro:

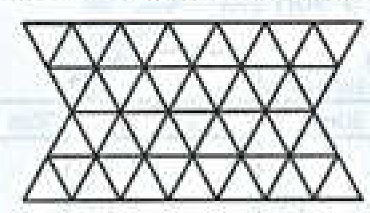
C. Objeto topológicamente equivalente a un toro con 2 agujeros:

Un cubo .... ( )
Una bellota .... ( )
Un grifo .... ( )
Una montura para lentes .... ( )
Un anillo .... ( )
Un clavo .... ( )
Una tetera .... ( )
Una bombilla .... ( )
Un libro .... ( )
Una chaqueta .... ( )

2. Cuántos colores como mínimo se requieren para pintar las caras de un cubo de modo que 2 caras adyacentes no tengan el mismo color.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Una colcha ha sido hecha de piezas triangulares ¿cuántos colores diferentes se requieren para que 2 piezas adyacentes por una frontera no tengan un mismo color.

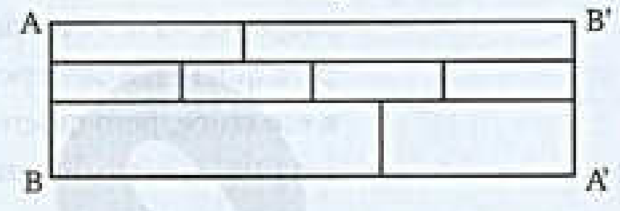


A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. Cuántos colores como mínimo se requieren para una buena coloración de un tetraedro.

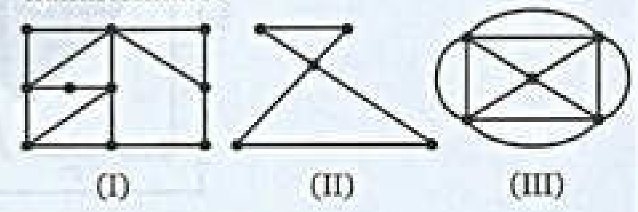
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

5. La gráfica muestra una tira de papel con trazos interiores marcados en ambas caras. Dese a uno de los extremos media vuelta y únase A con A', B con B' formando una banda de Möebins.
Hallar el mínimo número de colores que se necesitan para obtener una buena coloración de dicho mapa.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Qué gráficas admiten un recorrido hamiltoniano:

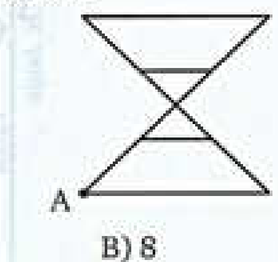


A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Todos E) Ninguno

7. Cuál es el tiempo mínimo que utilizará una hormiga para recorrer todos los lados y las 2 diagonales de un campo rectangular de 80 m de largo y 60 m de ancho a una rapidez de 90 m/min.

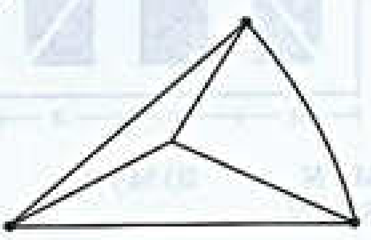
A) 6' B) 4' C) 60'
D) 10' E) 20'

8. De cuántas formas diferentes se puede graficar la figura mostrada siempre partiendo de A.



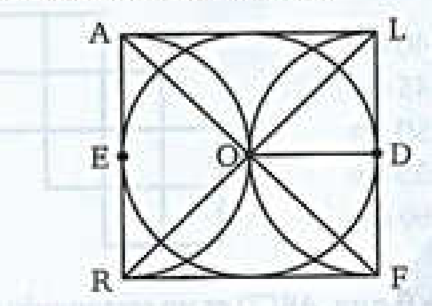
A) 6 B) 8 C) 12
D) 16 E) 18

9. Con un alambre de 60 cm se desea confeccionar un tetraedro regular haciendo el menor gasto posible; si por hacer un corte cobran S/.10 ¿cuál es el gato mínimo?



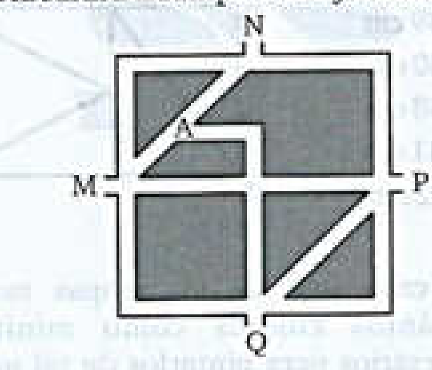
A) S/.10 B) S/.20 C) S/.30
D) S/.40 E) S/.50

10. Por donde se debe empezar para pasar por todas las líneas una sola vez.



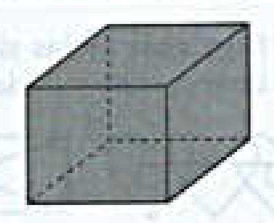
A) A B) L D) D
D) R E) F

11. Una persona se encuentra en el punto A y debe recorrer todos los caminos del parque, sin repetir ninguno de ellos. ¿Por cuál puerta saldrá a cumplir el objetivo?



A) M B) N C) P
D) Q E) No puede salir

12. El cubo mostrado está hecho de alambre y su arista mide 20 cm. Una hormiga tarda 10 minutos en recorrer toda las aristas del cubo partiendo de cualquiera de los vértice con rapidez constante, calcule la menor rapidez de la hormiga.

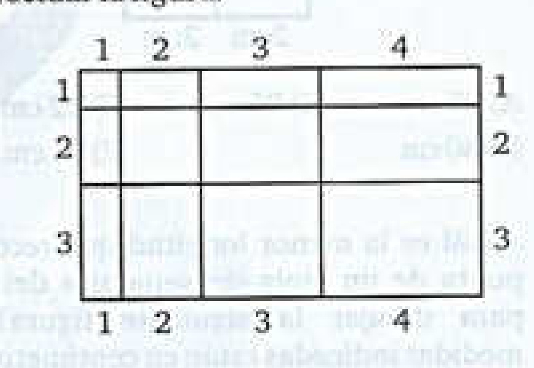


A) 60 cm/min
B) 24 cm/min
C) 30 cm/min
D) 40 cm/min
E) 50 cm/min

13. Al dibujar un hexágono regular de 5cm de lado con todas sus diagonales principales, ¿cuál es la mínima longitud que recorre la punta del lápiz sin separar del papel al realizar el dibujo?

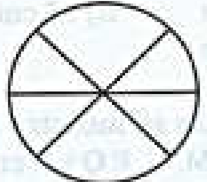
A) 70 cm B) 76 cm C) 60 cm
D) 65 cm E) 80 cm

14. En la figura se muestra un rectángulo. Calcule la mínima longitud en centímetros que debe recorrer la punta de un lápiz para efectuar la figura.



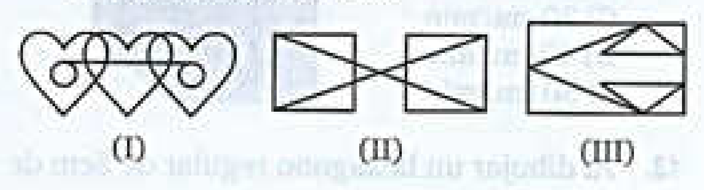
A) 79 cm B) 77 cm C) 76 cm
D) 78 cm E) 80 cm

15. En la figura, se muestra una circunferencia dividida por sus diámetros en 6 partes iguales, si el radio de la circunferencia es de 6 cm. ¿Cuál es la mínima longitud que debe recorrer la punta de un lápiz sin levantarla del papel para ejecutar completamente el dibujo?



A) $3(4\pi + 5)$ cm B) $5(9\pi + 4)$ cm
C) $4(4\pi + 9)$ cm
D) $2(4\pi + 9)$ cm E) $(16\pi + 2)$ cm

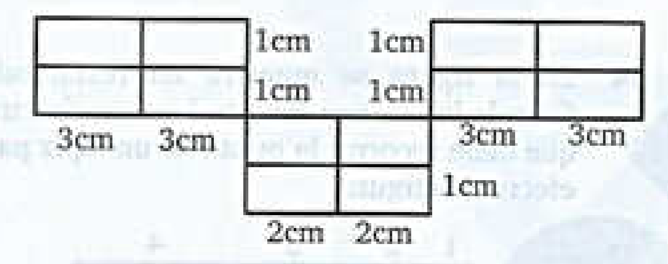
16. Diga cuál de las siguientes figuras admite un recorrido euleriano:



(I) (II) (III)

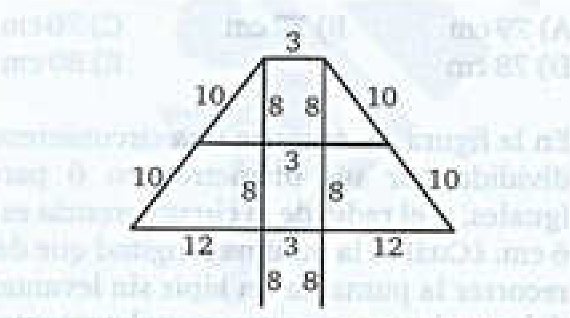
A) Sólo I B) I y II C) I y III
D) Sólo III E) I, II y III

17. En la figura se indica una estructura rectangular hecha de alambre. Si una hormiga desea recorrer por toda la estructura, ¿cuál es la longitud mínima de su recorrido?



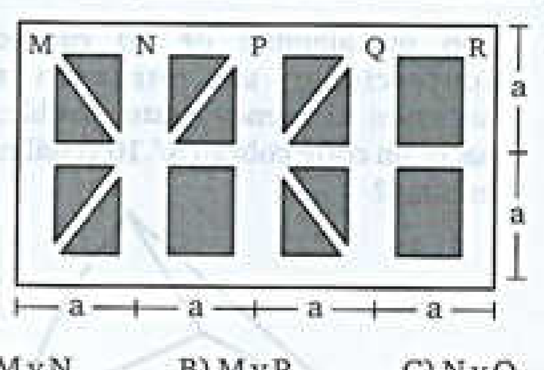
A) 78 cm B) 76 cm C) 82 cm
D) 80 cm E) 81 cm

18. ¿Cuál es la menor longitud que recorre la punta de un lápiz sin separarla del papel para dibujar la siguiente figura? (las medidas indicadas están en centímetros)



A) 139 cm B) 55 cm C) 149 cm
D) 151 cm E) 153 cm

19. En la figura se muestra la ubicación de las personas M, N, P, Q y R en las esquinas de un parque. Si cada una de las personas se deslaza con la misma rapidez constante; ¿Qué personas recorrerán todo el contorno de las áreas verdes en el menor tiempo posible?



A) M y N B) M y P C) N y Q
D) Sólo N E) Sólo M

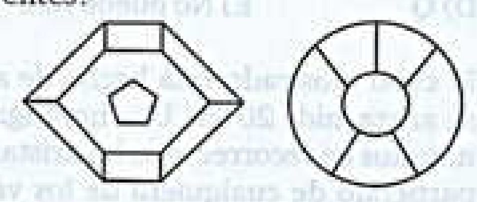
20. Con 28 cerillas de 5cm se han construido la siguiente figura. ¿Cuál debe ser la menor longitud que debe recorrer la punta del lápiz sin separarlo del papel para dibujarla?

A) 140 cm
B) 145 cm
C) 150 cm
D) 155 cm
E) 160 cm

21. En la figura, ABCD es un rectángulo construido de alambre. Si una hormiga recorre toda la estructura, empezando en D y terminando en E, determine la longitud mínima recorrida por dicha hormiga (las unidades están dadas en cm).

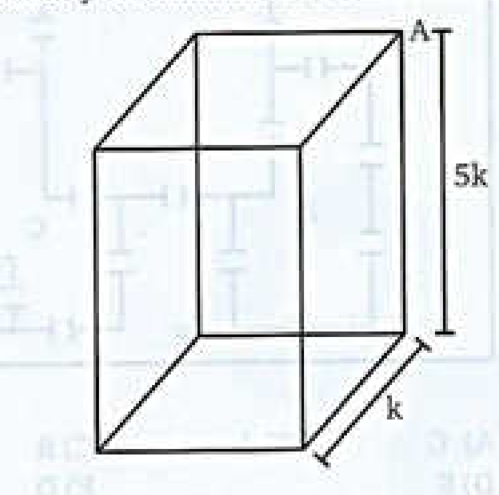
A) 39 cm
B) 40 cm
C) 38 cm
D) 41 cm
E) 42 cm

22. En cada uno de los mapas mostrados, ¿cuántos colores como mínimo son necesarios para pintarlos de tal modo que dos regiones adyacentes tengan colores diferentes?



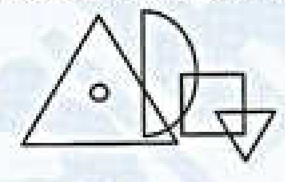
A) 2; 4 B) 3; 4 C) 4; 3
D) 3; 3 E) 4; 4

23. Con un alambre de 280 cm de longitud se construye la estructura de un prisma regular cuadrangular. Un físico coloca un caracol llamado Veloz en el vértice. Si el caracol se desplaza con una rapidez de 4 cm/s. ¿En cuánto tiempo , como mínimo, Veloz logrará recorrer todas las aristas del prisma, iniciando y terminando su recorrido en A?



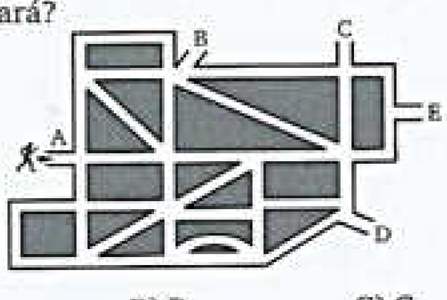
A) 120 s B) 70 s C) 80 s
D) 90 s E) 100 s

24. ¿Cuántos colores como mínimo se necesitan para pintar el mapa de manera que 2 regiones que estén en contacto a lo largo de una línea presenten colores diferentes?



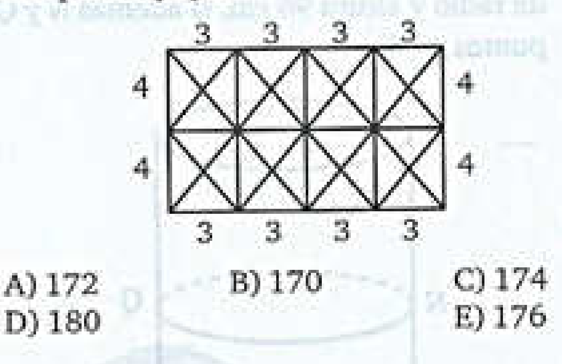
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

25. Un atleta decide recorrer todas las calles que se muestran en la figura de una sola intención y sin pasar dos veces por una misma calle. Si empieza en A. Por dónde terminará?



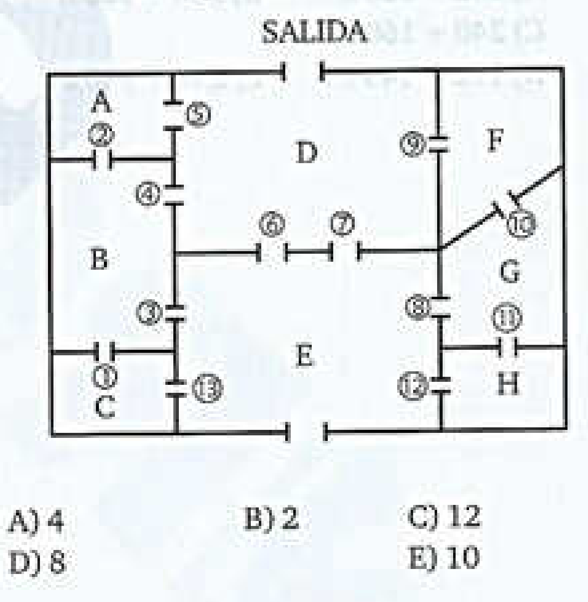
A) A B) B C) C
D) D E) E

26. ¿Cuál es el mínimo recorrido que debe realizar la punta de un lápiz, para poder dibujar la siguiente figura, esto sin levantar el lápiz del papel?



A) 172 B) 170 C) 174
D) 180 E) 176

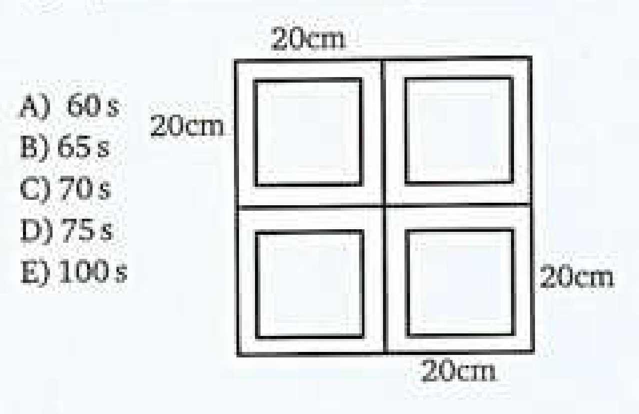
27. Carlitos visita un museo cuyo plano se muestra en la figura. Si luego de salir, él se da cuenta de qué pasó exactamente una vez por cada una de las puertas a excepción de una. ¿Cuál es dicha puerta?



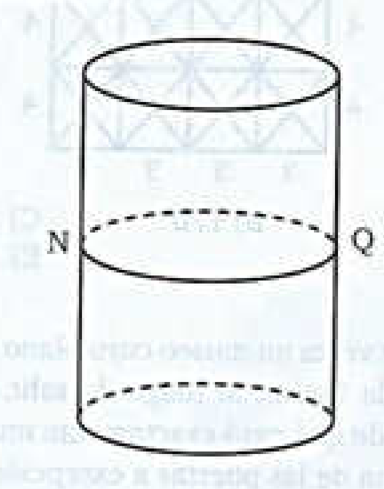
A) 4 B) 2 C) 12
D) 8 E) 10

28. ¿Cuál es el tiempo mínimo que emplearía Juanito para recorrer los pasillos de un museo cuya configuración se muestra en la figura, si él camina con una rapidez de 4 m/s?

A) 60 s
B) 65 s
C) 70 s
D) 75 s
E) 100 s

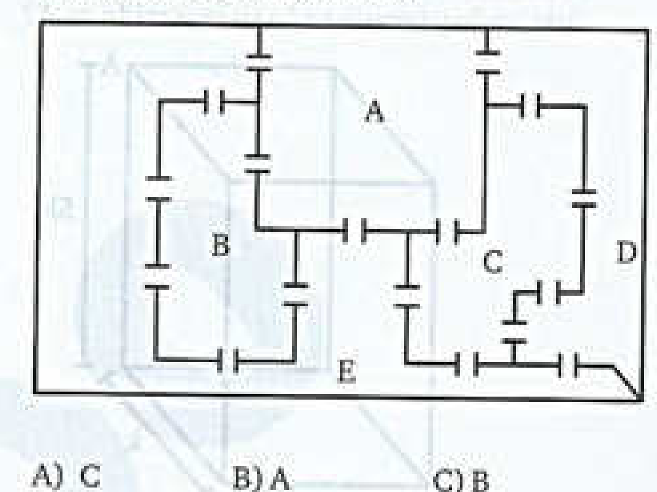


29. Halle el recorrido mínimo que debe hacer un caracol para deslizarse por todo el alambre que forma una estructura cilíndrica de 20 cm de radio y altura 96 cm, si además N y Q son puntos medios.



A) $192 + 120\pi$ B) $288 + 120\pi$
C) $240 + 160\pi$
D) $192 + 140\pi$ E) $240 + 140\pi$

30. En la figura se muestra el plano del primer piso de la casa de Noelly, el cuál está formado por cinco ambientes. Si ella se encuentra en la habitación C y quiere pasar solo por todas las puertas, sin repetir puerta y sin salir al exterior en ningún momento, ¿en que habitación terminará su recorrido?



A) C B) A C) B
D) E E) D

31. Si quisiéramos dibujar las continentes como bloques completos sobre una esfera como el planisferio ¿Cuános colores serían necesarios utilizar como mínimo?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Análisis Combinatorio

CAPACIDADES

- Desarrollar técnicas de conteo en evaluación de sucesos y formar coordinatorias.
- Conocer los principios de conteo (adición y multiplicación)
- Desarrollar el pensamiento coordinatorio.
- Aplicar y relacionar en problemas cotidianos, tratando de vincularlos con la realidad.

31 sabores

Los matemáticos comen helados, como cualquier persona; pero algunas veces no hacen cola del mismo modo que la demás gente. ¿Reconoces a la matemática? Es la que está deteniendo la fila porque esta sentada; y es que está pensando: en helados. Más exactamente, en barquillos dobles. Está tratando de imaginar cuántos barquillos dobles pueden obtenerse si hay 31 sabores para escoger.

¡Éste es un verdadero problema!
Tiene que ver con cosas llamadas "permutaciones" y "combinaciones". Si consideras que no importa qué sabor está arriba y cuál abajo, estás hablando de combinaciones.

Pero si consideras que un barquillos doble con limón arriba y fresa abajo no es lo mismo que fresa arriba y limón abajo, entonces estás hablando de permutaciones.

Hay una gran diferencia.
Es más fácil comenzar con un número más pequeño. ¿Cuáles son tus tres sabores favoritos? ¿Vainilla, chocolate y ron con pasas? Muy bien. ¿Cuántas combinaciones hay? ¿Y cuántas permutaciones? sugerencia: mientras adquieres práctica, puede ayudarte hacer un dibujo.

INTRODUCCIÓN

Encontrar cuántos tipos de boletos son necesarios confeccionar para una ruta que tiene 5 paraderos principales (A, B, C, D, E) si al ir de un paradero a otro tiene un costo diferente tanto de ida como de regreso, es todo un reto para el análisis combinatorio que en sus inicios surgió como herramienta de apoyo en la teoría de los juegos (naipes, dados, extracciones, etc.).

La combinatoria nació en el siglo XVI y en su estudio teórico dieron sus aportes entre otros hombres: B. Pascal; Fermat; Bernoulli; Leibnitz y L. Euler.

En los últimos años la combinatoria ha entrado a un período de intenso desarrollo, relacionado con el crecimiento general del interés hacia los problemas de matemática discreta, el análisis matemático tiene nexos muy importantes con la programación lineal; la estadística y en toda actividad en el que se pueda desarrollar la teoría de información.

A continuación desarrollaremos el tema primero dando a conocer el factorial de un número, pues ésta operación estará presente en todo el capítulo y debemos saber de qué se trata.

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Se define factorial de un número **n** al producto de los números enteros y consecutivos desde la unidad hasta **n** inclusive. Se nota por:

$$n! \quad \text{o} \quad \underline{|n}$$

Se lee: "factorial de n o n factorial"

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1)n \ ; \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos:

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$20! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 19 \times 20$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)!$ no existe

$(-5)!$ no existe

$0! = 1 \rightarrow$ Convención

$1! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$

$9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880$

$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628800$

Por convención $0! = 1$

DESARROLLO PARCIAL DE UN FACTORIAL

$$8! = 8\times\underbrace{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}_{7!}$$

$$8! = 8\times7\times\underbrace{6\times5\times4\times3\times2\times1}_{6!}$$

$$8! = 8\times7!$$

$$8! = 8\times7\times6!$$

$$n! = n(n-1)!$$
$$n! = n(n-1)(n-2)!$$
$$\vdots$$

Aplicación: Simplificar: $A = \dfrac{20!+19!+18!}{19!+18!}$

Resolución:

$$A = \frac{20!+19!+18!}{19!+18!}$$

$$A = \frac{20\times19\times18!+19\times18!+18!}{19\times18!+18!}$$

$$A = \frac{18!(20\times19+19+1)}{18!(19+1)}$$

$$A = \frac{400}{20}$$

$$\therefore\quad A = 20$$

Aplicación: Calcule "a" en: $\dfrac{a!+(a+1)!+(a+2)!}{a!} = \dfrac{a!+(a+1)!}{a}$

Resolución: $\dfrac{a!+(a+1)!+(a+2)!}{a!} = \dfrac{a!+(a+1)!}{a}$

$$\frac{a!+(a+1)a!+(a+2)(a+1)a!}{a!} = \frac{a(a-1)!+(a+1)a(a-1)!}{a}$$

$$\frac{a![1(a+1)+(a+1)(a+1)]}{a!} = \frac{a(a-1)![1+(a+1)]}{a}$$

$$a+2+(a+2)(a+1) = (a-1)!(a+2)$$

$$(a+2)(1+a+1) = (a-1)!(a+2)$$

$$a+2 = (a-1)!$$

Tabulando para a = 4: $4+2 = (4-1)!$

$6 = 3!$ (es correcto)

$$\therefore\quad a = 4$$

COFACTORIAL O SEMIFACTORIAL DE UN NÚMERO

$$n!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times (n-2) \times n$$

n es un número par positivo.

$$6!! = 2 \times 4 \times 6 = 48$$
$$6!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 = 384$$

$$n!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (n-2) \times n$$

n es un número impar positivo.

$$5!! = 1 \times 3 \times 5 = 15$$
$$5!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105$$

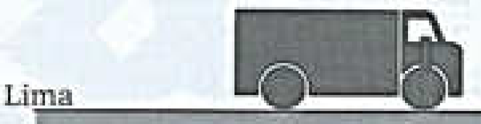
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

PRINCIPIO DE ADICIÓN

Veamos el siguiente caso:

Carolina desea viajar de Lima a Tacna y tiene a su disposición 2 líneas aéreas y 5 líneas terrestre. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el viaje?

Va por aire (2 líneas)



Va por tierra (5 líneas)

Lima Tacna

Carolina puede elegir viajar por aire o por tierra, pero evidentemente no puede viajar por ambas vías al mismo tiempo.

Luego: $\underbrace{\text{Actividad A (viajar por tierra)}}_{2 \text{ maneras}}$ o $\underbrace{\text{Actividad B (viajar por aire)}}_{5 \text{ maneras}}$

2 maneras + 5 maneras = 7 maneras

∴ Carolina tiene 7 maneras diferentes de realizar su viaje

Podemos ahora en base a este ejemplo enunciar el principio de adición.

Si una actividad A ocurre n maneras diferentes y otras actividad B ocurre de m maneras diferentes, entonces A ó B ocurren de m + n maneras diferentes.

En el principio de adición, o bien se realiza una actividad o bien se realiza la otra, mas nunca pueden realizarse simultáneamente.

Aplicación 1: Leslie desea comprar un televisor a crédito. En la "Tienda 1" le ofrecen 3 sistemas de crédito, la "Tienda 2" le ofrece 4 sistemas de crédito, distintos a los de la tienda "Tienda 1", y la "Tienda 3" le ofrece 5 sistemas de crédito, distintos a los de las otras tiendas. ¿De cuántas formas diferentes puede Leslie comprar el televisor?

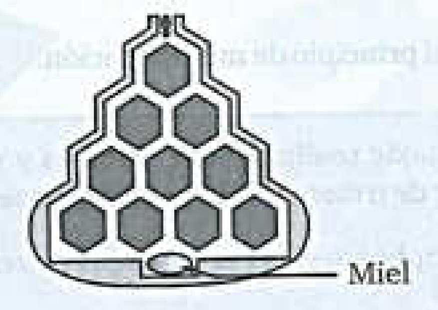
Resolución:

Un televisor no puede ser comprado en 2 tiendas al mismo tiempo, entonces Leslie puede:

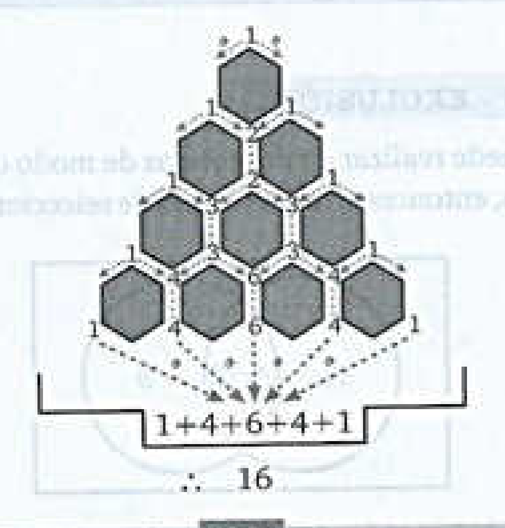
Comprarlo en la "Tienda 1"	o	Comprarlo en la "Tienda 2"	o	Comprarlo en la "Tienda 3"	
3 formas	+	4 formas	+	5 formas	= 12 formas
(ofrece 3 sistemas de crédito)		(ofrece 4 sistemas de crédito)		(ofrece 5 sistemas de crédito)	

∴ Tiene 12 formas de comprar el televisor

Aplicación 2: Una abeja se introduce a un panal (ver figura) en búsqueda de un poco de miel, la miel se encuentra en el fondo del panal (ver figura). ¿De cuántas maneras diferentes puede la abeja llegar a la miel, teniendo en cuenta que no debe retroceder?



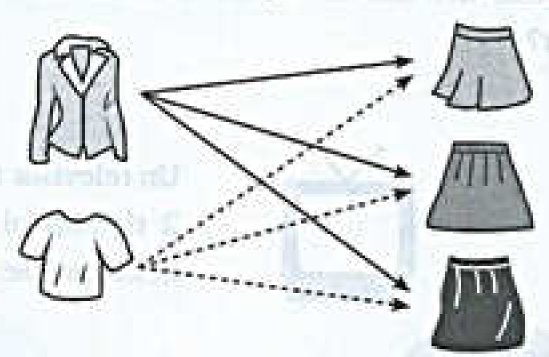
Resolución:



PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Veamos el siguiente caso:

Karina tiene 3 faldas: roja, azul y verde; también tiene 2 blusas: blanca y crema. ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse utilizando dichas prendas?



Las formas son:

blusa blanca – falda azul
blusa blanca – falda ploma
blusa blanca – falda negra
blusa celeste – falda azul
blusa celeste – falda ploma
blusa celeste – falda negra

} 6 formas

Se observa que tiene 2 formas de elegir una blusa y para cada una de éstas tiene 3 formas de elegir una falda.

$$\underbrace{\text{Actividad A (elegir blusa)}}_{2\text{ formas}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\text{Actividad B (elegir falda)}}_{3\text{ formas}}$$

$$2 \text{ formas} \times 3 \text{ formas} = 6 \text{ formas}$$

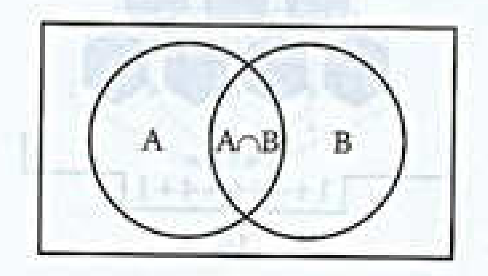
∴ Karina tiene 6 formas diferentes de vestirse.

Podemos ahora enunciar el principio de multiplicación.

> Si una actividad A se puede realizar de m maneras y para cada una de estas maneras otra actividad B se puede realizar de n maneras, entonces A y B se pueden realizar de m × n maneras.
>
> En el principio de multiplicación las actividades se realizan una a continuación de otro o simultáneamente.

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN - EXCLUSIÓN

Si un proceso de selección se puede realizar de dos formas de modo que la primera admira n opciones, y hay r opciones comunes a ambas, entonces el número total de selecciones posibles es $n + m - r$.

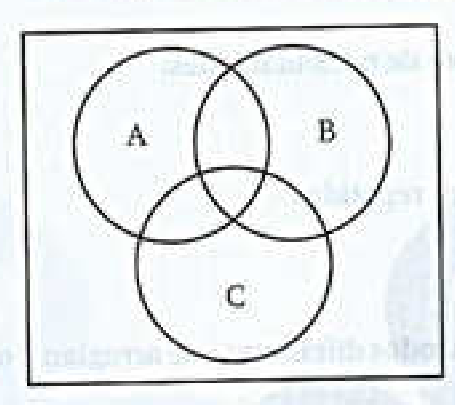


Terminología conjuntista:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

Este resultado se extiende al caso de tres o más formas de seleccionar un elemento teniendo en cuenta todas las repeticiones que intervienen,

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$



Aplicación ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar en fila 7 señoritas (Ana, Betty, Carmen, Daniela, Elvira, Fiorella, Gina) si Ana no puede ubicarse junto a carmen ni Betty junto a Daniela?

Resolución: Aplicando principio de inclusión - exclusión:

(N° de maneras de ordenar a las 7; sin restricciones) − (...cuando Ana se ubica junto a Carmen) − (...cuando betty se ubica junto a Daniela) + (...cuando Ana se ubica junto a Carmen y a la vez Betty junto a Daniela)

[AC] B D _ E G ; [BD] A C E F G ; [AC] [BD] E F G

$$7! \quad - \quad 2!\times 6! \quad - \quad 2!\times 6! \quad + \quad 2!\times 2!\times 5!$$

$$= 5020 \quad - \quad 1440 \quad - \quad 1440 \quad + \quad 480$$

$$= 3640$$

PERMUTACIONES

¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse 3 personas en una banca de 2 asientos?

Se observa que en la primera y la segunda forma, los que están sentados son B y C. Pero ambas formas se consideran diferente porque B y C están ubicados en orden diferente. (B a la izquierda de C en el primer caso y B a la derecha de C en el segundo caso).

Luego las permutaciones son los diferentes arreglos u ordenaciones que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto. Una permutación se diferencia de otra si tiene al menos un elemento diferente o si sus elementos tienen un orden diferente.

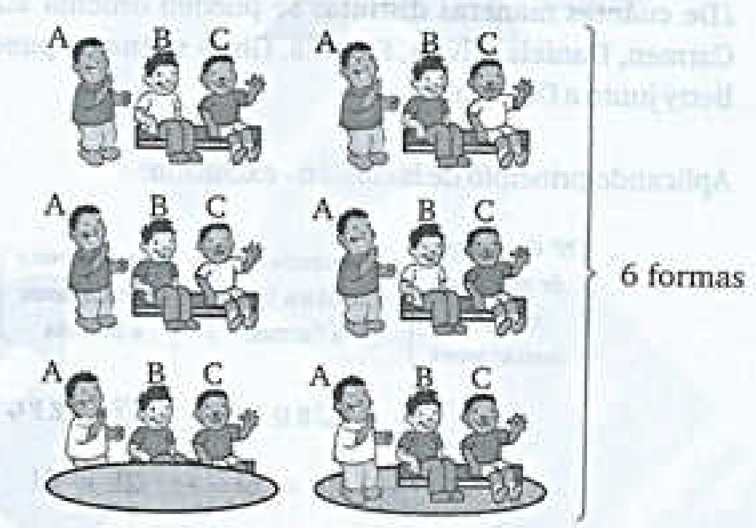
Estudiaremos los siguientes tipos de permutaciones:

- Permutación lineal
- Permutación circular
- Permutación con elementos repetidos

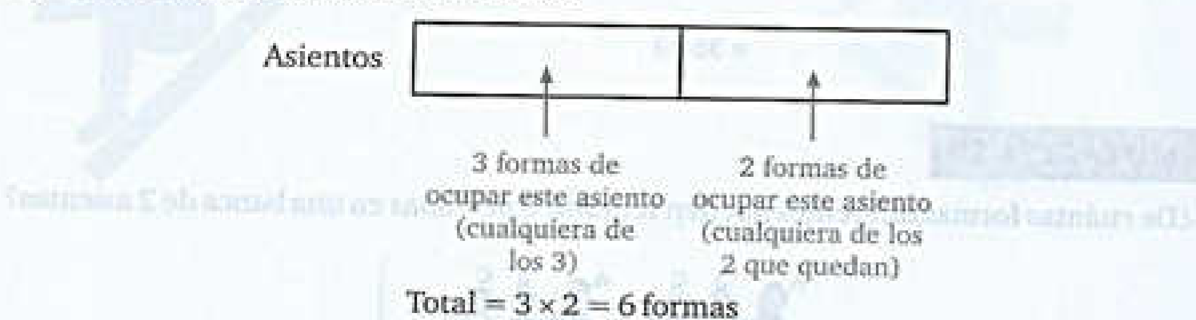
PERMUTACIÓN LINEAL

Se da cuando los elementos son todos diferentes y se arreglan u ordenan el línea recta.

Recordemos el caso anterior:



También podemos calcular de la siguiente forma:



Total = 3 × 2 = 6 formas

"Hemos permutado 3 personas tomándolas de 2 en 2"

$$P_2^3 = 3\times 2 = \frac{3\times 2\times 1}{1} = \frac{3!}{1!} = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$\boxed{P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!}}$$

En general las permutaciones de n elementos tomados de K en K

$$P_K^n = \frac{n!}{(n-K)!} \qquad 0 < K \leq n$$

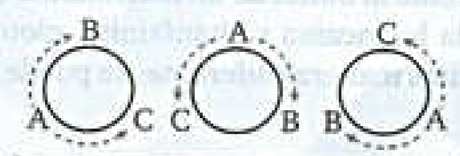
PERMUTACIÓN CIRCULAR

Se da cuando los elementos son distintos y se arreglan u ordenan alrededor de un objeto o forman una línea cerrada.

Ejemplo: ¿De cuantas maneras se puede ordenar 3 personas (A, B, C) alrededor de una mesa?

Resolución: Si permutamos 3 personas nos deben resultar:

$P_{(3)} = 3! = 6$ maneras {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}


Las 3 son idénticas porque a la derecha de A está C y a su izquierda está B
B A C

Las 3 son idénticas porque A tiene a su derecha a B y a su izquierda a C
C A B

∴ Sólo son 2 formas

Se observa que no importa el lugar que ocupa cada persona sino su posición relativa respecto a los demás. Para encontrar las diferentes permutaciones circulares debemos tomar un elemento de referencia y permutar a los demás.

"Hemos permutado circularmente a 3 personas"

$$Pc_{(3)} = 2 = 2! = (3-1)!$$
$$Pc_{(3)} = (3-1)!$$

En general las permutaciones circulares de n elementos será:

$$Pc_{(n)} = (n-1)!$$

PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

Se da cuando los elementos a ordenar no son todos distintos, es decir, hay un elemento o más de uno que se repite.

Ejemplo: ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden realizar con todas las letras de la palabra MAMA?

Resolución:

MAMA MAAM MMAA
AMAM AMMA AAMM } 6 formas

"Hemos permutado 4 elementos donde 2 se repiten (las letras A) y otros 2 también se repiten (las letras M)"

$$P^4_{2,2} = 6 = \frac{24}{4} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

En general:

$$P^n_{k_1\,k_2\,k_3} = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times k_3! \times \ldots}$$

COMBINACIONES

Ejemplo: Glotoncio está parado frente al buffet de un matrimonio el cual consta de arroz con pollo, cebiche, papa a la huancaina y chanfainita. glotoncito es aficionado a los "combinados". ¿De cuántas maneras diferentes se puede preparar un "combinado" de tres comidas?

Resolución:

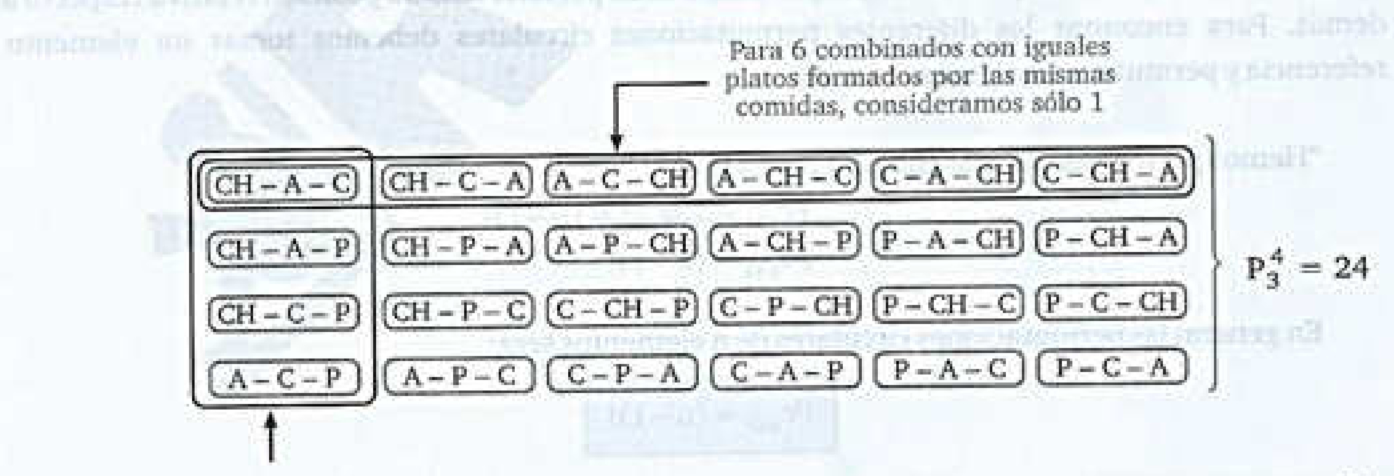
chanfainita

arroz con pollo

cebiche

papa a la huancaína

Supongamos que para encontrar los "combinados" debemos realizar permutaciones con las 4 comidas tomándolas de 3 en 3.



Sólo estos 4 combinados son diferentes porque difieren en el menos una comida.

Entonces los combinados (combinaciones) de 4 comidas tomadas de 3 en 3 son sólo 4.

$$C^4_3 = 4 = \frac{P^4_3}{6} = \frac{\dfrac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!}$$

$$C^4_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!}$$

En general las combinaciones de n elementos tomados de k en k

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad 0 \le k \le n$$

Las combinaciones son las diferentes formas de agrupar a los elementos de un conjunto, tomando una parte de ellos o todos a la vez.

En una combinación el orden de los elementos no determina una forma diferente. Una combinación se diferencia de otra si posee al menos un elemento diferente.

OBSERVACIONES

1. $C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Ejemplos: • $C_2^6 = \dfrac{6\times5}{2} = 15$ • $C_2^9 = \dfrac{9\times8}{2} = 36$

2. $C_3^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Ejemplos: • $C_3^5 = \dfrac{5\times4\times3}{6} = 10$ • $C_3^{10} = \dfrac{10\times9\times8}{6} = 120$

3. $C_1^n = n$

Ejemplos: • $C_1^4 = 4$ • $C_1^7 = 7$

4. $C_n^n = 1$

Ejemplos: • $C_5^5 = 1$ • $C_{11}^{11} = 1$

5. $C_k^n = C_{n-k}^n$

Ejemplos: • $C_8^{10} = C_{10-8}^{10} = C_2^{10}$ • $C_{12}^{15} = C_{15-12}^{15} = C_3^{15}$

6. $C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$

Ejemplo: • $C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 2^4 - 1 = 15$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Hallar x en:

$$(x + 1)! = 120$$

Rpta.: ....

2. Simplificar:

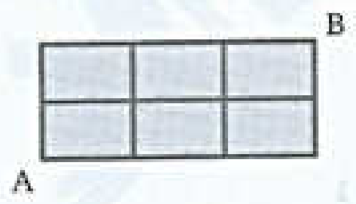
$$\frac{12!+11!}{13(10!)}$$

Rpta.: ....

3. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ir de A hacia C?

Rpta.: ....

4. ¿De cuántas formas diferentes se puede ir de A hacia B, si sólo se puede ir hacia arriba o hacia la derecha?



Rpta.: ....

5. ¿De cuántas maneras puede elegirse un comité de cuatro personas en un club de nueve miembros?

Rpta.: ....

6. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra LIBRO, uniendo letras vecinas?

L

I   I

B

R   R

O

Rpta.: ....

7. Con 6 hombres y 6 mujeres, de cuántas maneras se puede formar una pareja.

Rpta.: ....

8. ¿De cuántas maneras podrá vestirse una persona que tiene 3 pares de zapatillas, 4 buzos (2 iguales), 5 pares de medias y 6 polos (3 iguales)?

Rpta.: ....

9. Si un club tiene 4 candidatos para Presidente, 3 candidatos para Secretario y 2 candidatos para Tesorero, ¿de cuántas maneras puede elegirse la mesa directiva?

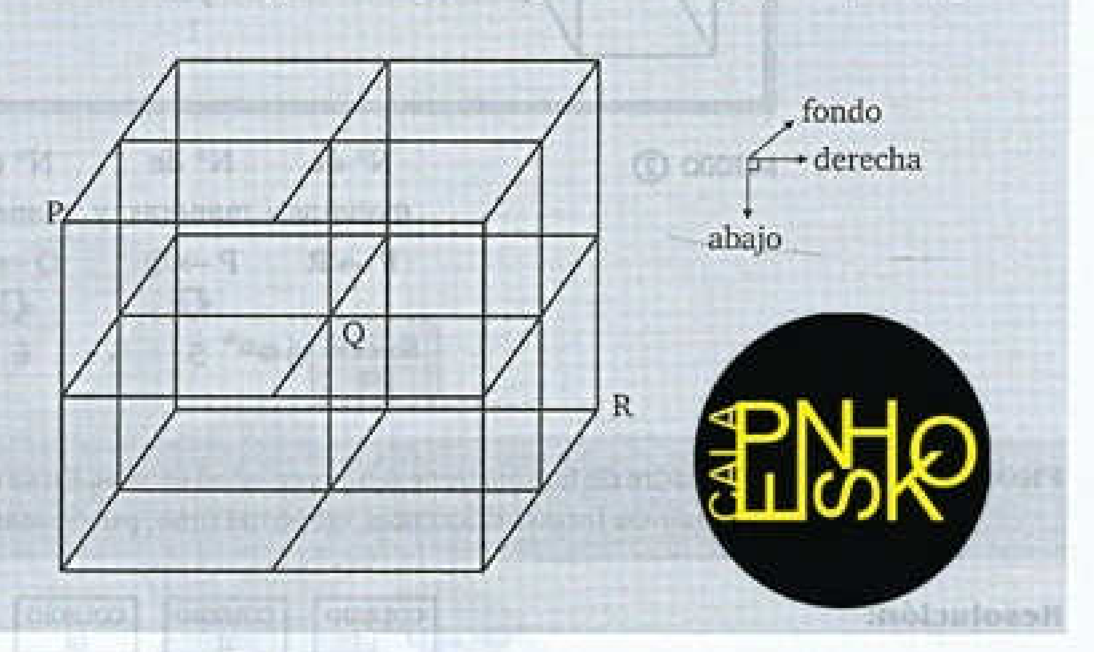
Rpta.: ....

10. Calcule el número de permutaciones que pueden formarse con las letras de la palabra "OSHKOSH", tomadas todas a la vez

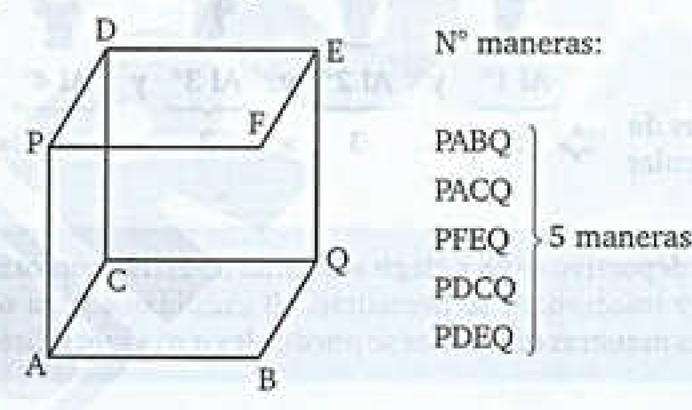
Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 La figura mostrada es una estructura construida de alambre. Recorriendo solamente por los alambres, hacia la derecha, hacia abajo o hacia el fondo. ¿Cuántas rutas distintas existen desde el punto P al punto R, pasando siempre por el punto Q?



Resolución: I) De "P" hacia "Q"

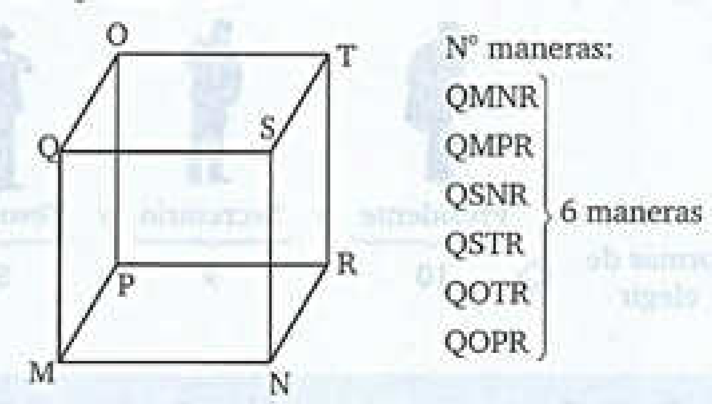


N° maneras:

PABQ
PACQ
PFEQ
PDCQ
PDEQ

} 5 maneras

II) De "Q" hacia "R"

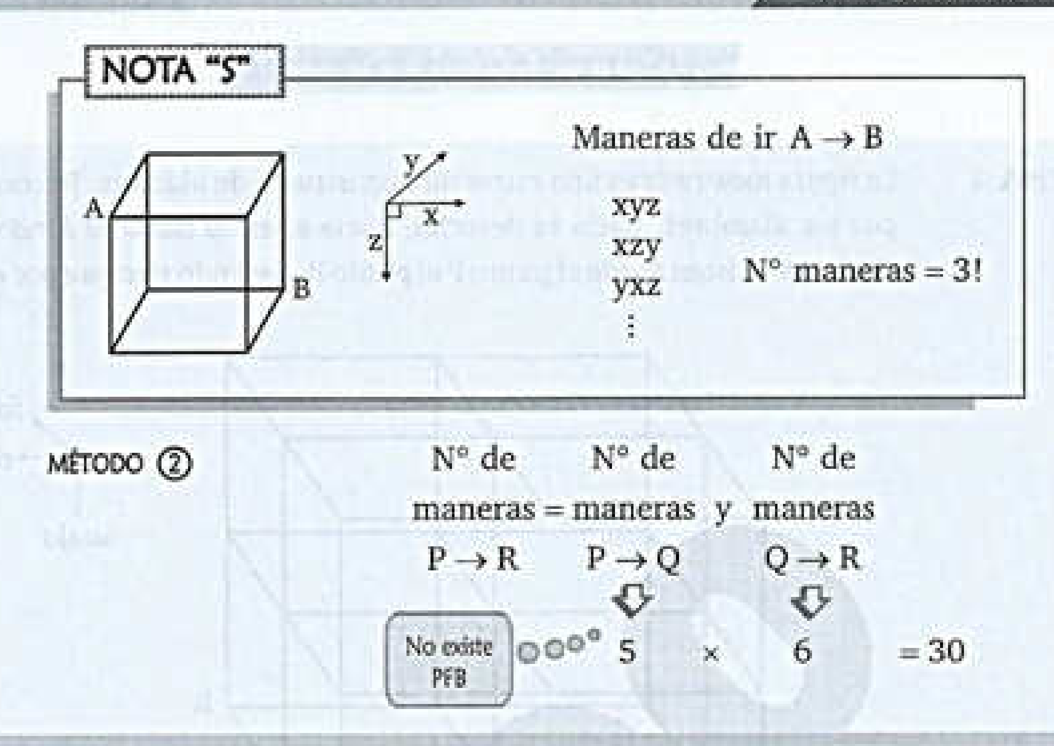


N° maneras:

QMNR
QMPR
QSNR
QSTR
QOTR
QOPR

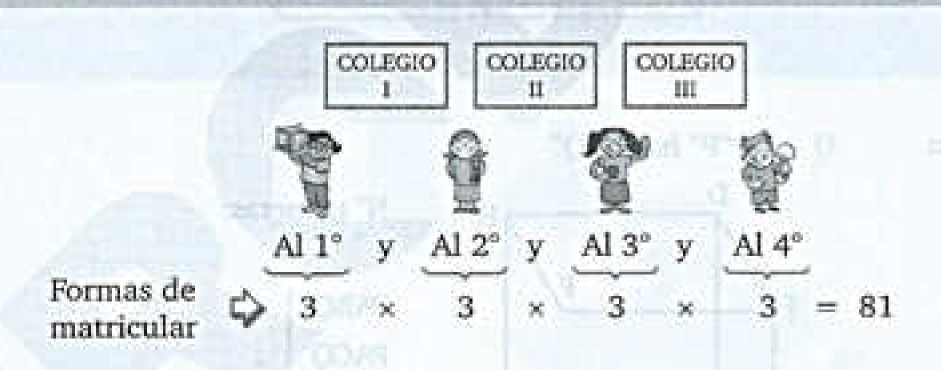
} 6 maneras

Total de maneras (P – Q – R) = 5 × 6 = 30



PROBLEMA 2 Una madre de familia tiene 4 hijos en edad escolar. En su distrito existen 3 colegios. ¿De cuántas formas diferentes, como máximo, puede matricular a sus hijos?

Resolución:



PROBLEMA 3 En un club deportivo se va a elegir a la junta directiva conformada por: presidente, secretario y tesorero. Si se presentan 10 candidatos para ocupar dichos cargos, ¿de cuántas maneras diferentes se puede elegir a la junta directiva?

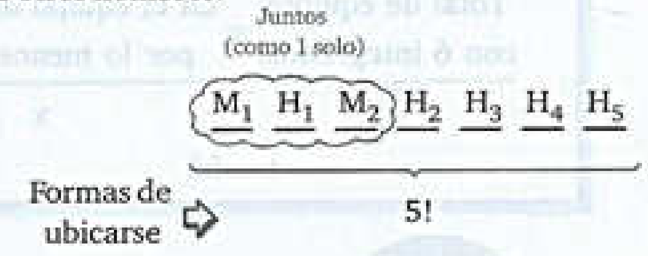
Resolución: Son 10 candidatos para elegir

PROBLEMA 4 En una fila de 7 asientos se van a ubicar 2 mujeres y 5 hombres. ¿De cuántas formas diferentes pueden ubicarse, si un hombre se ubica entre las mujeres?

Resolución: A continuación mostramos un ejemplo de lo que nos piden en el problema:

$$M_1 \quad H_1 \quad M_2 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4 \quad H_5$$

Para que la condición se cumpla debemos mantener juntos a las mujeres y al hombre entre ellas ($M_1 \quad H_1 \quad M_2$) y así juntos como si fuesen uno solo se permutaran con los otros hombres.



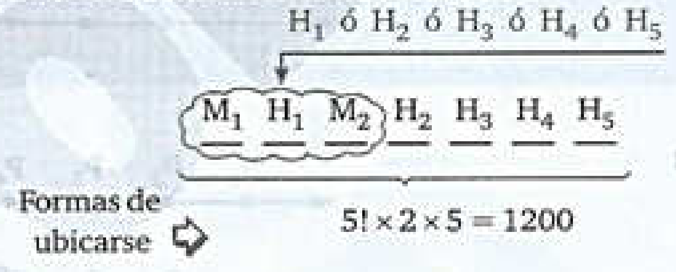
Formas de ubicarse ⇨ $5!$

Para cada una de estas formas, hay 2 maneras de ubicar a las mujeres.

$$M_1 \quad H_1 \quad M_2 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4 \quad H_5$$

Formas de ubicarse ⇨ $5! \times 2$

Pero hay 5 formas de ubicar a un hombre entre las mujeres.



Formas de ubicarse ⇨ $5! \times 2 \times 5 = 1200$

PROBLEMA 5 Se tiene un grupo de 6 varones y 3 damas, y se desea formar un equipo de fulbito (6 integrantes). ¿De cuántas maneras diferentes se podrá hacerlo, si en el equipo debe haber por lo menos 1 dama?

Resolución: Varones: V Damas: D

6V y 3D

Formar un equipo

Por lo menos 1 dama

6 integrantes

Entonces el equipo puede formarse con:

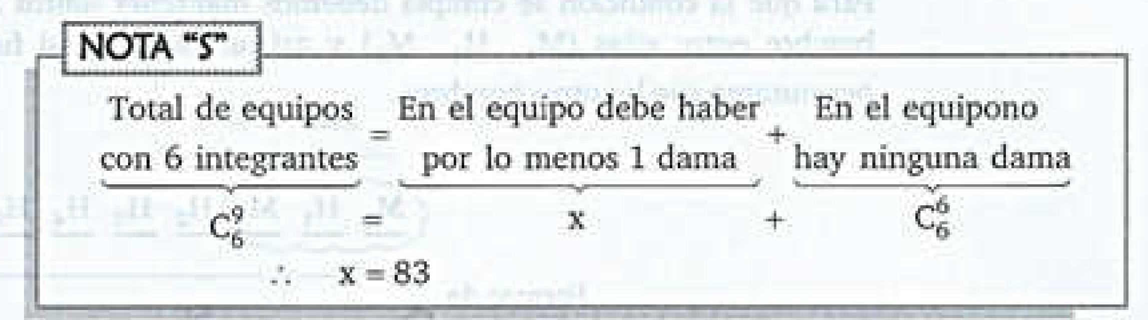
(1D y 5V) ó (2D y 4V) ó (3D y 3V)

Maneras de formar el equipo ⇨ $C_1^3 \times C_5^6 \quad + \quad C_2^3 \times C_4^6 \quad + \quad C_3^3 \times C_3^6$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$C_1^3 \times C_1^6 + C_1^3 \times C_2^6 + C_3^3 \times C_3^6$$

$$3 \times 6 + 3 \times \frac{6\times 5}{2} + 1 \times \frac{6\times 5\times 4}{6} = 83$$


NOTA "S"

$$\underbrace{\text{Total de equipos con 6 integrantes}}_{C_6^9} = \underbrace{\text{En el equipo debe haber por lo menos 1 dama}}_{x} + \underbrace{\text{En el equipono hay ninguna dama}}_{C_6^6}$$

$$\therefore \quad x = 83$$

PROBLEMA 6 En la siguiente figura, L_1 // L_2. ¿Cuántos triángulos se pueden formar, cuyos vértices sean los puntos indicados?

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 → L_1

P_8 P_9 P_{10} P_{11} P_{12} → L_2

Resolución:

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 → L_1

P_8 P_9 P_{10} P_{11} P_{12} → L_2

Para formar un triángulo debemos elegir 3 puntos, esto quiere decir que el número de triángulos que se pueden formar será igual al número de formas de elegir 3 puntos.

Ahora los 3 puntos se pueden elegir de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix}\text{2 puntos}\\ \text{de } L_1\end{pmatrix} \text{y} \begin{pmatrix}\text{1 punto}\\ \text{de } L_2\end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix}\text{1 punto}\\ \text{de } L_1\end{pmatrix} \text{y} \begin{pmatrix}\text{2 puntos}\\ \text{de } L_2\end{pmatrix}$$

$$\text{N° de triángulos} = \text{Formas de elegir 3 puntos} = C_2^7 \times C_1^5 + C_1^7 \times C_2^5$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{7\times 6}{2} \times 5 + 7 \times \frac{5\times 4}{2}$$

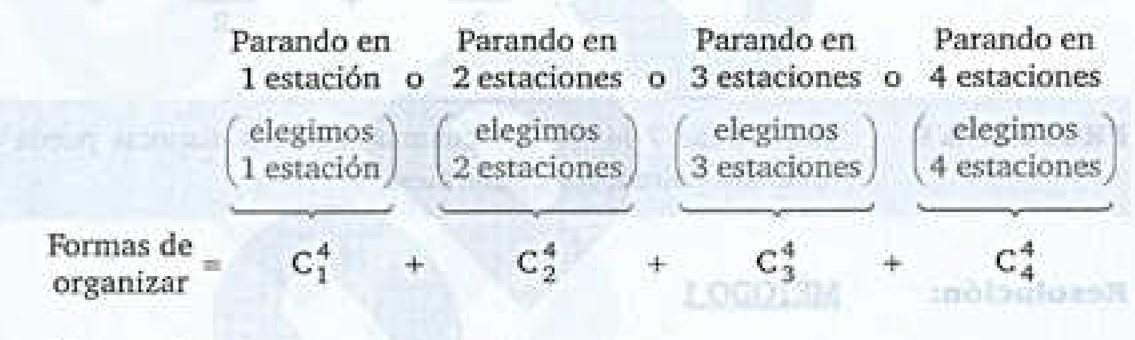
$$\text{N° de triángulos} = 175$$

PROBLEMA 7 Un tren empieza su recorrido en Lima y lo termina en Huancayo. Entre Lima y Huancayo están las estaciones A, B, C y D. Se quiere ir de Lima a Huancayo parando en una o más de las estaciones intermedias. ¿De cuántas formas distintas se puede organizar el viaje en tren?

Resolución:

Se puede parar en una o más de las estaciones intermedias.

Entonces, el viaje se puede organizar:

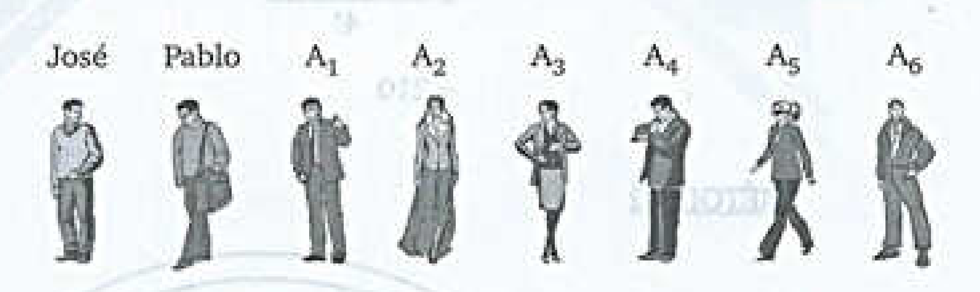


$$\text{Formas de organizar} = C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4$$

$$\therefore \text{Formas de organizar} = 2^4 - 1 = 15$$

PROBLEMA 8 Betty es amiga de José, Pablo y 6 amigos más. ¿De cuántas maneras diferentes puede seleccionar un grupo de 5 amigos para cenar, si José y Pablo no pueden estar en el mismo grupo?

Resolución:



Seleccionar

5 amigos

"J" y "P" no pueden estar en el mismo grupo

Entonces, el grupo se puede elegir así:

J y no P		P y no J		Ni J ni P	
J y otros 4	o	P y otros 4	o	5	
Estos 4 se eligen de los otros 6		Estos 4 se eligen de los otros 6		Estos 5 se eligen de los otros 6	
C_4^6	+	C_4^6	+	C_5^6	
↓		↓		↓	
C_2^6	+	C_2^6	+	C_1^6	
$\therefore\ \dfrac{6\times5}{2}$	+	$\dfrac{6\times5}{2}$	+	6	= 36

PROBLEMA 9 María tiene 7 hijos. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir a 4 de ellos y ordenarlos alrededor de una mesa?

Resolución: MÉTODO 1

Elige a 4 de los 7 y Ordena a los 4 alrededor de la mesa

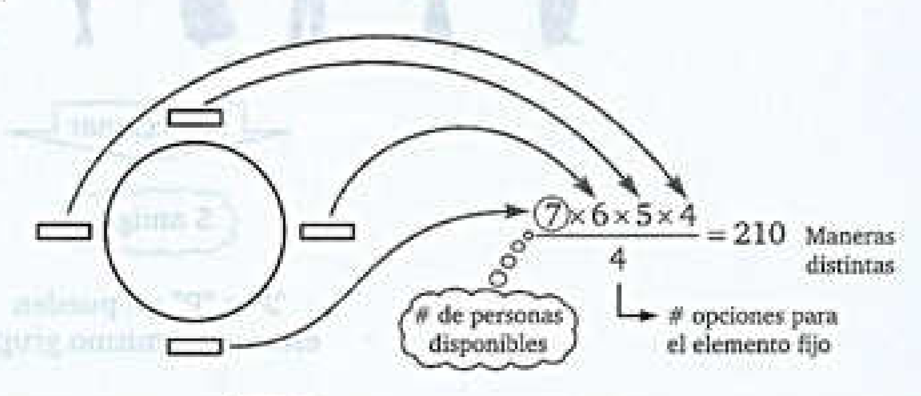
$$C_4^7 \times Pc(4)$$

$$=\frac{7!}{3!\times4!}$$

$$=\frac{4!\times5\times6\times7}{4!}$$

$$=210$$

MÉTODO 2



PROBLEMA 10 Un avión debe realizar diariamente 2 viajes al Cusco, 3 a Trujillo y 2 a Iquitos. ¿De cuántas maneras distintas se pueden programar los viajes?

Resolución: Representemos los viajes de la siguiente manera:

$$\underbrace{\text{C C}}_{\substack{2\\ \text{viajes a}\\ \text{Cusco}}} \quad \underbrace{\text{T T T}}_{\substack{3\\ \text{viajes a}\\ \text{Trujillo}}} \quad \underbrace{\text{I I}}_{\substack{2\\ \text{viajes a}\\ \text{Iquitos}}}$$

Programar los viajes quiere decir en que orden se van a realizar. Por lo tanto las diferentes formas de programar los viajes será igual a las diferentes permutaciones que se pueden hacer con los 7 viajes.

ORDEN DE LOS VIAJES

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Formas de programar los viajes (Permutamos los 7 viajes)	C	C	T	T	T	I	I
	T	C	I	T	C	I	T
	I	I	T	T	C	C	T
				⋮			

Pero estas permutaciones son con elementos repetidos, entonces:

$$\therefore \begin{matrix}\text{Maneras de}\\ \text{programar}\\ \text{los viajes}\end{matrix} = P^{7}_{2;3;2} = \frac{7!}{2!\times 3!\times 2!} = 210$$

PROBLEMA 11 En una heladería venden 4 sabores de helados: coco, fresa, guanábana y lúcuma; con 3 tipos de barquillo: simple, barquimiel y barquimiel especial. ¿De cuántas formas diferentes se puede pedir un helado con 1 ó más bolas?

Resolución:
Sabores: coco, fresa, guanábana y lúcuma
Barquillos: simple, barquimiel y barquimiel especial

El helado se puede pedir:

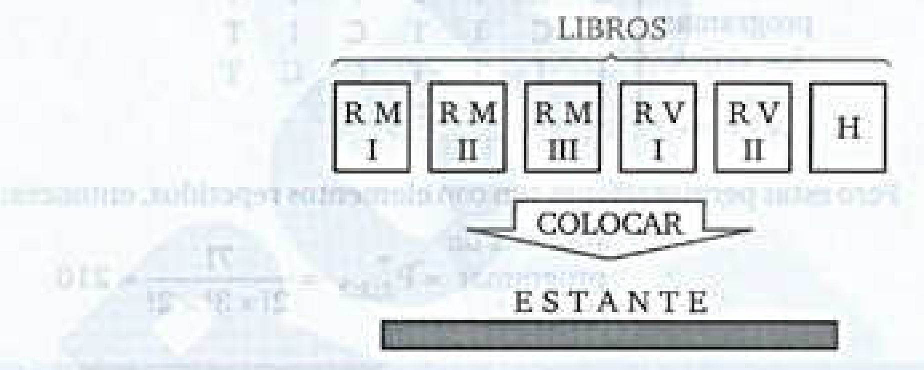
$$\text{Con 1 bola} \Rightarrow \overbrace{\underset{\text{formas}}{3}}^{\substack{\text{Elegimos}\\ \text{1 barquillo}}} \times \overbrace{\underset{\text{formas}}{4}}^{\substack{\text{Elegimos}\\ \text{1 sabor}}} = 12 \text{ formas}$$

$$\text{O con 2 bolas} \Rightarrow \overbrace{\underset{\text{formas}}{3}}^{\substack{\text{Elegimos}\\ \text{1 barquillo}}} \times \overbrace{\underset{\text{formas}}{C^4_2}}^{\substack{\text{Elegimos}\\ \text{2 sabores}}} = 18 \text{ formas}$$

$\therefore$ Total = 12 + 18 + 12 + 3 = 45 formas

PROBLEMA 12 Se tienen 3 libros de R.M. de diferentes autores, 2 libros de R.V. de diferentes autores y 1 libro de Historia. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar estos libros sobre un estante, si los libros de un mismo curso deben estar juntos?

Resolución:

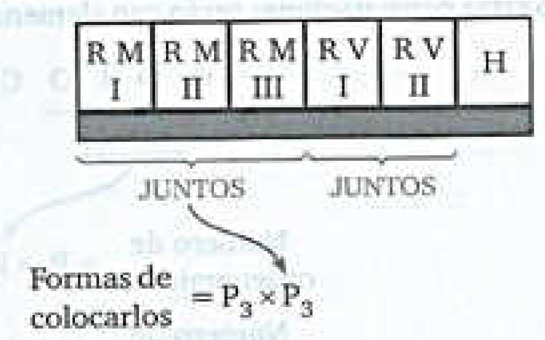


Las diferentes formas de colocar los libros será igual a las diferentes formas de permutarlos.

Como los libros de RM deben estar juntos, para empezar, los consideraremos como si fuese 1 sólo libro. Los mismos para los libros de RV. Por lo tanto empezaremos permutando a "3" libros.

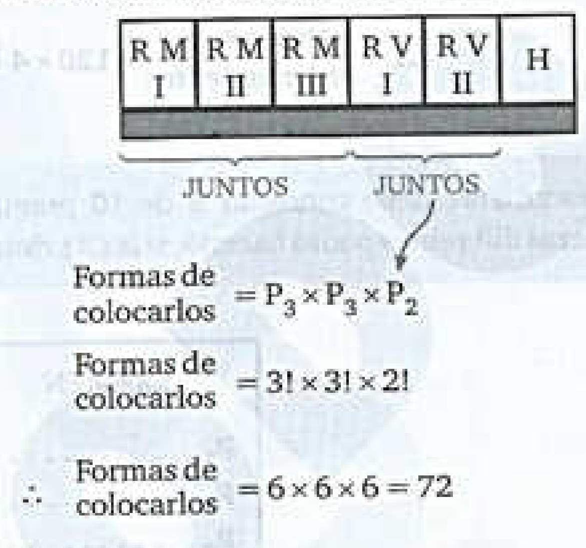
Formas de colocarlos $= P_3$

Pero para cada una de estas formas, los libros de RM pueden permutarse:



Formas de colocarlos $= P_3 \times P_3$

Y para cada una de estas formas, los libros de RV también se pueden permutar



Formas de colocarlos $= P_3 \times P_3 \times P_2$

Formas de colocarlos $= 3! \times 3! \times 2!$

$\therefore$ Formas de colocarlos $= 6 \times 6 \times 6 = 72$

PROBLEMA 13 ¿Cuántos ordenamientos diferentes se pueden obtener con las letras de la palabra COCODRILO, si las vocales deben permanecer juntas?

Resolución: Los diferentes ordenamientos que se pueden obtener son las diferentes formas de permutar a todas las letras.

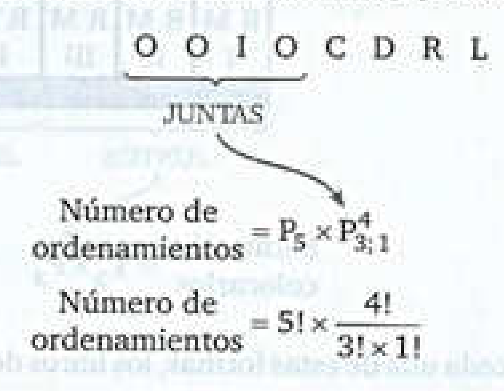
Como las vocales deben permanecer juntas, las consideraremos, par empezar, como 1 sola letra. Por lo tanto empezaremos permutando "5" letras

O O I O C D R L

JUNTAS
(Como 1)

Número de ordenamientos $= P_5$

Pero para cada uno de estos ordenamientos, las vocales juntas pueden permutarse, pero estas permutaciones serán con elementos repetidos.

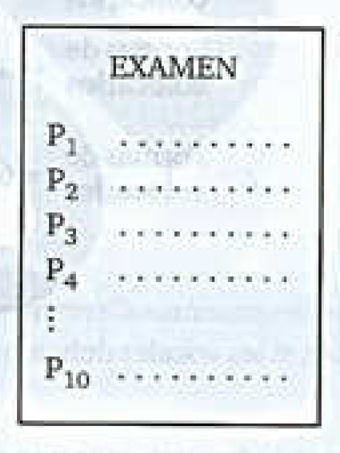


$$\text{Número de ordenamientos} = 5! \times \frac{4!}{3! \times 1!}$$

$$\therefore \text{Número de ordenamientos} = 120 \times 4 = 480$$

PROBLEMA 14 Un estudiante debe contestar 8 de 10 preguntas en un examen. ¿De cuántas maneras diferentes podrá hacerlo, si las 3 primeras son obligatorias?

Resolución:



Si debe contestar 8 preguntas sólo debe elegir cuales 8 va a contestar sin importar el orden. Por lo tanto lo que tenemos que aplicar son combinaciones.

P_1 P_2 P_3 y Otras 5 preguntas

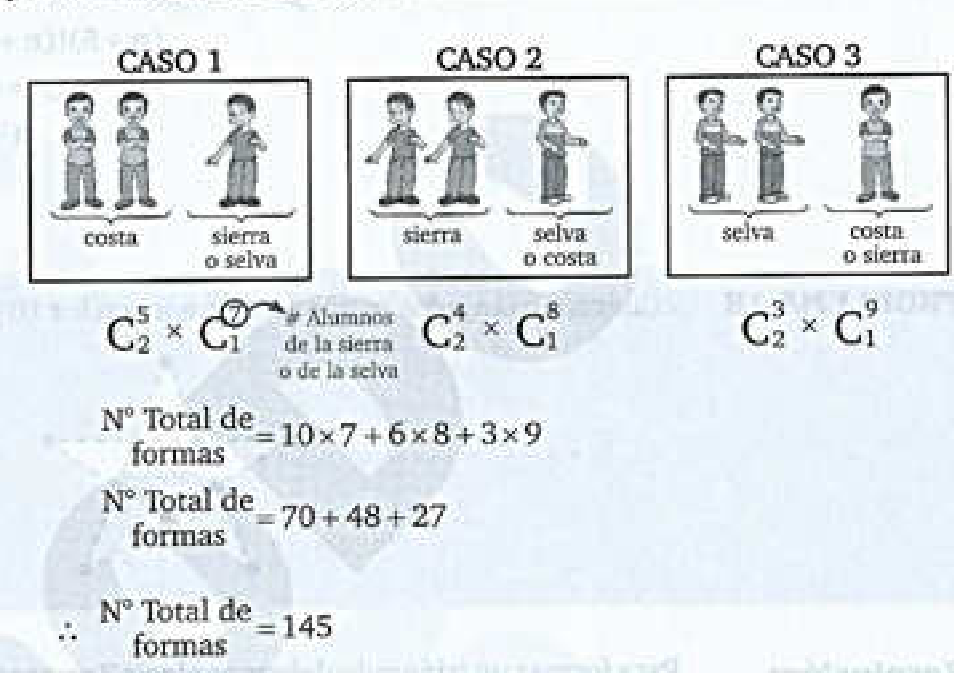
Son obligatorias — Serán elegidas de las otras 7

$$\text{Formas de elegir} = C^7_5 \rightarrow C^7_2$$

$$\therefore \text{Formas de elegir} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

PROBLEMA 15 Para la final del concurso nacional escolar han clasificado 5 estudiantes de la región costa; 4 estudiantes de la región sierra y 3 de la región selva, quienes han sido alojados en habitaciones triples del centro recreacional UNI. ¿De cuántas formas se pueden alojar los estudiantes en una habitación determinada de forma tal que haya 2 estudiantes de una misma región? UNI 2013 - I

Resolución: De acuerdo a las condiciones en cada habitación se deben alojar 2 estudiantes de la misma región y el otro estudiante de región distinta. Veamos los 3 casos:



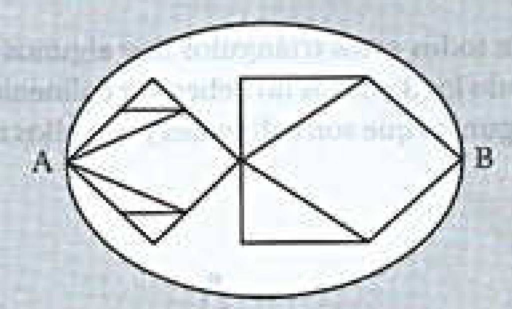
$C_2^5 \times C_1^7$ $\quad$ $C_2^4 \times C_1^8$ $\quad$ $C_2^3 \times C_1^9$

$$\text{N° Total de formas} = 10\times7+6\times8+3\times9$$

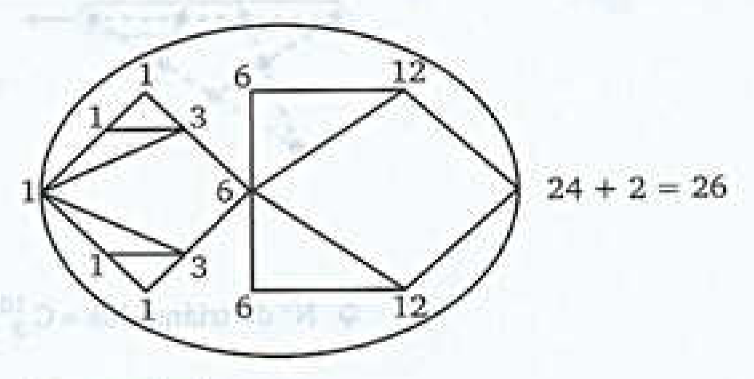
$$\text{N° Total de formas} = 70+48+27$$

$$\therefore \text{N° Total de formas} = 145$$

PROBLEMA 16 ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de A hacia B, sin retroceder?



Resolución:



$$\therefore \text{Formas de ir de A hacia B} = 26$$

PROBLEMA 17 Halle el valor de "n" en:

$$\frac{(n+4)!(n+5)!(n+4)(n+6)}{(n+5)!-(n+4)!}=20!$$

Resolución:

$$\frac{(n+4)!(n+5)!(n+4)(n+6)}{(n+5)(n+4)!-(n+4)!}=20!$$

$$\frac{\cancel{(n+4)!}(n+5)!\cancel{(n+4)}(n+6)}{\cancel{(n+4)!}\cancel{(n+5-1)}}=20!$$

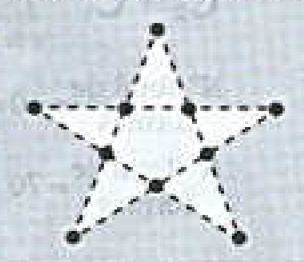
$$(n+5)!(n+6)=20!$$

$$(n+6)!=20!$$

$$n+6=20!$$

$$\therefore \quad n=14!$$

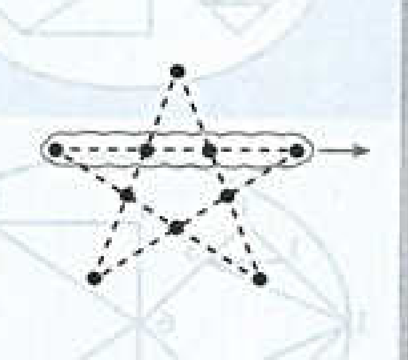
PROBLEMA 18 ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los 10 puntos de la siguiente figura?



Resolución: Para formar un triángulo debemos elegir 3 puntos.

$$\Rightarrow \text{N° de triángulos} = C_3^{10}$$

Pero de todos estos triángulos hay algunos que no existen ya que para formar un triángulo los 3 puntos no deben ser colineales, y como se observa en la figura hay 3 ó más puntos que son colineales y con ellos no se pueden formar triángulos.



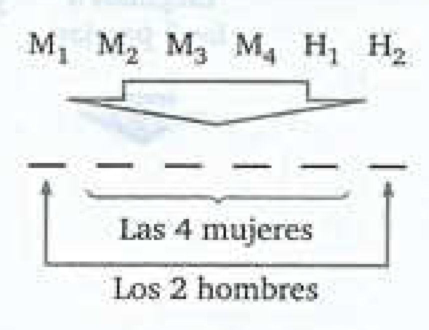
En el cálculo anterior se ha considerado que con estos 4 puntos se han formado C_3^4 triángulos, lo cual no es posible porque los 4 puntos son colineales. Lo mismo ocurre en cada una de las otras 4 líneas que forman la figura. Por lo tanto debemos restarlos del cálculo anterior.

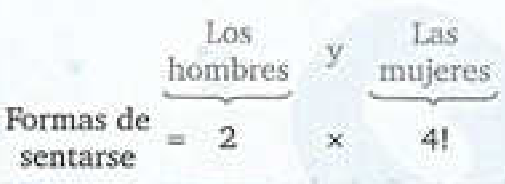
$$\Rightarrow \text{N° de triángulos} = C_3^{10} - 5\times C_3^4$$

$$\therefore \quad \text{N° de triángulos} = \frac{10\times 9\times 8}{6} - 5\times 4 = 100$$

PROBLEMA 19 En una fila de 6 asientos se van a sentar 4 mujeres y 2 hombres. ¿De cuántas maneras diferentes puede ocurrir que los hombres se sienten en los extremos?

Resolución:





Formas de sentarse $= 2 \times 4!$

$\therefore$ Formas de sentarse $= 48$

PROBLEMA 20 Cuatro matrimonios (Lee, Chu, Tang, Wong) se sientan alrededor de una fogata, ¿cuántos ordenamientos distintos se pueden dar si ningún varón se puede sentar junto a su respectiva esposa?

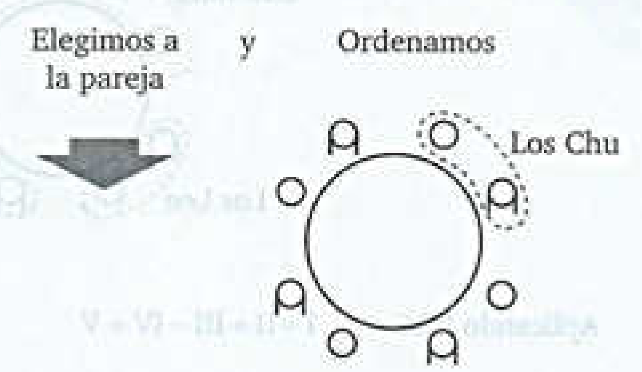
Resolución: Analizando los siguientes casos:

I. Número de maneras de ordenar a las 8 personas sin restricción:

$$Pc(8) = 7!$$

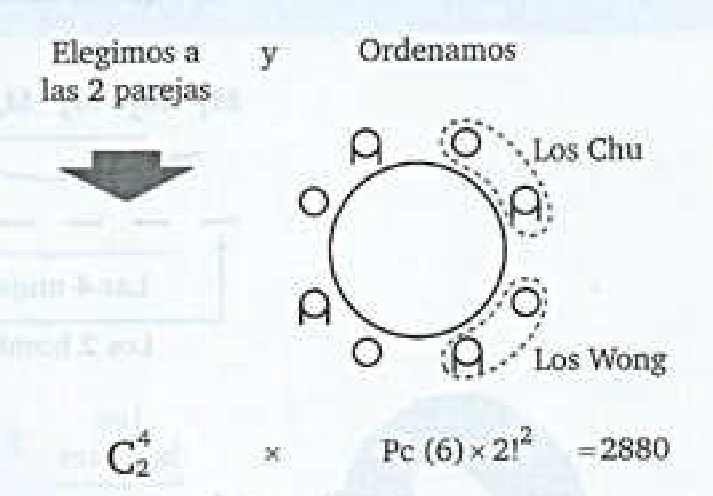
II. Cuando uno de los vecinos se sienta junto a su esposa y NO necesariamente los otros 3:

Elegimos a la pareja y Ordenamos



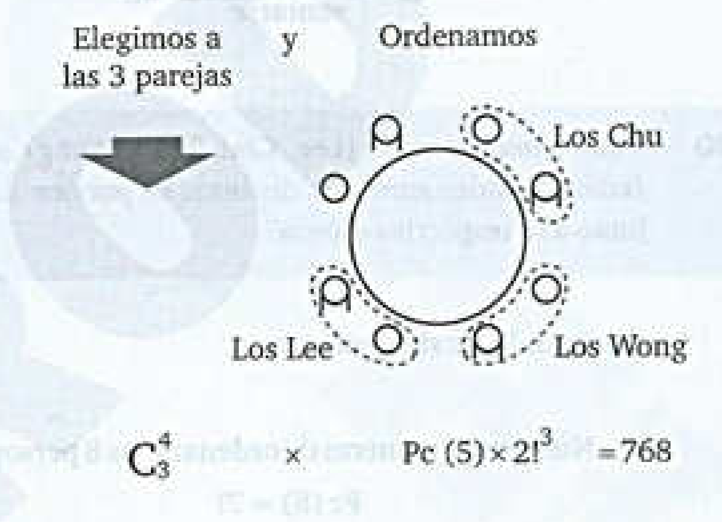
$$C_1^4 \times Pc(7) \times 2! = 5760$$

III. Cuando 2 de los varones se sientan junto a sus respectivas esposas y NO necesariamente los otros 2:



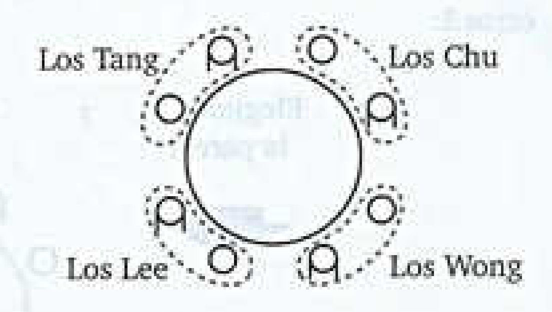
$$C_2^4 \quad \times \quad Pc(6) \times 2!^2 = 2880$$

IV. Cuando 3 de los varones se sientan junto a sus respectivas esposas y NO necesariamente el otro:



$$C_3^4 \quad \times \quad Pc(5) \times 2!^3 = 768$$

V. Cuando 4 varones se sientan junto a sus respectivas esposas:



Aplicando P.I.E : $\quad I - II + III - IV + V$

$$\therefore \ \begin{matrix}\text{\# Total de} \\ \text{maneras}\end{matrix} = 5040 - 5260 + 2880 - 768 + 96 = 1488$$

PROBLEMA 21 Tres jóvenes buscan trabajar como ayudantes en una panadería que tiene 6 locales. ¿De cuántas maneras diferentes pueden trabajar en la panadería, si se sabe que cada uno de ellos debe estar en un local diferente?

Resolución: Lo que nos están pidiendo es calcular el número de formas de ubicar a los 3 jóvenes en los 6 locales, uno por local.

Locales: 3 4 ......

Jóvenes:

$\therefore$ Formas de Ubicarlos : $6 \times 5 \times 4 = 120$

PROBLEMA 22 María tiene cinco amigos y siempre va acompañada por lo menos con uno de sus amigos. ¿Cuántas alternativas de compañía tiene María para ir al colegio?

Resolución: Se entiende que va acompañada de un amigo o 2 amigos o los 3. Luego:

elegir 1 amigo o elegir 2 amigos o elegir 2 amigos o elegir 2 amigos o elegir 2 amigos

$$\text{\# de maneras distintas} = C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5$$

$$\therefore \text{\# de maneras distintas} = 2^5 - 1 = 31$$

NOTA

$$C_1^n + C_2^n + C_3^n + C_4^n + \dots + C_n^n = 2^n - 1$$

NOTAS

N° de maneras distintas de elegir por lo menos 1 elemento de 2n" distintos $= 2^n - 1$

PROBLEMA 23 Rosita irá de viaje a Piura y decide llevar por los menos un libro de poemas y por lo menos 2 de autoayuda. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar la elección si dispone de 4 libros del primero y 5 del segundo?

Resolución:

$$\begin{pmatrix}\text{N° de maneras de}\\ \text{elegir por lo menos}\\ \text{1 libro de poemas}\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}\text{N° de maneras de}\\ \text{elegir por lo menos}\\ \text{2 libros de autoayuda}\end{pmatrix}$$

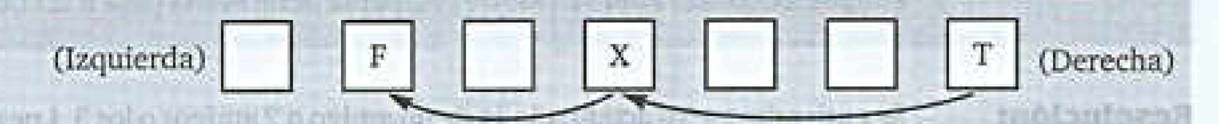
$$(2^4 - 1) \times (2^5 - 1 - C_1^5)$$

(descarta ya que se debe elegir de 2 a más)

$$= 15 \times 26$$

$$= 390$$

PROBLEMA 24 Se tienen 7 casilleros dispuesto linealmente, en cada uno se puede colocar solo 1 libro; si Ronald dispone de 7 libros de cursos distintos (álgebra; geometría; trigonometría; física; química; razonamiento matemático; razonamiento verbal) ¿De cuántas maneras distintas puede ubicarlos con la condición que el de física se ubique a la izquierda del libro de álgebra y este a la izquierda del libro de trigonometría?



Resolución:

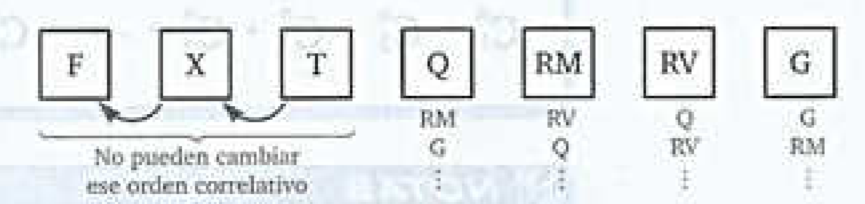
MÉTODO 1

1. Ubiquemos a los libros de físicas; álgebra y trigonometría; para esto debemos elegir los 3 casilleros:

$$\text{N° de maneras distintas de elegir 3 casilleros} = C_3^7 = 35$$

* Tengan en cuenta que los 3 libros solo se pueden ordenar de UNA MANERA en los casilleros elegidos.

2. Los otros 4 libro se ubican en los 4 casilleros restantes y se pueden ordenar de 4! maneras posibles.



$$\text{N° de maneras distintas de ubicarlos} = C_3^7 \times P_{(4)}$$

$$\therefore \text{N° de maneras distintas de ubicarlos} = 35 \times 4! = 840$$

MÉTODO 2

Si ubicáramos a los 3 libros (F; X; T) sin la condición dada en los 3 casilleros elegidos se pueden ordenar de 3! maneras distintas.

F	X	T	→ es el orden requerido
F	T	X	
X	F	T	$\frac{1}{6}$ del número de ordenamientos
X	T	F	
T	X	F	
T	F	X	

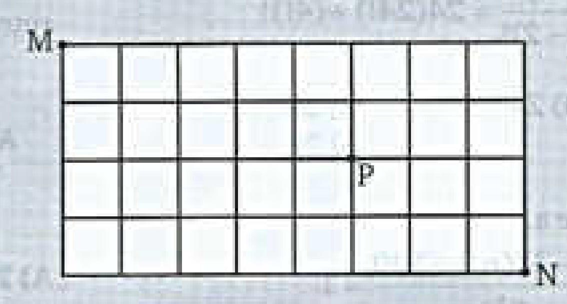
Luego: N° de Ordenamientos posibles $= \frac{1}{6} \times 8! = 840$

(↑ N° de Maneras distintas de ubicar los 8 libros sin restricción)

PROBLEMA 25 En la figura si se recorre los segmentos hacia abajo o hacia la derecha.

A) ¿Cuántas rutas distintas existen de M a N?

B) ¿Cuántas rutas distintas existen de M a N pasando por el punto "P"?



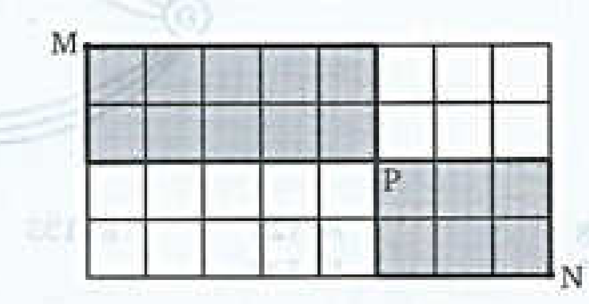
Resolución: A) Para ir de M a N se van a recorrer 8 tramos horizontales y 4 verticales; veamos:

H H H H H H H H — V V V V

H V H H H V H H V H H V

$$\text{N° maneras distintas de ir de M a N} = \frac{12!}{8! \times 4!}$$

B) Se debe trasladar por los tramos correspondientes a las cuadrículas sombreadas:



De M a P y de P a N

$$\frac{7!}{\underset{H}{5!} \times \underset{V}{2!}} \times \frac{5!}{\underset{H}{3!} \times \underset{V}{2!}}$$

$= 21 \times 10$

$= 210$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule el valor de E:

$$E=\frac{((3!)!)!+719!}{721!}+\frac{359}{(3!)!}$$

A) 1/2 B) 1 C) 1/3
D) 1/4 E) 1/5

2. Al efectuar:

$$\frac{(1!+2!)(2!+3!)(3!+4!)\ldots(19!+20!)}{20!\times19!\times18!\times\ldots\times1!}$$

Se obtiene

A) 8,5 B) 10 C) 9,5
D) 10,5 E) 11

3. Calcular n.

$$\frac{(n-3)!(n-1)!}{(n-3)!+(n-2)!}=24(24!)+(4!)!$$

A) 25 B) 24 C) 26
D) 27 E) 28

4. Calcule el valor de a.

$$\frac{(n!)^2-18(n!)-120}{n!}=1$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 2

5. Hallar el valor de n en:

$$\frac{a!+(a+1)!+(a+2)!}{a!}=\frac{a!+(a+1)!}{a}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. ¿De cuántas formas diferentes se puede leer la palabra INGRESO?

```
      I
  I N N N I
      G
    R R R
      E
    S S S
      O
```

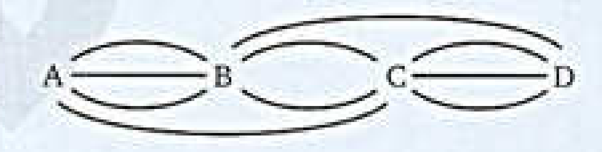
A) 42 B) 36 C) 48
D) 60 E) 45

7. ¿De cuántas formar diferentes se puede leer la palabra RAZONAR?

```
R R R R
 A A A
  Z Z
   O
 N N N
  A A
   R
```

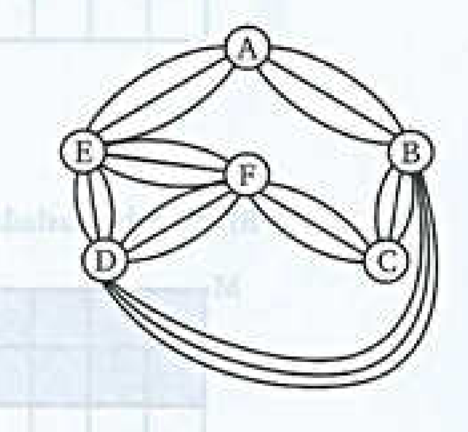
A) 24 B) 32 C) 48
D) 64 E) 36

8. ¿De cuántas maneras diferentes podría viajar una persona de "A" a "D" sin retroceder en cada intento?



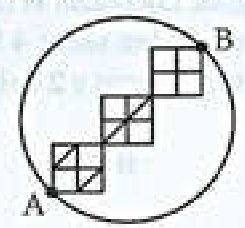
A) 20 B) 18 C) 24
D) 21 E) 23

9. En el gráfico, cada letra representa una ciudad distinta y cada arco, un camino que une dos ciudades. Entonces, ¿de cuántas formas distintas podemos viajar de A a F?, si no se puede pasar dos veces por una misma ciudad.



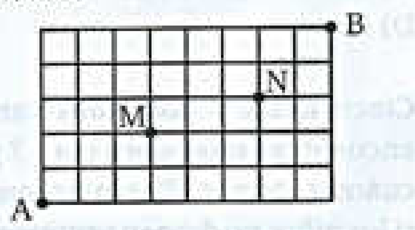
A) 125 B) 135 C) 171
D) 142 E) 414

10. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de "A" hacia "B" sin retroceder?



A) 528 B) 530 C) 288
290 E) 480

11. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de "A" hacia "B", pasado por "M" y por "N" y sin retroceder?



A) 200 B) 245 C) 240
D) 250 E) 210

12. Ana tiene 3 carteras blancas, 2 rojas y 2 azules y 3 pares de zapatos azules, 2 pares de zapatos rojos y 2 pares de zapatos blancos. Siempre que sale lleva zapatos y cartera, pero nunca usa cartera y zapatos del mismo color. ¿De cuántas maneras distintas puede combinar Ana sus carteras y sus zapatos?

A) 27 B) 30 C) 33
D) 36 E) 39

13. Ángel tiene 6 pantalones de colores: blanco, rojo, azul, verde, amarillo y negro, y 6 camisas de colores: blanco, rojo, azul, verde, amarillo y negro. ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse, utilizando dichas prendar, si el pantalón rojo sólo se lo pone con la camisa blanca o la roja y la camisa azul sólo se la pone con el pantalón verde o el negro?

A) 25 B) 27 C) 29
D) 32 E) 36

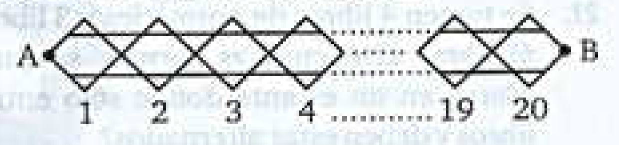
14. Los automóviles Mercedes Benz se fabrican en 4 modelos, 12 colores, 3 tamaños de motor y 2 tipos de transmisión. ¿Cuántos autos distintos se fabrican?

A) 288 B) 248 C) 240
D) 272 E) 144

15. ¿Cuántas comisiones diferentes integradas por un niño y una niña pueden formarse con 5 niños y 8 niñas, si cierto niño rehúsa trabajar con dos de las niñas?

A) 40 B) 42 C) 36
D) 38 E) 32

16. ¿De cuántas formas diferentes se puede ir de "A" hacia "B", sin retroceder?



A) $2(6^{20})$ B) $3(6^{20})$ C) $4(6^{19})$
D) $4(6^{20})$ E) $2(6^{19})$

17. A una persona que sufre de obesidad le recomiendan que para que baje de peso acuda 3 días al gimnasio, 2 días al sauna y 1 día que haga dieta (de lunes a sábado). ¿De cuántas formas diferentes puede elaborar una programación para cumplir con la recomendación?

A) 30 B) 60 C) 120
D) 90 E) 240

18. Ángel ha perdido el número telefónico de Leslie. Sólo recuerda que empezaba en 896 y terminaba en 5. Ángel tiene una noticia importante que comunicarle a Leslie. ¿Cuánto tiempo como máximo tendrá que estar pegado al auricular para poder darle la noticia a Leslie. si en cada llamada emplea 1,44 minutos?

A) 20 h B) 21h C) 22 h
D) 24 h E) 20 h

19. En una fila de 7 asientos se van a sentar 2 mujeres y 5 hombres. ¿De cuántas maneras diferentes puede ocurrir que un hombre se siente entre las 2 mujeres?

A) 420 B) 1440 C) 1200
D) 600 E) 900

20. El matrimonio López con sus 3 hijos y el matrimonio Castro con sus 2 hijos, se ubican alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacerlo si la familia López desea estar junta con los hijos en medio de los padres?

A) 280 B) 144 C) 188
D) 220 E) 216

21. Se tienen 4 libros de aritmética y 3 libros de álgebra. ¿De cuántas formas se pueden ubicar en un estante donde sólo entran 5 libros y deben estar alternados?

A) 216 B) 108 C) 146
D) 220 E) 216

22. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar alineadas 8 monedas de las cuales 5 son de 20 céntimos y 3 de 10 céntimos?

A) 28 B) 48 C) 72
D) 60 E) 56

23. ¿De cuántas formas se podrán ubicar 4 personas en una fila de 6 asientos, dejando los 2 asientos libres siempre juntos?

A) 60 B) 120 C) 240
D) 180 E) 210

24. Julio va al cine con Roxana, Jorge, Erick, Max y Toño. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar en una fila de 6 asientos si Julio quiere estar al lado de Roxana?

A) 80 B) 40 C) 120
D) 240 E) 480

25. En una urna se colocan 6 bolas blancas y 5 bolas negras. Encontrar el número de maneras en que se pueden sacar 4 bolas de la urna si 2 deben ser blancas y 2 deben ser negras.

A) 120 B) 150 C) 160
D) 130 E) 140

26. Una moneda cuyas caras están marcadas con los números 2 y 3 es lanzada 5 veces. Determine de cuántas maneras diferentes se obtendrá una suma de 12.

A) 10 B) 15 C) 30
D) 60 E) 120

27. Cinco niñas y dos niños van al parque y encuentran una banca para 7 personas. ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse, si los niños no desean sentarse juntos?

A) 1200 B) 3100 C) 3600
D) 1600 E) 6300

28. Un club tiene 24 miembros de los cuales 10 son hombres. ¿Cuántas juntas directivas de 3 miembros: presidente, secretario y tesorero; pueden formarse si el presidente debe ser un hombre y el secretario una mujer?

A) 3160 B) 2980 C) 3080
D) 3000 E) 3120

29. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse correctamente 2n personas alrededor de una mesa circular de modo que n de ellas siempre queden juntas?

A) $(2n-1)!$ B) $(n-1)!$ C) $2n \times n!$
D) $(2n)!$ E) $(n!)^2$

30. Se extraen 2 cartas de una baraja francesa, ¿de cuántas maneras diferentes se puede realizar esto?

A) 1316 B) 1306 C) 1326
D) 1226 E) 1216

31. En una juguería se tienen las siguientes frutas disponibles: naranja, plátano, papaya, mango y fresa. Un grupo de amigos solicitan todos los tipos de jugos que se pueden obtener con las frutas mencionadas. ¿Cuántos amigos son como máximo, si a cada uno le tocó un jugo diferente?

A) 32 B) 33 C) 25
D) 36 E) 31

32. Una niña tiene 5 juguetes distintos y 3 cajas de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes podrá guardar sus juguetes, si cada caja tiene capacidad para los 5 juguetes?

A) 125 B) 243 C) 60
D) 120 E) 81

33. En una tienda hay 6 camisas y 5 pantalones que me gustan. ¿Cuántas opciones diferentes tengo si deseo comprar 3 camisas y 2 pantalones?

A) 240 B) 120 C) 180
D) 200 E) 360

34. En una pizzería se anuncia que es posible poner uno o más de los 5 aderezos que ofrecen para la pizza. ¿De cuántas maneras diferentes se puede pedir una pizza?

A) 31 B) 24 C) 32
D) 15 E) 16

35. Siete niñas desean jugar a la ronda. ¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse para jugar, si 3 de ellas desean estar juntas?

A) 120 B) 144 C) 72
D) 216 E) 240

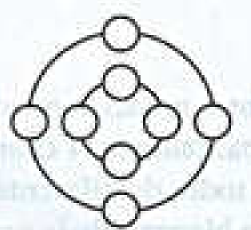
36. Alrededor de una mesa circular de 6 asientos se ubican 2 niñas y 3 niños. ¿De cuántas formas podrán hacerlo, si el asiento vacío debe quedar entre las niñas?

A) 24 B) 12 C) 6
D) 36 E) 120

37. En un grupo de 11 personas hay 2 que nunca se separan. Si se desea elegir un comité integrado por 5 personas, ¿de cuántas formas diferentes se podrá hacer dicha elección?

A) 200 B) 210 C) 240
D) 360 E) 180

38. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar los números del 1 al 8 en la siguiente rueda giratoria?



A) 2400 B) 2880 C) 5040
D) 2520 E) 5760

39. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar 5 parejas de esposos, alrededor de una fogata, tal que cada pareja no se separe?

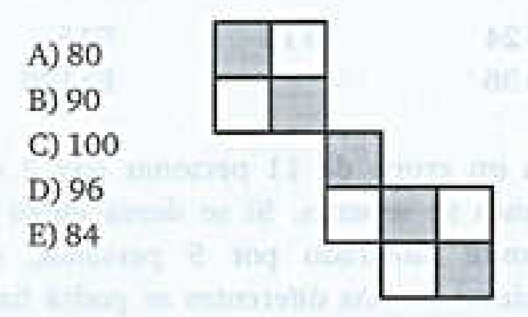
A) 744 B) 720 C) 724
D) 756 E) 768

40. El número de permutaciones de X elementos diferentes tomados de 4 en 4 es al número de permutaciones de los mismos elementos tomados de 5 en 5 como 1 es a 8. Halle X.

A) 10 B) 12 C) 24
D) 36 E) 8

41. En la siguiente figura se debe ir desde el punto A, hasta B, siguiendo solo los sentidos indicados por las flechas. ¿Cuántos caminos hay desde A hasta B?

A) 80
B) 90
C) 100
D) 96
E) 84



42. De un grupo de 6 números positivos diferentes y 4 números negativos diferentes se escogen 4 números al azar y se multiplican. ¿De cuántas maneras el producto resultará positivo?

A) 45 B) 170 C) 330
D) 480 E) 106

43. ¿De cuántas maneras puede vestirse Lalo si tiene 6 pantalones, 4 camisas y 5 pares de zapatos, todos de diferente color entre sí. Si la camisa blanca solo la usa con el pantalón azul?

A) 90 B) 80 C) 95
D) 75 E) 65

44. De 7 hombres y 5 mujeres se van a formar grupos mixtos de 6 personas. ¿De cuántas maneras se podrá formar estos?

A) 924 B) 919 C) 917
D) 929 E) 35

45. Juan, su novia, suegra, suegro y sus 3 cuñaditos acuden al cine. ¿De cuántas maneras distintas pueden ubicarse en 7 asientos en fila, si los cuñaditos se sientan en medio de los novios?

A) 36 B) 72 C) 90
D) 48 E) 144

46. Calcular el número de ordenamientos que se pueden obtener con todas las letras de la palabra **HONOLULU**, si las vocales deben permanecer juntas.

A) 120 B) 240 C) 360
D) 480 E) 600

47. Calcule el número de ordenamientos diferentes que se pueden obtener con todas la letras de la palabra **ENEVERRE**, si no pueden haber dos letras E juntas.

A) 60 B) 120 C) 72
D) 144 E) 90

48. Para transmitir señales desde una isla a la costa, se dispone de 6 luces blancas y 6 rojas, colocadas en los vértices de un hexágono, 2 en cada vértice (una roja y una blanca). Hallar el número de señales distintas que se pueden realizar, si en cada vértice sólo se enciende una luz y para una señal se encienden 3 luces.

A) 120 B) 132 C) 144
D) 160 E) 196

49. A partir de una baraja de 52 catas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar un full (3 cartas de un mismo valor y otras 2 también de un mismo valor)?

A) 3600 B) 3660 C) 3720
D) 3244 E) 3744

50. Si se revuelven las 11 letras de la palabra "M I S S I S S I P P I" y se dispone en un orden arbitrario. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden obtener? si:

a) Las 4 letras I estan juntas.
b) Las 4letras I esten juntas y además que la ordenación empieza por M y termina en S.

A) 840 – 60 B) 842 – 72 C) 720 – 56
D) 960 – 60 E) 840 – 72

Introducción a la Teoría de las Probabilidades

CAPACIDADES

- Aplicar la teoría combinatoria.
- Familiarizar con el lector sobre el análisis de situaciones especulativas.
- Formar las bases para un mejor entendimiento del cálculo de probabilidades.
- Relacionar los conceptos en situaciones reales.

¿Qué tan probable es que te inviten a 2 fiestas de cumpleaños en 1 día?

Más de lo que supones, si conoces al menos 30 personas que hagan fiestas de cumpleaños, como tu grupo de la escuela. en cualquier grupo de 30 personas hay una probabilidad mayor de 2 a 1 de que dos personas cumplan años el mismo día.

Los matemáticos que estudian la teoría de la probabilidad (y que les gustan las fiestas de cumpleaños) han demostrado que eso es cierto.

Inténtalo por tu cuenta. Haz una encuesta. Pregúntale a la gente cuándo cumple años y deténte cuando encuentres dos que los cumplan el mismo día. algunas veces sucede de inmediato. Otras veces lleva mucho tiempo.

Sin embargo, si aplicas la encuesta un buen número de veces, el número de persoonas a las que tuviste que preguntarles estará muy cerca de 30. Si te hartas de preguntarle a la gente cuándo es su cumpleaños, antes de que obtengas un promedio de 30, tendrás que creernos.

¿Hay más cumpleaños en algunos meses que en otros? ¿La probabilidad de que 2 personas cumplan años el mismo día es mayor en junio que en diciembre?

INTRODUCCIÓN

Siempre estuvo el hombre fascinado con el juego desde tiempos muy remotos, quedando estupefacto por los resultados que le daba "el azar" que no es mas que "una marca de la ignorancia" pero poco a poco conforme el hombre avanzaba en muchos aspectos de la matemática daba una ligera mirada a los comportamientos de incertidumbre... tratando de penetrar en dicho mundo: pero mas o menos por el siglo XVI cuando ya se urdía las ideas de la probabilidad cuando Gorolamo Cardano, matemático y médico muy aficionado a los juegos escribe: "liber de ludo aleae" (el libro de los juegos de azar) también en este siglo cabe mencionar a Galileo quien había enumerado las suertes respectivas de jugadores tratando de observar algún comportamiento matemático y poder analizarlo en diferentes ángulos.

Pero los grandes descubrimientos se dan de acuerdo a una chispa creadora que surge muchas veces de manera casual al igual que el eureka de Arquímedes y la manzana de Newton.

El caballero de Meré (francés) en una de sus muchas diversiones, pues era un jugador empedernido de la alta sociedad había tenido interrogantes relativo a los resultados de sus apuestas y cursaba misivas a su amigo de entonces "Blas Pascal" el cual le contaba a Pierre Fermat las interesantes preguntas que Meré le mandaba inclusive decía Pascal a Fermat: "... es muy inteligente, pero no es matemático y como sabeís, es éste un defecto muy grande"

Aquí damos a conocer 2 de las preguntas que llegó hacer Meré a Pascal, la cual podríamos decir con seguridad que en ellas se encuentra la partida de nacimiento de las probabilidades que hoy en día son muy importantes para explicar situaciones de riesgo, y tomar decisiones.

- ¿Cuántas veces será preciso tirar un dado para que se puede apostar con ventaja que, después de éstas tiradas se obtendrá doble seis?

- Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido ¿Cómo deberán según el progreso de las partidas, repartir on equidad el premio estipulado?

Éste descubrimiento tuvo para mala suerte la coincidencia de darse grandes descubrimientos por aquella misma fecha. La geometría analítica, la gravitación universal que polarizó la atención del mundo intelectual, y opacó la real dimensión que en los tiempos modernos si los tienes mas adelante sistematizaron y profundizaron la teoría de las probabilidades los matemáticos: Leibnitz, E. Halley; Jacques y Nicolas Bernouilli y Pierr Simón de Laplace.

A continuación daremos a conocer algunas terminologías que se presentan en el estudio de las probabilidades.

EXPERIMENTO ALEATORIO

Sacar aleatoriamente (al azar) fichas y ver el resultado:

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Viene a ser el conjunto de todos los sucesos elementales, es decir, es el conjunto de todos los resultados posibles que tiene el experimento aleatorio.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} ①② ; ①③ ; ①④ ; ①⑤ ; ①⑥ ; ①⑦ \\ ②③ ; ②④ ; ②⑤ ; ②⑥ ; ②⑦ \\ ③④ ; ③⑤ ; ③⑥ ; ③⑦ \\ ④⑤ ; ④⑥ ; ④⑦ \\ ⑤⑥ ; ⑤⑦ \\ ⑥⑦ \end{matrix} \right\} = C_2^7 = 21$$

EVENTO O SUCESO (A)

Viene a ser cualquier subconjunto del espacio muestral, en otras palabras, viene a ser un caso particular que se solicita del experimento aleatorio.

$$A = \left\{ ②④ \quad ②⑥ \quad ④⑥ \right\} = C_2^3 = 3$$

Ejemplo: **Experimento aleatorio:**

Lanzar 2 dados uno negro y uno blanco y ver el resultado

Espacio muestral (Ω):

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1\ 1)\ (1\ 2)\ (1\ 3)\ (1\ 4)\ (1\ 5)\ (1\ 6) \\ (2\ 1)\ (2\ 2)\ (2\ 3)\ (2\ 4)\ (2\ 5)\ (2\ 6) \\ (3\ 1)\ (3\ 2)\ (3\ 3)\ (3\ 4)\ (3\ 5)\ (3\ 6) \\ \vdots \\ (6\ 1)\ (6\ 2)\ (6\ 3)\ (6\ 4)\ (6\ 5)\ (6\ 6) \end{matrix} \right\} = 6 \times 6 = 36$$

Evento o suceso (A):

$$A = \left\{ (4\ 6)\ (5\ 5)\ (6\ 4) \right\} = 3$$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Se define como un número que mide el grado de incertidumbre de un cierto suceso.

Ésta se calcula como el cociente entre el valor numérico del evento y el valor numérico del espacio muestral:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Evento} \\ \rightarrow \text{Espacio muestral} \end{array}$$

También se le denomina al evento como casos favorables y al espacio muestral como casos totales.

CONSIDERACIONES

- El valor de la probabilidad esta entre 0 y 1 inclusive:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- $P(A) = 0$ "Evento imposible"
- $P(A) = 1$ "Evento seguro"
- $P(A) = 1/2$ "Evento dudoso"
- El valor de la probabilidad puede estar expresado en fracción, decimal o porcentaje.

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

RESUMEN RETROSPECTIVO

EXPERIMENTO ALEATORIO	CARACTERÍSTICA	ESPACIO MUESTRAL	EVENTO O SUCESO	PROBABILIDAD
D A C B Gire el indicador	El indicador tiene la misma probabilidad de detenerse en cualquiera de las cuatro regiones A, B, C, ó D.	$\Omega = \{A, B, C, D\} = 4$ El conjunto de los cuatro resultados igualmente posibles.	Que el indicador pare en el sector superior. $M = \{D, A\} = 2$	$P(M) = \frac{2}{4}$
Lance un dado	Es igualmente posible que cualquiera de las seis caras quede hacia arriba.	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} = 6$ El conjunto de los seis resultados igualmente posibles.	Que el resultado sea un número primo 3o. $M = \{3\} = 1$	$P(M) = \frac{1}{6}$
A B Lance dos monedas, A y B	A B C C → C S → S C → S S → Cada uno de los cuatro pares es igualmente posible.	$\Omega = \left\{\begin{array}{l}(C, C)\\(C, S)\\(S, C)\\(S, S)\end{array}\right\} = 4$ El conjunto de los cuatro resultados igualmente posibles.	Que las dos monedas salgan sello. $M = \{S\ S\} = 1$	$P(M) = \frac{1}{4}$

PROPIEDADES

- Propiedad de 2 eventos complementarios:

  Siendo A: Evento que ocurra A

  A': Evento que no ocurra A

$$P(A) + P(A') = 1$$

- Como los sucesos son subconjuntos de un conjunto mayor que es el espacio muestral, se pueden aplicar algunas propiedades de conjuntos:
  - $A \cup A' = \Omega$
  - $A \cap A' = \phi$
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$P(\underset{\substack{\downarrow \\ o}}{A \cup B}) = P(A) + P(B) - P(\underset{\substack{\downarrow \\ y}}{A \cap B})$$

- Si 2 eventos A y B son independientes, es decir la ocurrencia de uno no altera la ocurrencia del otro:

$$P(\underset{\substack{\downarrow \\ y}}{A \cap B}) = P(A) \times P(B)$$

- Si 2 eventos A y B son mutuamente excluyentes es decir ambos no pueden ocurrir simultáneamente $A \cap B = \phi$

$$P(\underset{\substack{\downarrow \\ o}}{A \cup B}) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo: La probabilidad de aprobar física es 3/5, la probabilidad de aprobar biología es 1/10. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar ambos cursos?

Resolución: Los 2 eventos son independientes, pues el aprobar uno no implica nada con el otro curso.

$$\left.\begin{array}{l} P(F) = \dfrac{3}{5} \\ P(B) = \dfrac{1}{10} \end{array}\right\} P(\underset{\substack{\downarrow \\ y}}{F \cap B}) = P(F) \times P(B)$$

$$P(F \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{10}$$

$$\therefore\ P(F \cap B) = \frac{3}{50}$$

Ejemplo: Al lanzar un dado cuál es la probabilidad de obtener un valor menor que 3 o mayor que 5.

Resolución: Es imposible que al lanzar un dado se obtenga menor que 3 y a la vez mayor que 5 entonces son mutuamente excluyentes a uno o lo otro pero no los 2 (se excluyen entre sí)

A: Menor que 3 $\rightarrow P(A) = \frac{2}{6}$

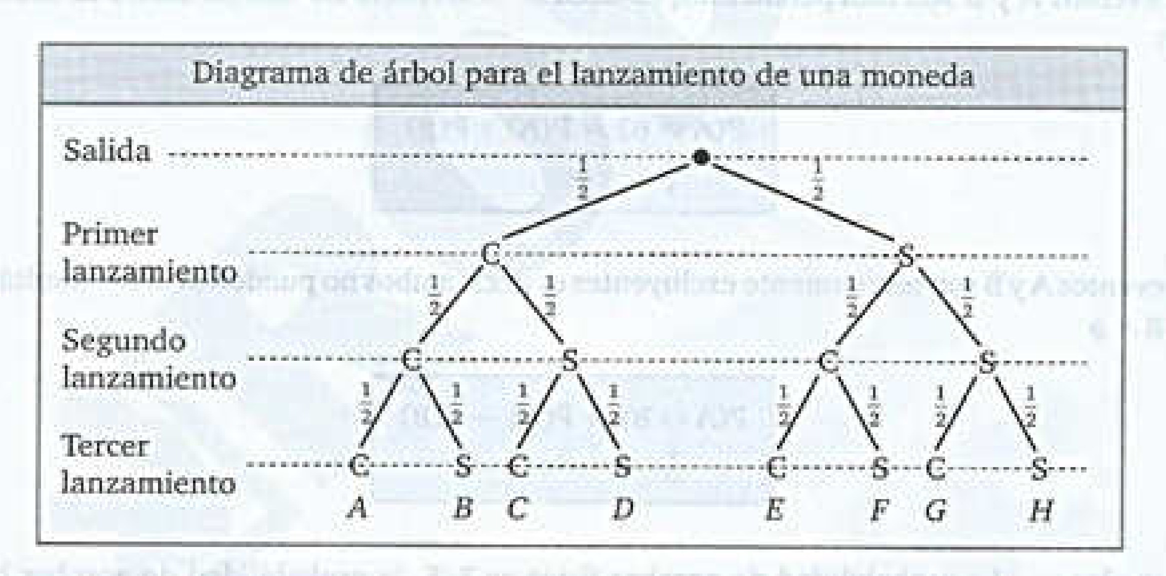
B: Mayor o igual que 5 $\rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

DIAGRAMA DEL ÁRBOL

Los diagramas de árbol son útiles para contar resultados y calcular probabilidades de ciertos sucesos. Estudie el siguiente diagrama de árbol.



Cada rama de árbol está marcada con " $\frac{1}{2}$ " debido a que la probabilidad que resulte cara o sello es $\frac{1}{2}$. Observe que para llegar al punto A en el árbol, se debe obtener cara en cada uno de los tres primeros lanzamientos. El resultado A puede representarse mediante el símbolo CCC. El resultado B se denota por el símbolo CCS. El diagrama del árbol indica que hay 8 resultados para 3 lanzamientos de una moneda. Puesto que todos los resultados son igualmente posibles, P(A) = P(CC) = $\frac{1}{8}$ y P(B) = P(CCS) = $\frac{1}{8}$. Observe que la probabilidad de cada suceso puede encontrarse multiplicando a lo largo de cada rama del árbol. Así:

$$P(B) = P(CCS) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Analicemos un ejemplo: En una encuesta a 112 personas sobre el color de los ojos, se obtiene la siguiente tabla de resultados:

	Ojos azules (A)	Ojos Negros (N)	
Varones (V)	20	30	50
Mujeres (M)	22	40	62
	42	70	112

V, M, A y N representan, respectivamente, los sucesos que se verifican cuando al elegir una persona, ésta resulta ser varón o mujer, tener ojos azules o tener ojos negros. Si la elección se hace sin condiciones, la probabilidad de elegir una persona con los ojos azules, es: $P(A)=\frac{42}{112}=\frac{3}{8}$

La de elegir una persona con los ojos negros será: $P(N)=\frac{70}{112}=\frac{5}{8}$

Sin embargo, si la elección la hacemos sólo entre los varones, las probabilidades de ojos azules y ojos negros son, respectivamente:

$$P(A)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5} \qquad P(N)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

Para que quede claro que son probabilidades calculadas sobre el conjunto de los varones, se escribe P(A/V), que se lee: "probabilidad de A condicionada a V" o bien "probabilidad de A supuesto que es V". Las probabilidades de A y N condicionadas a V son, pues:

$$P(A/V)=\frac{2}{5} \qquad P(N/V)=\frac{3}{6}$$

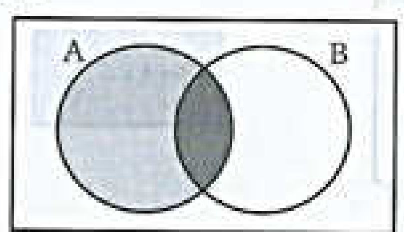
Según acabamos de ver, $P(A/V)=\frac{2}{5}$ y además, del cuadro inicial deducimos que:

$$P(V)=\frac{50}{112}=\frac{25}{56} \quad \text{y} \quad P(A\cap V)=\frac{20}{112}=\frac{5}{28}$$

La relación existente entre estas tres probabilidades es: $\frac{5}{28}=\frac{25}{56}\times\frac{2}{5}$ y de aquí deducimos que:

$$P(A\cap V)=P(V).P(A/V)\rightarrow P(A/V)=\frac{P(A\cap V)}{P(V)}$$

Por esta razón, adoptamos como definición la siguiente expresión: Sea A un suceso cuya probabilidad es distinta de cero, y sea B cualquier suceso. Se llama probabilidad de B condicionado a A o dado que ocurrió A.



$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo: Un fabricante de repuestos para avión sabe, por experiencia pasada, que la probabilidad de que un pedido este listo para ser distribuido es 0,80 mientras que la probabilidad de que esté listo y se entregue a tiempo es 0,72. ¿Cuál es la probabilidad de que este pedido se entregará a tiempo dado que estuvo listo para su envío?

Resolución: R : Suceso en el cual un pedido está listo para su distribución.
D : Suceso en el cual el pedido se entregará a tiempo.

$$P(R) = 0{,}80 \quad y \quad P(R \cap D) = 0{,}72$$

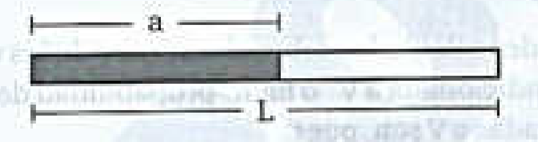
$$P(D/R) = \sigma\, \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{0{,}72}{0{,}80} = 0{,}90$$

PROBABILIDAD GEOMÉTRICA

Cuando consideramos la probabilidad sobre situaciones gráficas.

EN UN SEGMENTO

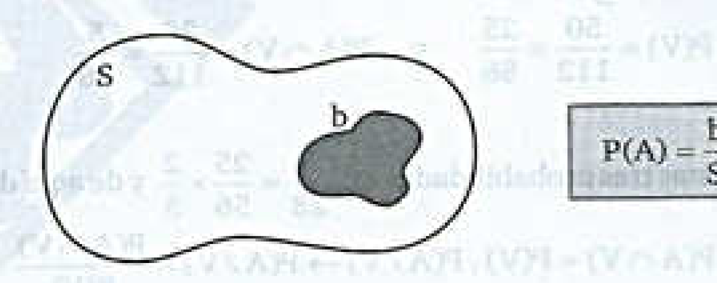
Se toma un punto al azar del segmento mostrado ¿cuál es la probabilidad que dicho punto pertenezca a la zona sombreada?



$$P(A) = \frac{a}{L}$$

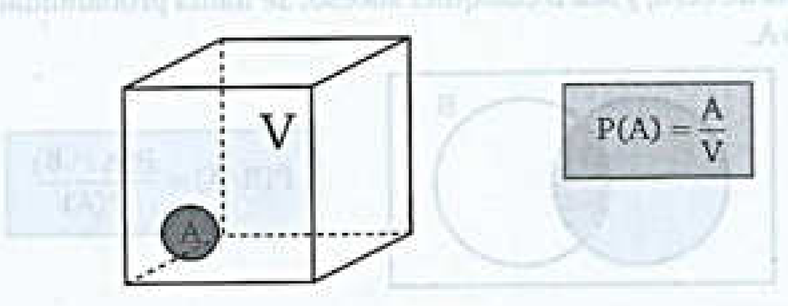
EN UNA REGIÓN

Se toma un punto al azar de la región S ¿cuál es la probabilidad que caiga en la zona A?



$$P(A) = \frac{b}{S}$$

EN VOLÚMENES



$$P(A) = \frac{A}{V}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga 4?

Rpta.: ....

2. Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que dos?

Rpta.: ....

3. Se lanza dos dados perfectos, ¿cuál es la probabilidad que los números en las caras superiores sumen cinco?

Rpta.: ....

4. Si se lanzan dos monedas, ¿cuál es la probabilidad que salgan dos caras?

Rpta.: ....

5. Si se lanzan dos monedas, ¿cuál es la probabilidad que salga una cara y un sello?

Rpta.: ....

6. En una urna se tienen 6 bolas rojas y 9 bolas blancas. Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea roja?

Rpta.: ....

7. En una reunión hay 20 hombres y 15 mujeres. Si se escoge una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea mujer?

Rpta.: ....

8. De una baraja de 52 cartas se extrae una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un "as"?

Rpta.: ....

9. De una baraja de 52 cartas se extrae una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una espada?

Rpta.: ....

10. Se lanzan tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras?

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Un estudiante responde al azar a dos preguntas de verdadero o falso. Escriba el espacio muestral de este experimento aleatorio.

Resolución: Es espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales. Los sucesos elementales son cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio, indescomponibles en otros más simples. Como el experimento consiste en responder al azar a dos preguntas, cada uno de los posibles patrones de respuesta constituirá un suceso elemental. Un patrón de respuesta sería contestar verdadero a la primera pregunta y verdadero a la segunda, lo representamos (V, V). Con esta representación podemos escribir el espacio muestral como:

$$E = \{(V, V)\ (V, F)\ (F, V)\ (F, F)\}$$

PROBLEMA 2 Otro estudiante responde al azar a 4 preguntas del mismo tipo anterior.

a) Escriba el espacio muestral.
b) Escriba el suceso responder "falso" a una sola pregunta. (Q)
c) Escriba el suceso responde "verdadero" al menos a 3 preguntas. (R)
d) Escriba la unión de estos dos sucesos, la intersección y la diferencia del suceso R y el suceso Q.

Resolución:

a) Con la misma convención del problema anterior, los sucesos elementales serían:

(V, V, V, V) (V, V, V, F) (V, V, F, V) (V, F, V, V)
(F, V, V, V) (V, V, F, F) (V, F, V, F) (V, F, F, V)
(F, V, V, F) (F, V, F, V) (F, F, V, V) (V, F, F, F)
(F, V, F, F) (F, F, V, F) (F, F, F, V) (F, F, F, F)

b) El suceso responder falso a una sola pregunta será el subconjunto del espacio muestral formado por todos los sucesos elementales en que solo hay una respuesta falso, lo llamaremos Q y será:

$$Q = \{(V, V, V, F) \cup (V, V, F, V) \cup (V, F, V, V) \cup (F, V, V, V)\}$$

c) El suceso responder verdadero al menos a 3 preguntas, lo llamaremos R y será:

$$R = \{(V, V, V, F) \cup (V, V, F, V) \cup (V, F, V, V) \cup (F, V, V, V) \cup (V, V, V, V)\}$$

d) Observando los sucesos elementales que los componen se deducen inmediatamente los siguientes resultados:

$$Q \cup R = R\ ;\quad Q \cap R = Q\ ;\quad R - Q = \{(V, V, V, V)\}$$

PROBLEMA 3 De una urna con 8 fichas rojas y 2 azules se toma 2 fichas al azar ¿cuál es la probabilidad que las 2 sean azules?

Resolución:

Casos totales: $C_2^{10} = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$

Casos favorables: $C_2^2 = 1$

No olvidemos que se toman 2 fichas (un grupo) por ello la combinación.

$$\therefore \quad \boxed{P(A) = \frac{1}{45}}$$

PROBLEMA 4 Se lanzan 5 monedas ¿cuál es la probabilidad que se obtenga 3 caras y 2 sellos?

Resolución:

Casos totales: Por principio de multiplicación

1° 2° 3° 4° 5°

O , O , O , O , O

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^5 = 32$

Casos favorables: Por permutación con repetición:

1°	2°	3°	4°	5°
C	C	C	S	S
C	C	S	S	C
C	S	S	C	C
		⋮		

$P^5_{(3;2)} = \frac{5!}{3!\times 2!} = 10$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

PROBLEMA 5 En un concurso participan 7 mujeres y 8 hombres. Si deben haber 2 ganadores. ¿Cuál es la probabilidad de que los ganadores sean una pareja mixta?

Resolución:

Casos totales: $C_2^{15} = \frac{15\times 14}{2} = 105$

Casos favorables: $7 \times 8 = 56$
H y M

$$\therefore \quad P(A) = \frac{56}{105}$$

PROBLEMA 6 Suponga que se ha cargado un dado de modo que la probabilidad que ocurra un número determinado es proporcional al mismo. Calcular la probabilidad que se obtenga un número mayor que 4.

Resolución:

1	2	3	4	5	6
↓	↓	↓	↓	↓	↓
p	2p	3p	4p	5p	6p

Se sabe que de todas maneras saldrá uno de los números.

Probabilidad = 1

$$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$$

$$21p = 1$$

$$p = \frac{1}{21}$$

$$\therefore \quad 5p + 6p = 11p = 11\left(\frac{1}{21}\right) = \frac{11}{21}$$

PROBLEMA 7 Se escribe al azar un número de 2 cifras. ¿Cuál es la probabilidad que se haya escrito un número de la sucesión de Fibonacci?

Resolución: Casos totales: 90

$\overline{a\ b}$

↓ ↓

$9 \times 10 = 90$ #s

Casos favorables: 5

Número de 2 cifras y que pertenezca a la sucesión de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, [13, 21, 34, 55, 89], 44, ...

→ 5

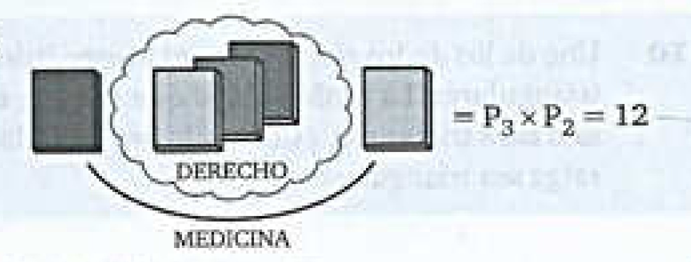
$$\therefore \quad P(A) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

PROBLEMA 8 Se tiene 3 libros de Derecho y 2 de Medicina, se ordena al azar todos ellos en un estante ¿cuál es la probabilidad que los de Medicina estén separados por los de Derecho?

Resolución: Al ordenar en fila habrá orden, por lo tanto es una permutación.

Casos totales: $P_5 = 5! = 120$

Casos favorables:



$= P_3 \times P_2 = 12$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

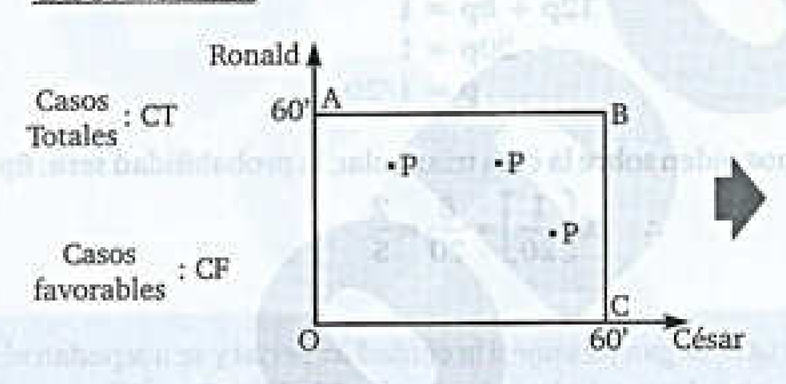
PROBLEMA 9 Ronald y César quedaron en reunirse entre las 3 y 4 de la tarde con la condición que el primero en llegar al punto de encuentro espere al otro máximo 10 minutos. ¿cuál es la probabilidad que la reunión se concrete?

Resolución:

CASOS TOTALES

Casos Totales : CT

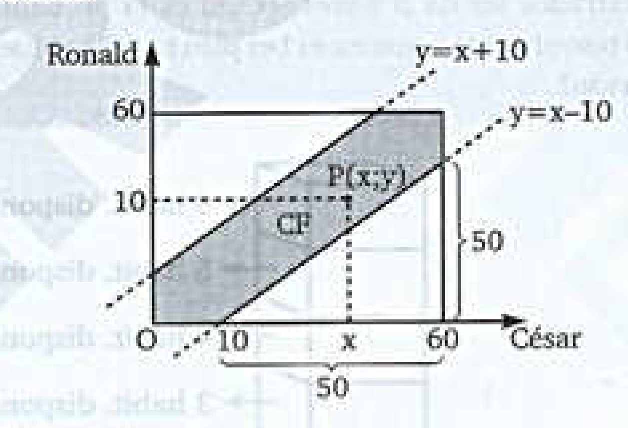
Casos favorables : CF



El encuentro puede producirse en cualquier punto "P" que pertenece a la región OABC

CT = 60 × 60

CASOS TOTALES



Para que la reunión se concrete:

$|x - y| \leq 10$ ... (el primero en llegar espera un máximo de 10 min)

$-10 \leq x - y \leq 10$

$\boxed{y \leq x + 10} \wedge \boxed{y \geq x - 10}$

$$CF = 60 \times 60 - \cancel{2}\left(\frac{50 \times 50}{\cancel{2}}\right) = 60 \times 60 - 50 \times 50$$

La probabilidad pedida será:

$$\frac{60 \times 60 - 50 \times 50}{60 \times 60} = \frac{11}{36}$$

PROBLEMA 10 Uno de los dados romanos en el Museo Británico tiene 6 caras cuadradas y 8 caras triangulares. La probabilidad que salga la cara cuadrada es el doble de que salga una cara triangular. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado, la cara que salga sea triangular?

Resolución:

□ → Probabilidad: 2p
△ → Probabilidad: p

Se está seguro que al lanzar el dado saldrá una cara. Por tanto probabilidad de que ocurra uno de los eventos es 1.

o o o o o o o o o o o o o
□ □ □ □ □ □ △ △ △ △ △ △ △ △
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

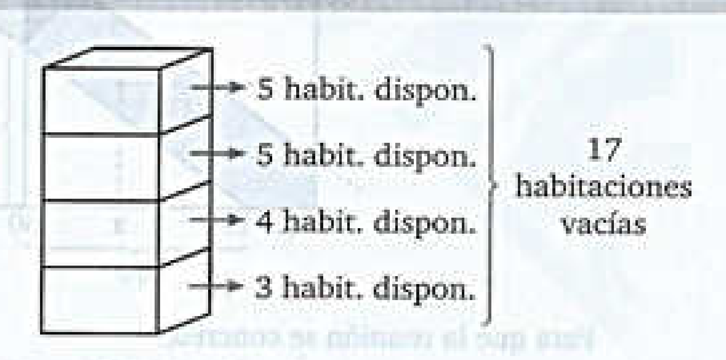
$$2p+2p+2p+2p+2p+2p+p+p+p+p+p+p+p+p=1$$
$$12p+8p=1$$
$$20p=1$$
$$p=1/20$$

Como nos piden sobre la cara triangular, la probabilidad será: 8p

$$\therefore \quad 8\left[\frac{1}{20}\right]=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

PROBLEMA 11 Tres turistas llegan de viaje a la ciudad imperial y se hospedan al azar en uno de los hoteles, a cual tiene 4 pisos y cada piso 5 habitaciones. Escogen 3 habitaciones y el administrador les da 3 llaves. ¿Cuál es la probabilidad que los 3 queden en el mismo piso si se sabe que en el 1er piso hay 2 habitaciones ocupadas en el 2do una habitación?

Resolución:



Casos totales: 680

$$C_3^{17}=\frac{17.16.15}{3.2.1}=17\times 40$$

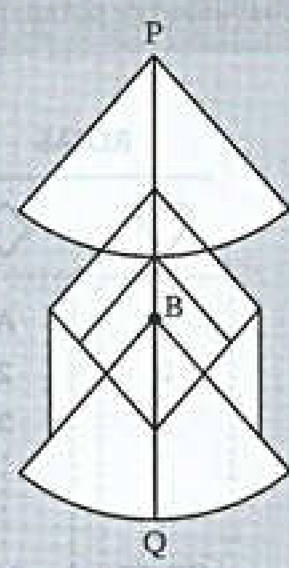
Casos favorables: 25

Que las 3 llaves sean de un sólo piso o del 1ro o del 2do o ...

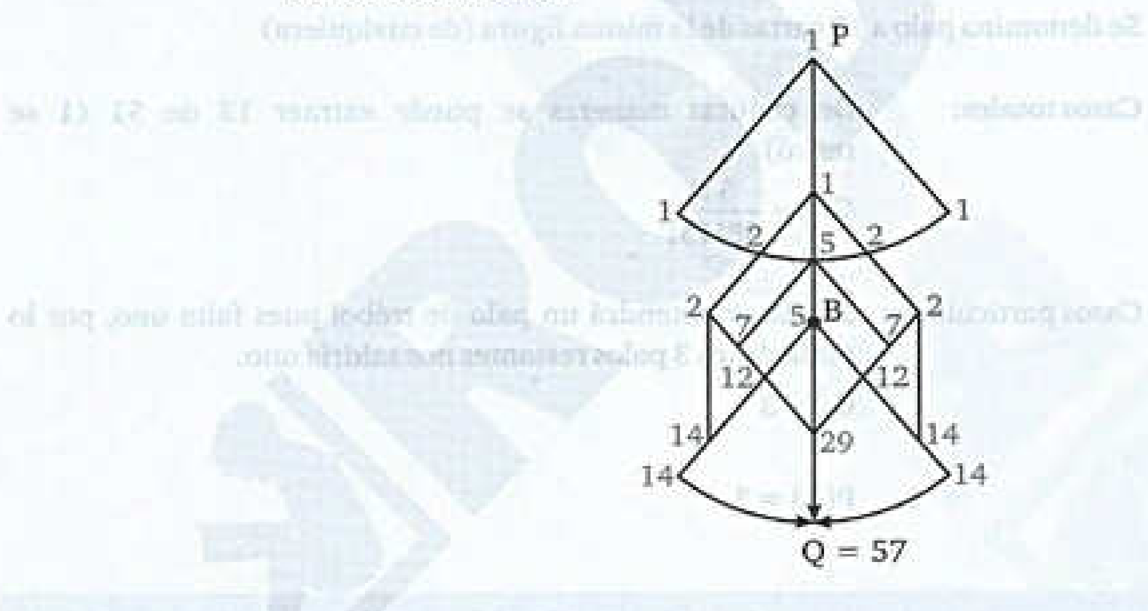
$$C_3^3+C_3^4+C_3^5+C_3^5=1+4+10+10=25$$

$$\therefore \quad P(A)=\frac{25}{680}=\frac{5}{136}$$

PROBLEMA 12 Cuál es la probabilidad de pasar por B al ir de P a Q siempre avanzando respecto a la meta.



Resolución: Los casos totales se obtendrán calculando todas las formas de ir de P a Q, por principio de adición:



Para los casos favorables, tener en cuenta que no es lo mismo llegar al punto B que pasar por B. En el 1er caso se ve que hay 5 formas de llegar.

Para calcular todas las formas de pasar observaremos dicha zona:

Se ve que hay 15 formas de pasar.

$$\therefore \quad P(A) = \frac{15}{57} = \frac{5}{19}$$

PROBLEMA 13 De una baraja de 52 cartas se retira una carta de trébol y se extrae al azar 13 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un palo?

Resolución:

ROJAS		NEGRAS	
♡	◇	♧	♤
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
⋮	⋮	⋮	⋮
(K) 13	13	13	13

→ PALO

Se denomina palo a 13 cartas de la misma figura (de cualquiera)

Casos totales: De cuántas maneras se puede extraer 13 de 51 (1 se retiró)

$$C_{13}^{51} = \frac{51!}{38!13!}$$

Casos particulares: Jamás se obtendrá un palo de trébol pues falta uno, por lo tanto de los 3 palos restantes nos saldría uno.

$$C_1^3 = 3$$

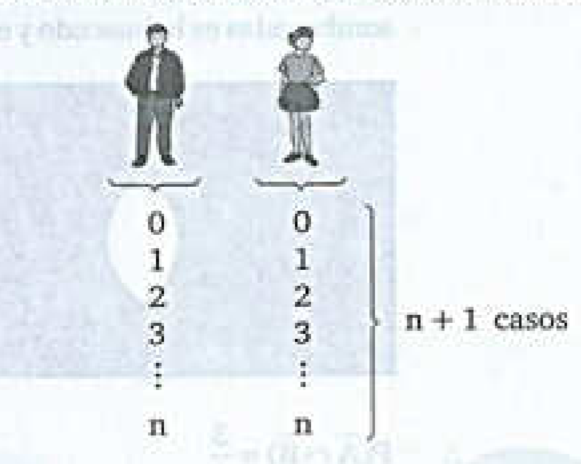
$$\therefore \quad P(A) = 3$$

PROBLEMA 14 Dos personas piensan cada una de ellas un número de o al n. ¿Hallar la probabilidad de que las 2 personas no piensen el mismo número?

Resolución: Cada persona tiene n + 1 formas de pensar un número por lo tanto las formas totales de pensar un número por la primera y la segunda persona será el producto.

$$\underbrace{\text{(hombre)}}_{n+1} \text{ y } \underbrace{\text{(mujer)}}_{n+1} = (n+1)^2$$

Por un instante pensemos y en cuántos casos pensarían los 2 el mismo número:



La probabilidad de que los 2 piensen el mismo número será:

$$\frac{n+1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}$$

¡ ... pero nos piden que no piensen el mismo número ... ! ¡claro! por complemento lo calculamos.

$$P_{\left(\substack{\text{Que no piensen el}\\ \text{mismo número}}\right)}=1-P_{\left(\substack{\text{Que piensen el}\\ \text{mismo número}}\right)}$$

$$P_{\left(\substack{\text{Que no piensen el}\\ \text{mismo número}}\right)}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{Que no piensen el}\\ \text{mismo número}}\right)}=\frac{n}{n+1}$$

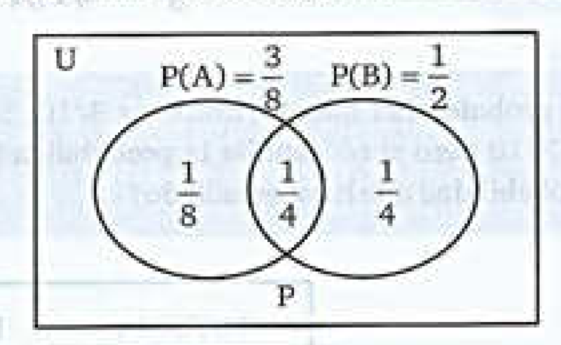
PROBLEMA 15 A y B son 2 sucesos:

$$P(A)=\frac{3}{8} \qquad P(B)=\frac{1}{2} \qquad P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

Hallar: $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

Resolución: Apoyandonos en la teoría de conjuntos y gráficamente se observa:

La $P(U)=1$

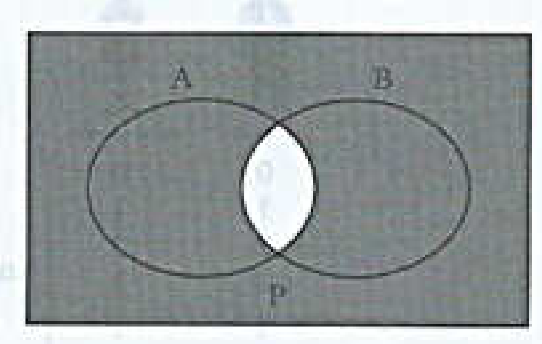


La probabilidad del espacio muestral es 1 (teoría)

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+P=1$$

$$P=\frac{3}{8}$$

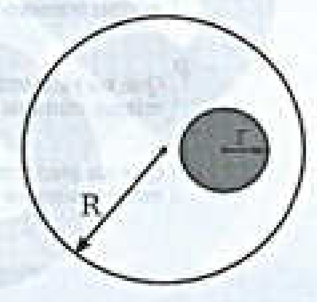
$\overline{A}\cap\overline{B}$: Observamos que la intersección (común) a las 2 regiones sombreadas es lo buscado y ello está en P.



$$\therefore \quad P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{3}{8}$$

PROBLEMA 16 En un círculo de radio 8 se encuentra un círculo menor de radio 1/2. Hallar la probabilidad de que el punto marcado al azar caiga también en el círculo menor.

Resolución: Por probabilidad geométrica:

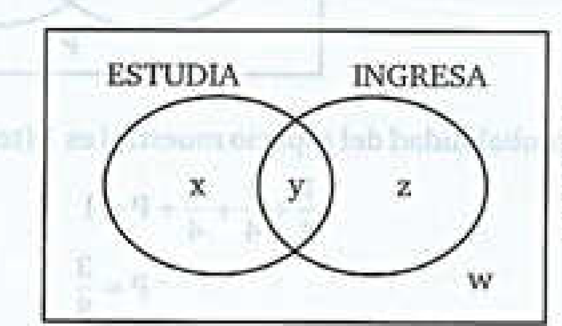


$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{8^2} = \frac{1}{4\times 64} = \frac{1}{56}$$

PROBLEMA 17 La probabilidad que A estudie es 3/10. Si estudia la probabilidad que ingrese es 7/10 pero si no estudia la probabilidad es sólo 4/10 si A ingresó ¿cuál es la probabilidad que haya estudiado?

Resolución:



x, y, z, w son valores de las probabilidades respectivas

Datos :

- Estudia :
$$x + y = \frac{3}{10}$$

- No estudia:
$$1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = z + w$$

- Estudia e ingresa:
$$\frac{y}{\underbrace{x + y}_{\frac{3}{10}}} = \frac{7}{10} \rightarrow y = \frac{21}{100}$$

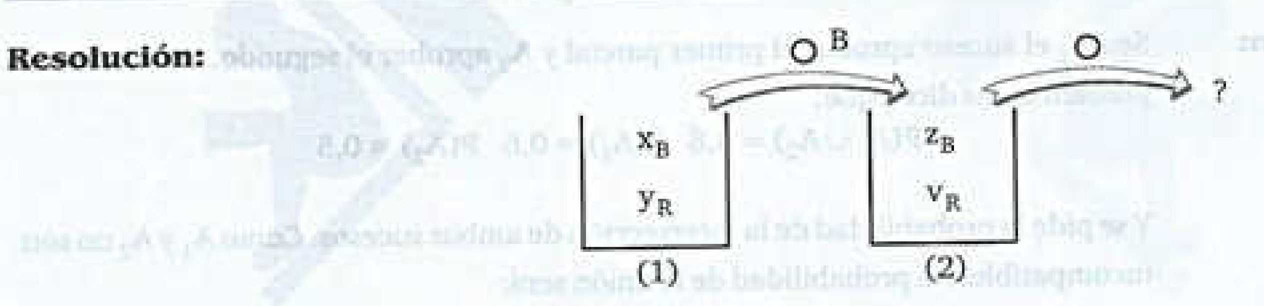
- No estudia pero ingresa:
$$\frac{z}{z + w} = \frac{4}{10} \rightarrow z = \frac{28}{100}$$

Piden ingresó y que haya estudiado:
$$\frac{y}{y + z}$$

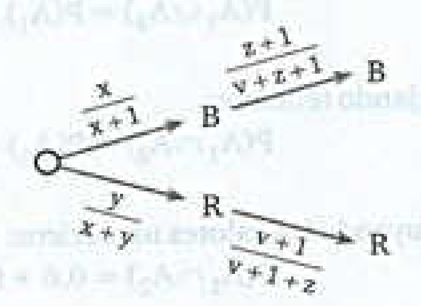
Reemplazamos: $$\frac{\frac{21}{100}}{\frac{21}{100} + \frac{28}{100}} = \frac{3}{7}$$

PROBLEMA 18 Una urna 1 contiene x esferas blancas e y rojas. Una urna 2 contiene z esferas blancas y v rojas. Se escoge una esfera al azar de la urna 1 y se pone en la 2, luego se escoge una esfera de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad que sea blanca?

Resolución:



Proceso de extracción:



$$\therefore \quad P(B) = \left(\frac{x}{x + y}\right)\left(\frac{z + 1}{v + z + 1}\right) + \left(\frac{y}{x + y}\right)\left(\frac{v + 1}{v + 1 + z}\right)$$

PROBLEMA 19 Se tienen 12 focos de los cuales 9 están en buen estado; se prueban uno por uno ¿Cuál es la probabilidad que el séptimo en probar sea el tercer malo?

Resolución: (Experimento) Ω: Probar 12 focos uno por uno.

* Fíjese que los 3 malos pueden ser 3 cualesquiera de los 12 focos probados.

$$\text{N° total de casos} = C_3^{12} = \frac{12\times 11\times 10}{3!}$$

$$\text{N° total de casos} = 220$$

Evento A: Que el séptimo en probar sea el tercer malo.

* Se deduce que los otros 2 malos se encontraron en los primeros 6 probados.

$$\text{N° casos favorables} = C_2^{6} = \frac{6\times 5}{2!}$$

$$\text{N° casos favorables} = 15$$

$$\therefore \quad P_{(A)} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

PROBLEMA 20 En una asignatura se ha deducido aprobar a aquellos que superen uno de los dos parciales. Con este criterio aprobó el 80%, sabiendo que el primer parcial lo superó el 60% y el segundo el 50% ¿Cuál hubiese sido el porcentaje de aprobados, si se hubiese exigido superar ambos parciales?

Resolución: Sea A_1 el suceso aprobar el primer parcial y A_2 aprobar el segundo. Los datos del problema nos dicen que:

$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}8 \quad P(A_1) = 0{,}6 \quad P(A_2) = 0{,}5$$

Y se pide la probabilidad de la intersección de ambos sucesos. Como A_1 y A_2 no son incompatibles, la probabilidad de la unión será:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Despejando tenemos:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2)$$

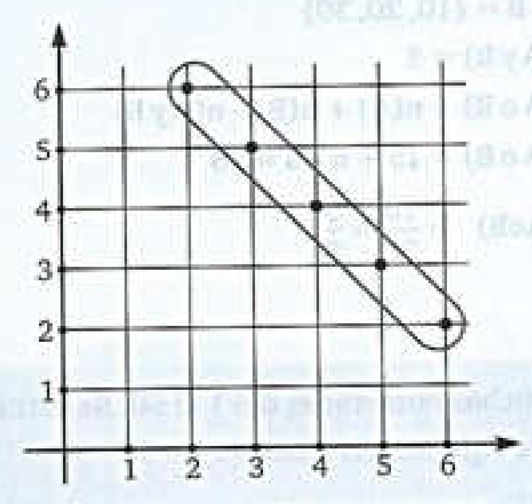
Sustituyendo los valores numéricos:

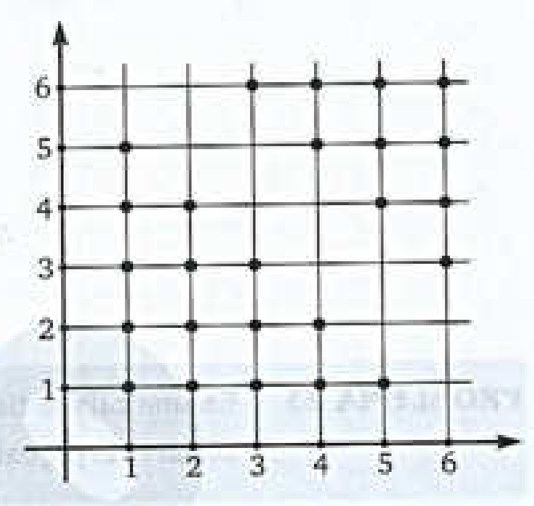
$$P(A_1 \cap A_2) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}8 = 0{,}3$$

La conclusión es que si se hubiese exigido aprobar los dos parciales el porcentaje de aprobados hubiese sido el 30%.

PROBLEMA 21 Una persona lanza repetidas veces 2 dados y gana si obtiene 8 puntos antes de obtener 7. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Resolución:





$$P_{\left(\substack{\text{obtener} \\ \text{8 puntos}}\right)} = \frac{5}{36} \qquad P_{\left(\substack{\text{No obtener 7} \\ \text{ni 8 puntos}}\right)} = \frac{25}{36}$$

En el 1° lanzamiento — En el 2° lanzamiento — En el 3° lanzamiento

$$P_{(\text{ganar})} = \frac{5}{36} + \frac{25}{36}\left(\frac{5}{36}\right) + \frac{25}{36}\left(\frac{25}{36}\right)\left(\frac{5}{36}\right) + \ldots\infty$$

No consiguió 8 puntos, pero tampoco 7, si no pierde

NOTA "S"

No olvides que:

$$S_L = \frac{t_1}{1-q}$$

$$0 < |q| < 1$$

$$\therefore \quad P_{(\text{ganar})} = \frac{\frac{5}{36}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{5}{11}$$

PROBLEMA 22 Una caja contiene 30 fichas numeradas del 1 al 30. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar al azar una ficha, está resulte par o múltiplo de 5?

Resolución:

Se saca una ficha al azar.

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 30\}$

$n(\Omega) = 30$

A: Qué sea par. $A = \{2, 4, 6, \ldots\ldots, 30\}$

$n(A) = 15$

B: Que sea $\overset{\circ}{5}$

$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$n(B) = 6$

$A y B = \{10, 20, 30\}$

$n(A y B) = 3$

$n(A o B) = n(A) + n(B) - n(A y B)$

$n(A o B) = 15 + 6 - 3 = 18$

$\therefore \quad P(AoB) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

PROBLEMA 23 En una caja se tiene 50 fichas numeradas del 1 al 50. Se extrae una ficha al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 6 u 8?

Resolución:

Se saca una ficha al azar.

$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 50\}$

$n(\Omega) = 50$

B: Que sea $\overset{\circ}{6}$

$B = \{6, 12, 18, ..., 48\}$

$n(B) = 8$ resultados

B: Que sea $\overset{\circ}{8}$

$B = \{8, 16, 24, ..., 48\}$

$n(B) = 6$ resultados

$A y B: \{24, 48\} = 2$ resultados

$A o B = 8 + 6 - 2 = 12$ resultados.

$\therefore \quad P(A \text{ o } B) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$

PROBLEMA 24 Se lanzan dos dados perfectos, hallar la probabilidad de que la suma del número de puntos mostrados en las caras superiores sea igual a cinco y el producto cuatro.

Resolución:

6 × 6 = 36 resultados en total

A: suma 5 y producto 4.

$$(1;4),\ (4;1)$$

2 resultados

$$\therefore \quad P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

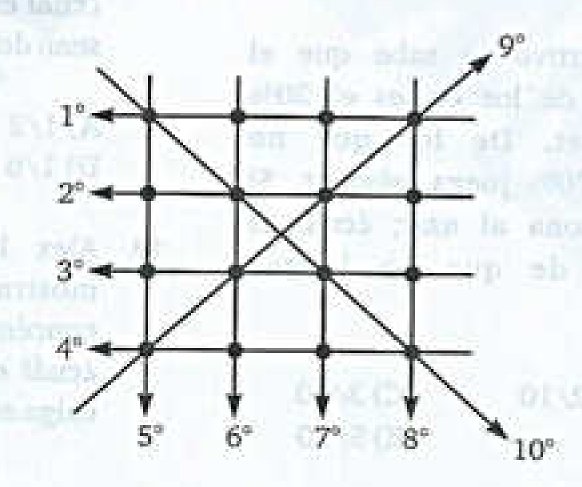
PROBLEMA 25 Elegimos al azar 4 puntos de los 16 marcados como se indica en la figura; ¿cuál es la probabilidad de que ellos se ubiquen sobre una misma recta?

ADMISIÓN UNI 2015 - II

Resolución: (Experimento) Ω: "Elegir al azar 4 puntos de los 15 en la figura"

$$n(\Omega)=C_4^{16}=1820$$

Evento A: "Elegir 4 puntos sobre una misma recta"



$$n(A)=10$$

$$\therefore \quad P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{10}{1820}=\frac{1}{182}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En una urna se colocan 9 fichas numeradas del 1 al 9. Si se extraen al azar 2 fichas, ¿cuál es la probabilidad de que sus números sumen 10?

A) 1/4 B) 1/6 C) 1/9
D) 1/8 E) 2/9

2. En una reunión se encuentran 3 hombres y 3 mujeres. Se eligen 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean elegidos 2 hombres y 2 mujeres?

A) 3/5 B) 9/10 C) 5/9
D) 3/7 E) 3/10

3. En una urna se tienen 4 bolas rojas y 6 bolas blancas. Se extraen 3 bolas al azar una por una, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea roja y las dos siguientes blancas?

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/5
D) 1/6 E) 1/8

4. En un club deportivo se sabe que el 70% juega fútbol de los cuales el 30% no juega básquet. De los que no juegan fútbol el 70% juega básquet. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue básquet?

A) 1/10 B) 2/10 C) 3/10
D) 4/10 E) 5/10

5. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 4veces una moneda, se obtenga 2 caras y 2 sellos?

A) 3/8 B) 1/9 C) 3/16
D) 1/8 E) 5/16

6. Seis personas, Ángel y Brenda entre ellos, se ubican al azar en una fila de 6 asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que Ángel y Brenda se ubiquen juntos y en el centro?

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/5
D) 1/6 E) 1/7

7. Le piden a un alumno que escriba al azar un número de 3 cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que escriba un número múltiplo de 5?

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/5
D) 1/10 E) 1/9

8. En una urna se tienen 80 bolos numerados del 1 al 80. Si se extrae un bolo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su número sea múltiplo de 2 ó de 5?

A) 2/5 B) 3/5 C) 2/7
D) 3/7 E) 4/7

9. En una canasta hay 4 naranjas y 5 manzanas. Si Carmen coge 3 frutas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que las 3 frutas sean de la misma clase?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4
D) 1/6 E) 1/9

10. Alex lanza un dardo hacia la figura mostrada (las 3 circunferencias son concéntricas, cuyos radios son a, 3a y 4a), ¿cuál es la probabilidad de que el dardo caiga en la zona blanca?

A) 1/9 B) 1/12 C) 3/4
D) 1/6 E) 1/3

11. En una caja hay 12 focos de los cuales 6 son defectuosos y el resto está en buen estado. Si se toman 4 focos al azar, hallar la probabilidad de que por lo menos 2 sean defectuosos.

A) 4/11 B) 6/11 C) 8/11
D) 5/11 E) 3/11

12. Tres alumnos resuelven en forma independiente un problema, siendo la probabilidad de que lo resuelva cada uno: 1/3, 2/5 y 3/7 respectivamente. Si los 3 juntos se disponen a resolver el problema, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno lo resuelva?

A) 24/35 B) 25/35 C) 26/35
D) 27/35 E) 18/35

13. Un club tiene 20 mujeres y 30 hombres. Se escogen 2 personas al azar para formar una comisión, ¿cuál es la probabilidad de que la comisión esté formada por un hombre y una mujer?

A) 20/49 B) 22/49 C)24/49
D) 28/49 E) 30/49

14. De una urna que contiene 5 bolas negras y 4 blancas, se extraen 2 bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

A) 1/9 B) 2/9 C) 3/9
D) 4/9 E) 5/9

15. Se dispone de 5 envases de gaseosa, 2 de Coca Cola, 2 de Inka Kola y una de Concordia. Si se les ordena en una fila, ¿cuál es la probabilidad de que las de Coca Cola y la de Concordia estén juntas?

A) 1/8 B) 1/6 C) 3/8
D) 2/9 E) 3/10

16. Se lanzan 2 dados simultáneamente, calcular la probabilidad de obtener una suma igual a 8.

A) 1/9 B) 2/9 C) 3/10
D) 2/9 E) 6/10

17. Si de una baraja de 52 cartas se saca una al azar, calcular la probabilidad de que sea una jota o espada.

A) 4/13 B) 2/13 C) 6/13
D) 1/13 E) 3/13

18. Se escribe al azar un número de 3 cifras, ¿cuál es la probabilidad de que sea un número de 3 cifras consecutivas y significativas?

A) 11/150 B) 9/150 C) 7/150
D) 13/150 E) 1/30

19. Se tiene un dado cargado donde la probabilidad de que salga un número es proporcional a dicho número. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga puntaje 5?

A) 4/21 B) 5/21 C) 6/21
D) 1/3 E) 1/7

20. En una urna se tienen 12 bolas (7 blancas y 5 negras). Si extraemos 2 de ellas al azar una tras otra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la otra negra?

A) 31/132 B) 32/132 C) 33/132
D) 34/132 E) 35/132

21. Se escogen 3 sillas de un grupo de 15, de las cuales 5 son defectuosas. Hallar la probabilidad de que al menos 3 sean defectuosas.

A) 2/91 B) 3/91 C) 4/91
D) 5/91 E) 6/91

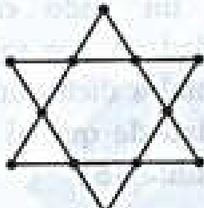
22. Tres parejas de esposos se ubican al azar alrededor de una mesa circular. ¿Cuál es la probabilidad de que las parejas no se separen?

A) 1/9 B) 1/8 C) 2/9
D) 3/10 E) 5/12

23. Una empresa posee 3 playas de estacionamiento 8 trabajadores de dicha empresa llegan diariamente en automóvil y cada uno de ellos selecciona una playa para estacionarse. ¿cuál es la probabilidad que en un día determinado las 3 playas tengan 4, 2 y 2 autos respectivamente?

A) 140/37 B) 130/37 C) 150/37
D) 120/37 E) 110/37

24. En la figura se han resaltado 12 puntos. Se escogen 3 puntos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dichos puntos sean colineales?



A) 6/55 B) 7/55 C) 8/55
D) 5/55 E) 9/55

25. En una reunión hay 10 parejas de esposos. Si se eligen 2 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean un hombre y una mujer que no sean esposos?

A) 8/19 B) 9/19 C) 7/19
D) 11/19 E) 10/19

26. Se ordenan al azar todas las letras de la palabra HONESTO. Hallar la probabilidad de que se obtenga un ordenamiento que empiece y termine en vocal?

A) 1/6 B) 1/8 C) 1/7
D) 2/9 E) 3/8

27. Si tenemos en una caja 5 libros de Aritmética y 7 libros de Razonamiento Matemático, todos del mismo tamaño y ancho. Si se extrae aleatoriamente libro a libro y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un libro de Aritmética en al segunda extracción?

A) 3/5 B) 5/7 C) 2/3
D) 5/12 E) 7/12

28. Las preferencias de 90 alumnos por los cursos de Razonamiento Matemático (M), Aritmética (A) y Razonamiento Verbal (R) son: 45 alumnos prefieren M; 30 alumnos prefieren A; 40 alumnos prefieren R; 10 alumnos prefieren A y R; 12 alumnos prefieren M y A; y 18 alumnos prefieren M y R. Si 10 alumnos no prefieren ningún curso. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a uno de los 90 alumnos y que le guste un solo curso?

A) 2/9 B) 7/9 C) 1/9
D) 1/3 E) 5/9

29. Se tiene un círculo de radio 8m, si ubicamos en la región circular un punto aleatoriamente. ¿Cual es la probabilidad de que este punto esté más cerca o a igual distancia del centro de la circunferencia?

A) 1/5 B) 1/7 C) 1/2
D) 1/4 E) 3/8

30. Calcule la probabilidad de formar números de 4 cifras diferentes (a su vez diferentes de cero) tal que:

- 1, 2, 3 estén juntas y en ese orden.
- En cualquier orden las cifras 1, 2, 3 pero juntas.

A) $\frac{1}{15};\frac{1}{21}$ B) $\frac{1}{271};\frac{1}{352}$ C) $\frac{1}{35};\frac{1}{7}$
D) $\frac{3}{359};\frac{2}{243}$ E) $\frac{1}{252};\frac{1}{42}$

31. Halle la probabilidad e obtener al menos una cara al lanzar "n" monedas a la vez.

A) $\frac{2^n-1}{2^n}$ B) $\frac{6^n-1}{6^n}$ C) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$
D) $\frac{n^2-1}{n}$ E) $\frac{n^6-5}{6^n}$

32. Se busca a un malechor en una "quinta" donde hay 5 casas; la probabilidad de encontrarlo en una de las casas es 2/3. Calcule la probabilidad que se encuentre al delincuente en la última casa buscada dado que se revisaron todas.

A) 2/243 B) 1/81 C) 1/243
D) 32/243 E) 1/5

33. Se lanzan 2 dados simultáneamente. Calcule la probabilidad de obtener una suma igual a 8.

A) 1/12 B) 4/9 C) 5/36
D) 1/3 E) 1/6

34. En una caja hay lapiceros de iguales características físicas, si hay 18 azules, 8 negros, 6 verdes, 9 rojos y 3 amarillos. Si se saca al azar un lapicero. ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul o negro?

A) 15/17 B) 2/9 C) 2/5
D) 13/22 E) 3/8

35. 10 amigos desean viajar en un tren que tienen 3 vagones. Cada pasajero selecciona con igual probabilidad cada una de los vagones. Determine la probabilidad de que hayan: una carreta con dos pasajeros, una con tres pasajeros y la otra con los 5 pasajeros restantes.

A) $\frac{560}{2187}$ B) $\frac{650}{2781}$ C) $\frac{506}{2771}$
D) $\frac{285}{1827}$ E) $\frac{271}{6557}$

36. En una caja hay 5 bolas rojas y 3 negras. Se saca al azar una bola y no se devuelve a la caja, luego se saca otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas que se sacaron sean rojas?

A) 7/13 B) 5/8 C) 5/14
D) 3/7 E) 1/2

37. Se lanza un dado "n" veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el puntaje "3" salga al menos una vez en los "n" lanzamientos?

A) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ B) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ C) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^n$
D) $1-\left(\frac{3}{n}\right)^5$ E) $\frac{n^3}{6n}$

38. Se dispone de 5 envases de gaseosas: dos de Coca Cola, dos de Inca Cola y una de Concordia. Si se les ordena en una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que las de Coca Cola y la de Concordia estén juntos?

A) 7/10 B) 5/7 C) 15/32
D) 5/13 E) 3/10

39. Tres alumnos resuelven en forma independiente un problema, siendo la probabilidad de que lo resuelva cada uno; 1/3, 2/5 y 3/7 respectivamente. Si los 3 juntos se disponen a resolver el problema ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno lo resuelva?

A) 27/35 B) 8/35 C) 2/35
D) 7/15 E) 2/15

40. Juan participa en un sorteo de 2 premios, si este tiene 2 de los 20 boletos imprimidos. Calcule la probabilidad de que gane sólo uno de estos premios.

A) 8/85 B) 18/95 C) 13/18
D) 1/10 E) 2/9

41. Se escoge al azar una persona de una agrupación folklórica que tiene 40 integrantes, de los cuales 24 bailan, 10 mujeres cantan, 8 personas no bailan ni canta y 7 mujeres cantan y bailan. Calcule la probabilidad que al escoger una persona sea un hombre que canta pero no baila.

A) 1/4 B) 1/8 C) 3/7
D) 5/13 E) 2/9

42. Se elegimos simultáneamente 2 cuadraditos de un tablero de ajedrez, uno blanco y otro negro. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos cuadraditos no pertenezcan a la misma fila ni a la misma columna?

A) 1/4 B) 5/9 C) 3/64
D) 8/31 E) 3/4

43. En una mesa may 3 tipos de conservas: 3 de peras, 4 de duraznos y 5 de ciruelas. Determine la probabilidad de que al elegir 3 tarros al azar:

- No resulten los 3 de la misma fruta.
- Resultan los 3 de frutas diferentes.

A) $\frac{41}{44};\frac{3}{11}$ B) $\frac{7}{44};\frac{8}{11}$ C) $\frac{3}{44};\frac{2}{11}$
D) $\frac{8}{11};\frac{3}{11}$ E) $\frac{41}{44};\frac{5}{7}$

44. Se lanzan simultáneamente 6 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 caras y 2 sellos?

A) 15/32 B) 3/64 C) 1/64
D) 15/64 E) 2/35

45. Por el día del padre se han reunido 25 padres de los alumnos del quinto grado "A" y 30 padres del quinto "B", si se sortea un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que el afortunado sea un padre del quinto grado A?

A) 6/11 B) 5/11 C) 11/25
D) 5/6 E) 1/2

46. En una empresa posee 3 playas de estacionamiento 8 trabajadores de dicha empresa llegan diariamente en automóvil y cada uno de ellos selecciona una playa para estacionarse. ¿Cuál es la probabilidad que en un día determinado de los 8 automóviles mencionados, tengan 4, 2 y 2 autos en una playa de estacionamiento respectivamente?

A) $70/3^8$ B) $140/3^7$ C) $3^5/312$
D) 3/8 E) 8/35

47. Se escogen al azar 4 sillas entre 10, de las cuales 6 son defectuosas. Halle la probabilidad que de las escogidas 2 exactamente sean defectuosas.

A) 1/6 B) 3/7 C) 4/35
D) 2/5 E) 2/3

48. Se ha vendido 100 boletos de rifa numerados del 001 al 100. Si el número ganador ha resultado par. ¿Cuál es la probabilidad de que sea premiado una persona que ha comprado los números 020 y 024?

A) 3/10 B) 1/25 C) 6/25
D) 2/5 E) 7/10

49. La probabilidad de que Erica ingrese a la UNI es 0,7 que ingrese a Católica es 0,4. Si la probabilidad de que no ingrese a ninguna es 0,12. Halle la probabilidad de que ingrese a ambas universidades a la vez.

A) 0,24 B) 0,21 C) 0,27
D) 0,2 E) 0,12

50. La probabilidad de aprobar Matemática I es 0,6 y la probabilidad de aprobar Física I es 0,8. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar sólo uno de dichos cursos?. (Se sabe que aprueba al menos uno de dichos cursos).

A) 0,60 B) 0,54 C) 0,80
D) 0,40 E) 0,20

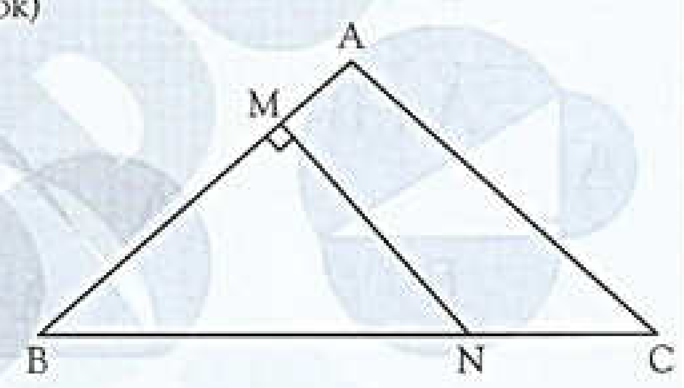
Perímetro y Áreas de Regiones Planas

OBJETIVOS

- Deducir y calcular correctamente el área de una región plana.
- Comparar y cuantificar correctamente nuevas regiones planas en base a conceptos básicos.
- Relacionar con situaciones de nuestro entorno en quehaceres cotidianos

Fuente: Perú geométrico (página del facebook)

* $AB = AC = BN < BC$

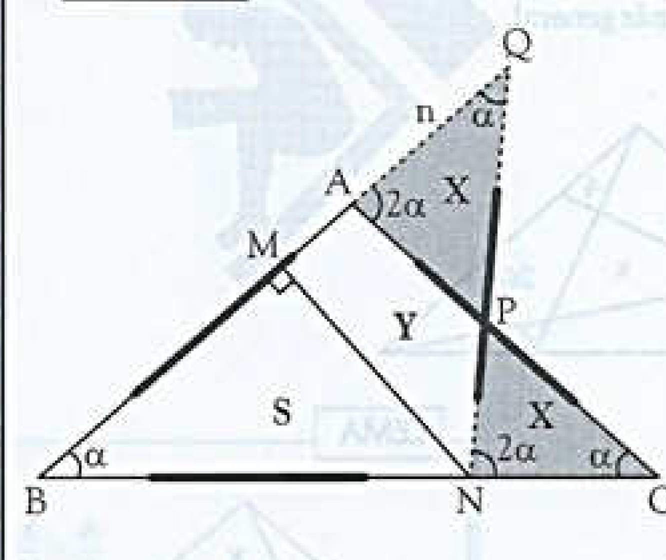


Demostrar que:

* $[BMN] = [MACN]$

* $p(\Delta BMN) = p(\square MACN)$

Resolución:



* $\Delta BAC \cong \Delta BNC$ (LAL):

$BC = BQ \Rightarrow NC = AQ = n$

* $\Delta CNP \cong \Delta QAP$ (ALA):

$\Rightarrow [CNP] = [QAP] = x$

♦ ΔBNQ: $AM = MQ$

$\Rightarrow [BNM] = [QMN] = [MACN]$

$\therefore [BNM] = [MACN]$

♦ $BN = MA + n$:

$\therefore p(\Delta BMN) = p(\square MACN)$

INTRODUCCIÓN

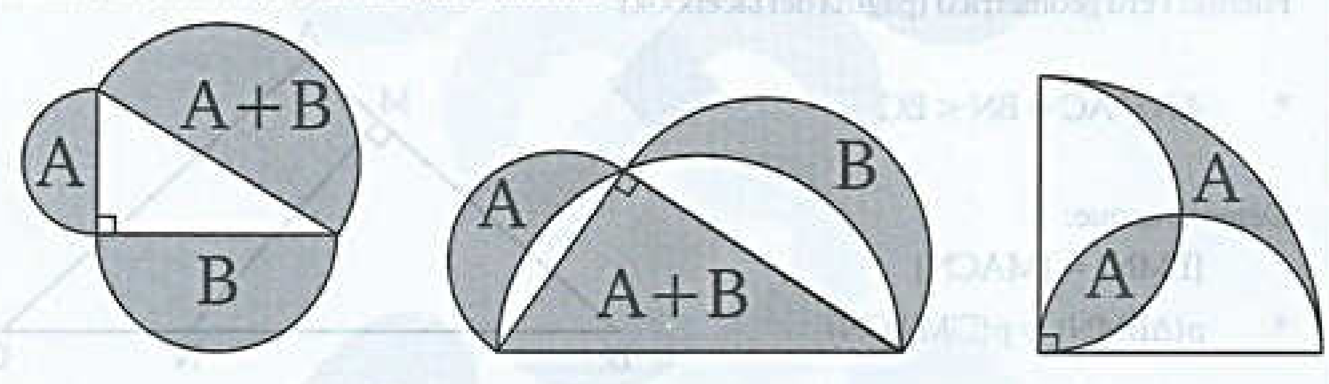
En la antigüedad como en nuestros tiempos modernos siempre estuvo presente el interés de calcular el área de una región plana ya sea para recabar impuestos de las parcelas entregadas a los pobladores en las culturas antiguas, hasta la compra de terrenos comerciales en la actualidad.

Uno de los grandes problemas de la antigüedad que dio un dolor de cabeza a muchos matemáticos de la época es "La cuadratura del círculo"

Consiste geométricamente en determinar con regla y compás el lado de un cuadrado cuya área cabe exactamente en la región de un círculo de radio dado.

Uno de los que se ocupó de este problema fue el pensador griego Anaxágoras (499 – 428 A.E) quién según Plutarco se ocupó de ello cuando estaba encarcelado en Atenas por una acusación de impiedad.

Otro de los matemáticos que se ocupó de ello profesionalmente fue Hipócrates que Quios vinculando a éste trabajo sus famosas "lúnulas" cuadrables.

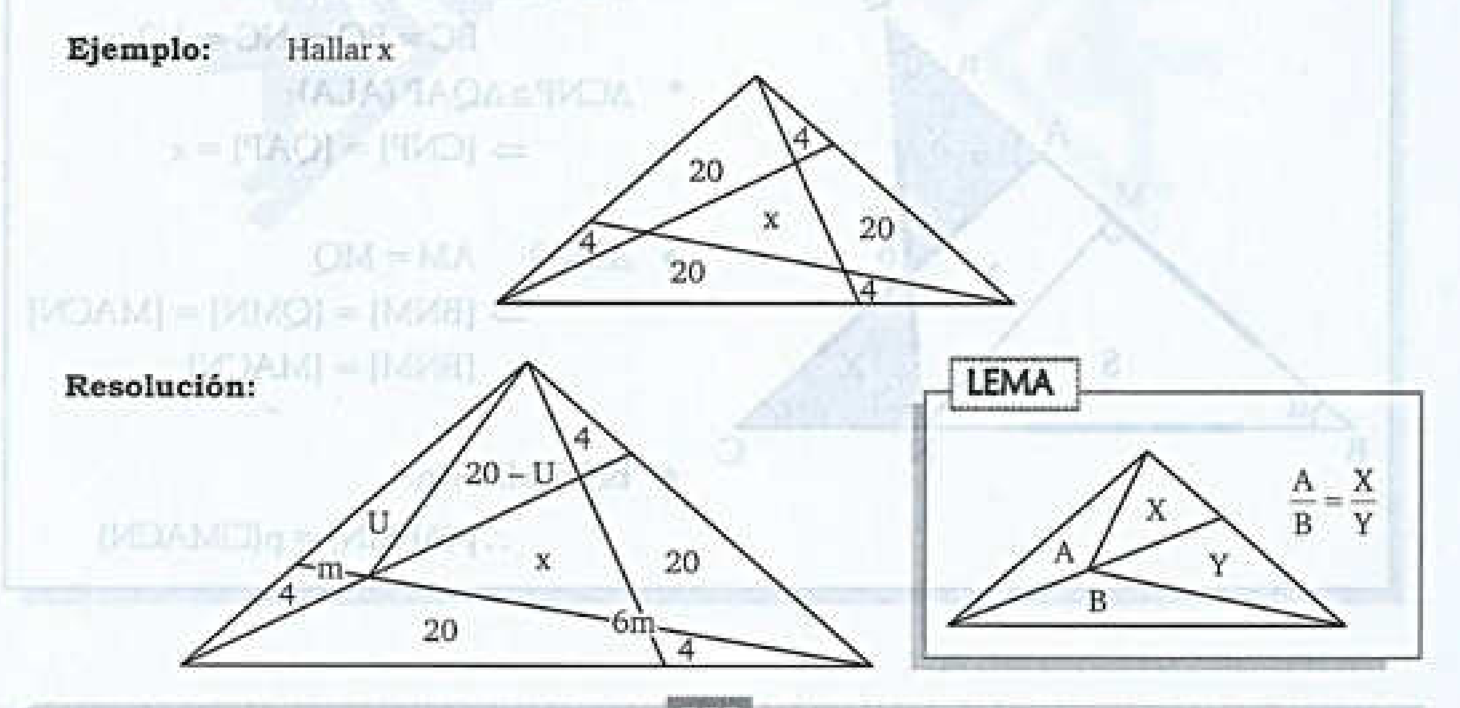


LEMA (MATEMÁTICAS)

En matemáticas, un lema es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema menor o una premisa auxiliar que forma parte de un teorema más general.

Ejemplo: Hallar x

Resolución:



$$\frac{U}{44-U+x}=\frac{m}{6m}=\frac{1}{6}$$

$$6U=44-U+x \rightarrow U=\frac{x+44}{7} \quad ...(I)$$

Por lema:

$$\frac{4+U}{24}=\frac{24-U}{20+x}$$

Remplazando en (I):

$$\left(4+\frac{(x+44)}{7}\right)(20+x)=24\left(24-\frac{x+44}{7}\right)$$

$$(72+x)(20+x)=24(124-x)$$

$$1440+92x+x^2=2976-24x$$

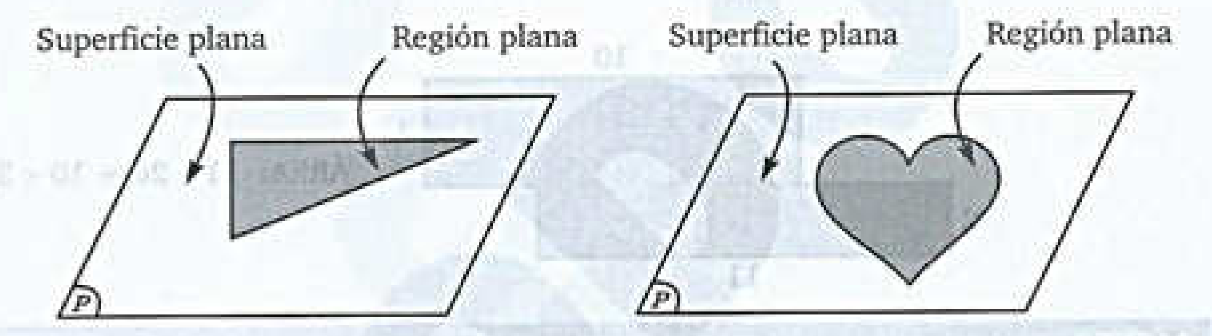
$$x^2+116x-1536=0$$

$$(x-12)(x+128)=0$$

$$x=12$$

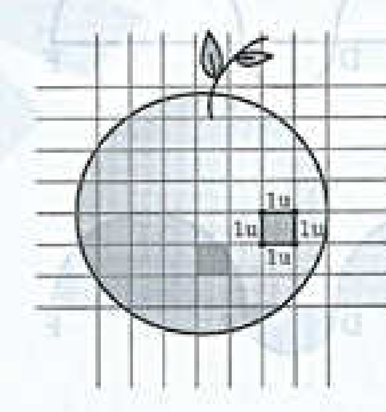
REGIÓN PLANA

Es la porción de un plano que se encuentra limitado por una línea cerrada, por tal motivo las regiones no tienen forma definida.



ÁREA

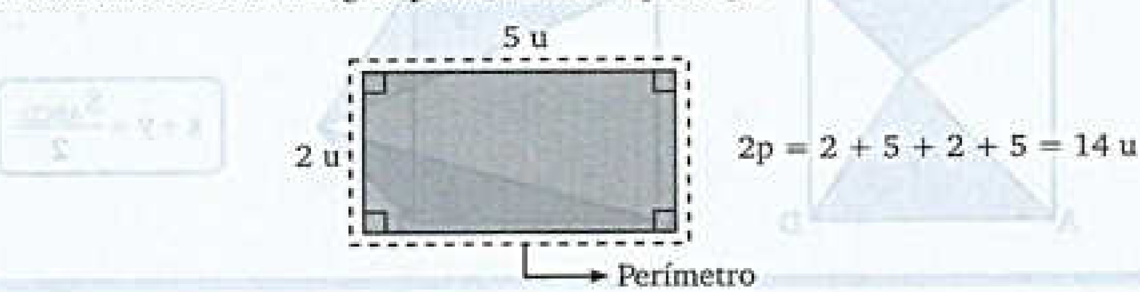
Es la medida de la extensión de una superficie generalmente para hallar el valor del área se toma como patrón de medida una región cuadrada cuyo lado sea la unidad.



Aproximadamente: $27u^2$ de área

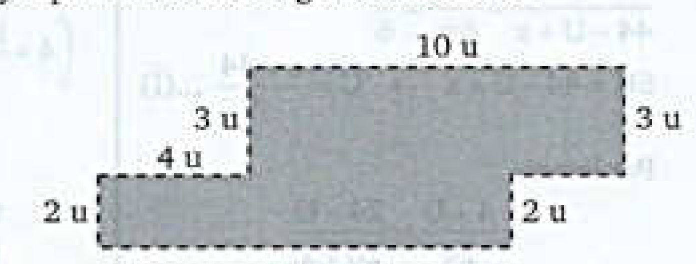
PERÍMETRO

Es la medida del contorno de una región plana, se denota por (2p).

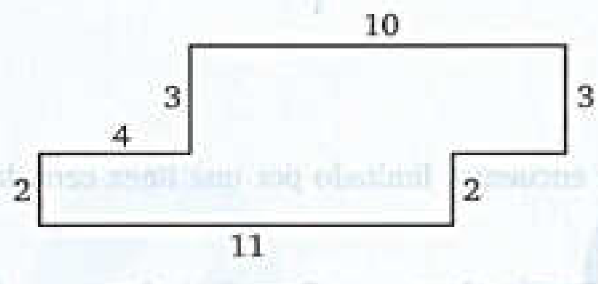


$2p=2+5+2+5=14$ u

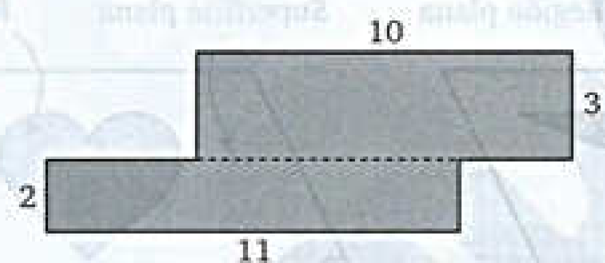
Ejemplo: Hallar el área y el perímetro de la región sombreada.



Resolución:



PERÍMETRO: 38 u

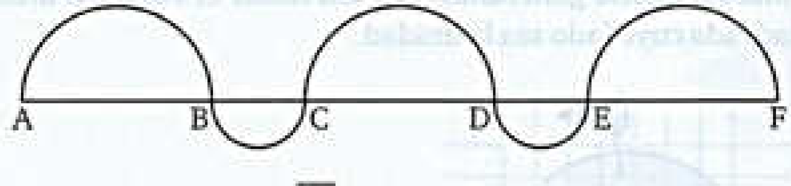


ÁREA: $11 \times 2u + 10 \times 3u = 52\ u^2$

NOTA

Si $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ son diámetros de las semicircunferencias se cumple:

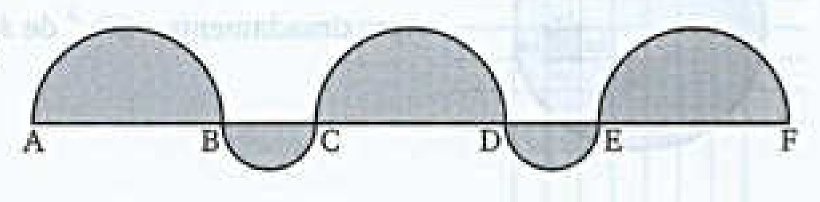
1)



$\overline{AF} = x$ m

$$L_{\overset{\frown}{AF}} = \frac{\pi x}{2}$$

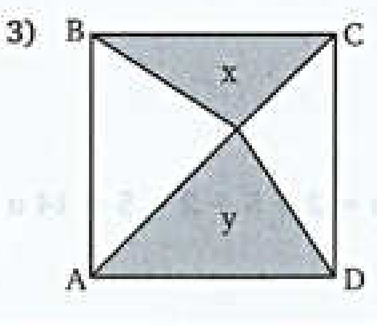
2)

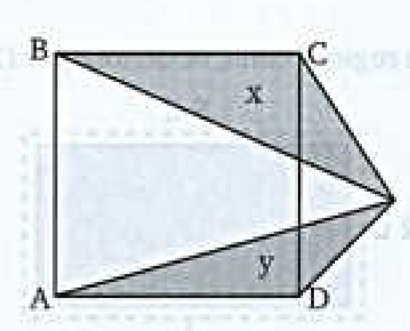


$\overline{AF} = x$ m

$$\text{Perímetro Reg. sombreada} = \frac{\pi x}{2} + x$$

3)

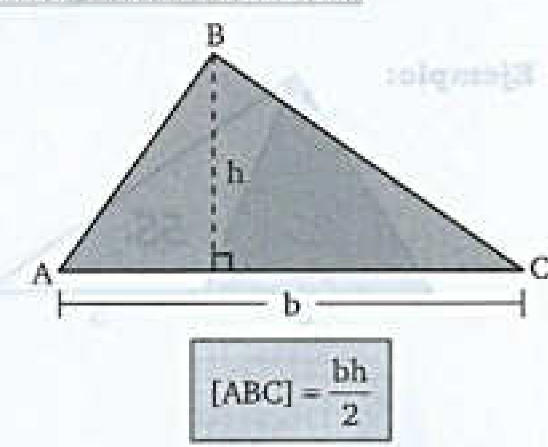




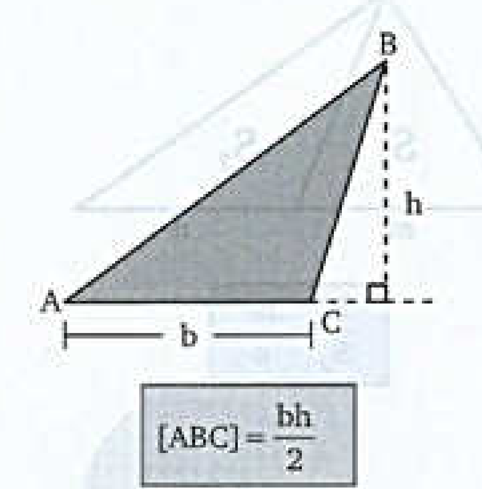
$$x + y = \frac{S_{ABCD}}{2}$$

ÁREA DE REGIONES BÁSICAS

REGIONES TRIANGULARES

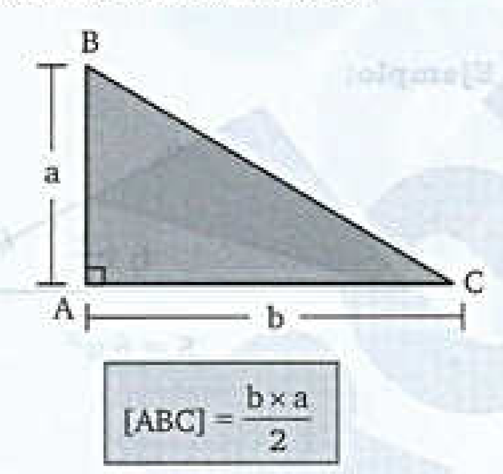


$$[ABC]=\frac{bh}{2}$$



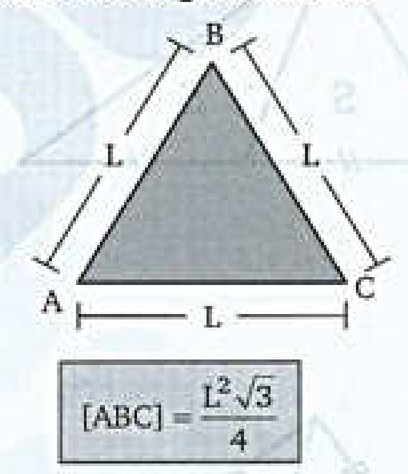
$$[ABC]=\frac{bh}{2}$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



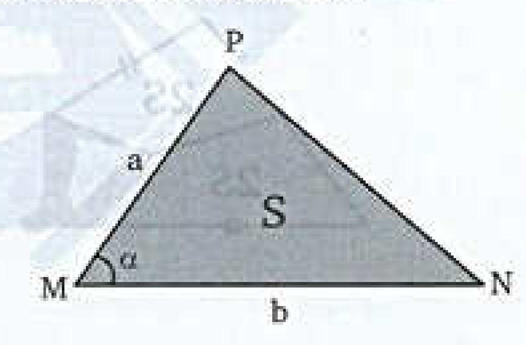
$$[ABC]=\frac{b\times a}{2}$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



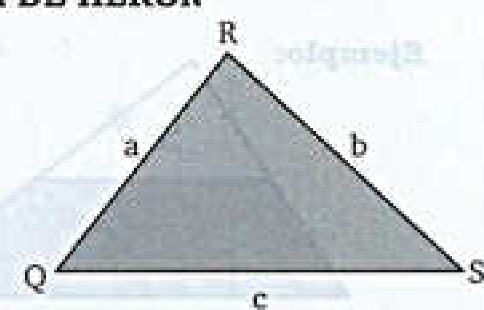
$$[ABC]=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA



$$[MNP]=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

FÓRMULA DE HERÓN

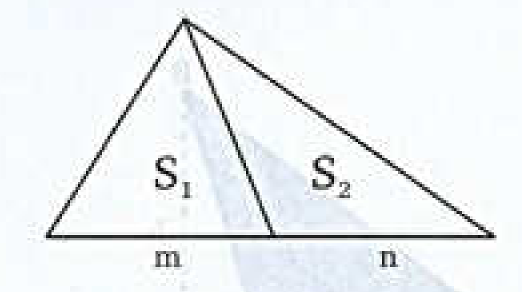


p: Semiperímetro

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

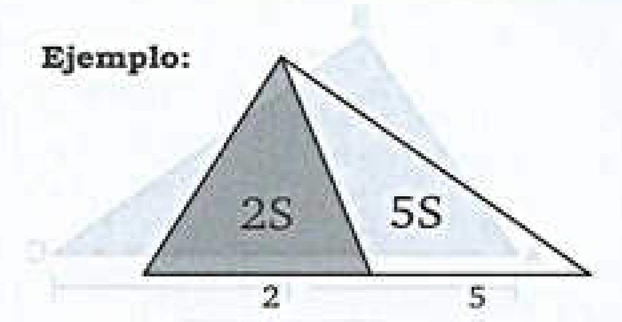
$$[QRS]=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

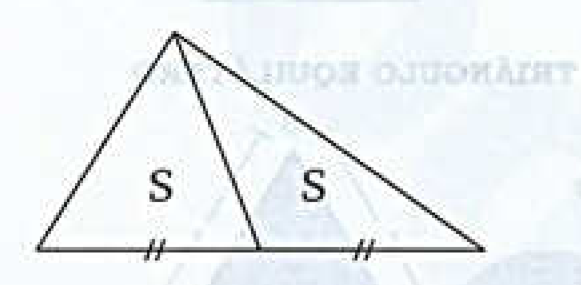
RELACIÓN DE ÁREAS



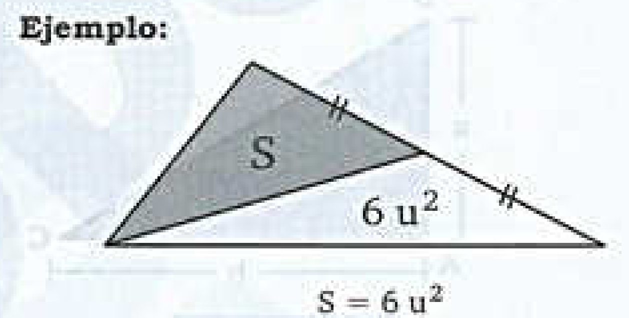
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$

Ejemplo:

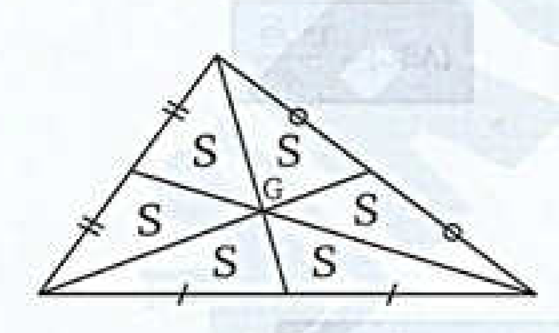




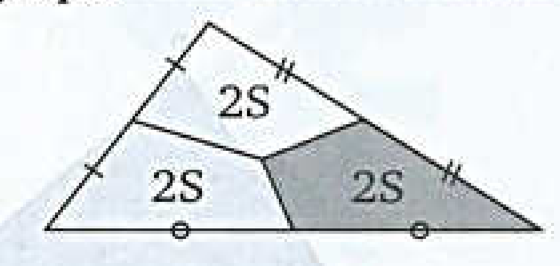
Ejemplo:

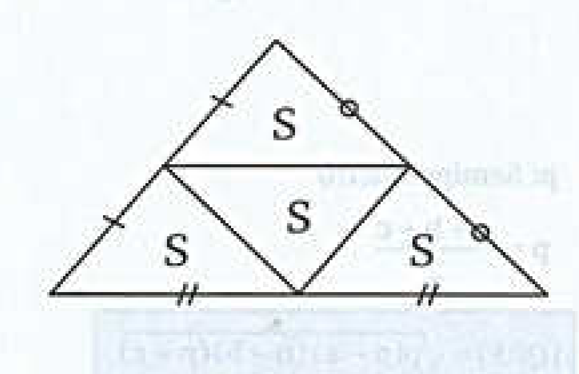


$S = 6\ u^2$



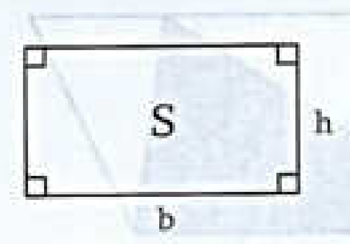
Ejemplo:

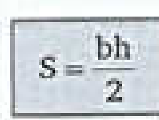




Ejemplo:

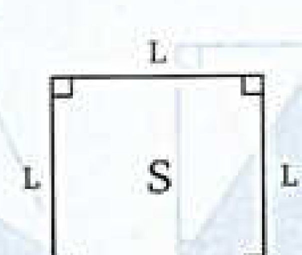
REGIONES CUADRANGULARES





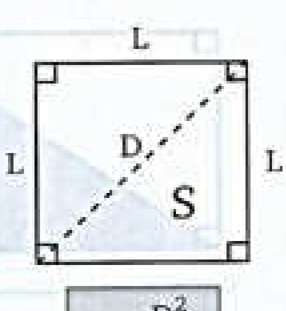
$S = \frac{bh}{2}$

$2p = 2b + 2h$

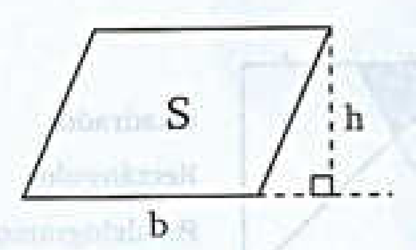


$S = L^2$

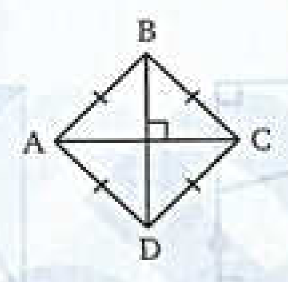
$2p = 4L$



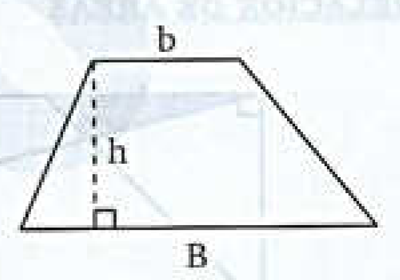
$S = \frac{D^2}{2}$



$S = bh$

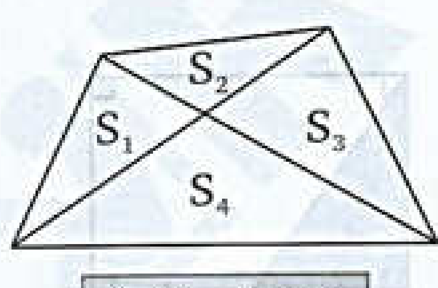


$S = \frac{(AC)(BD)}{2}$



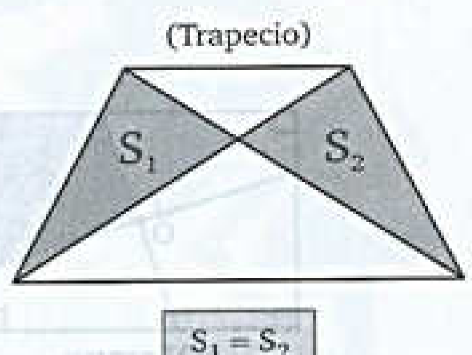
$S = \left(\frac{B + b}{2}\right)h$

RELACIÓN DE ÁREAS

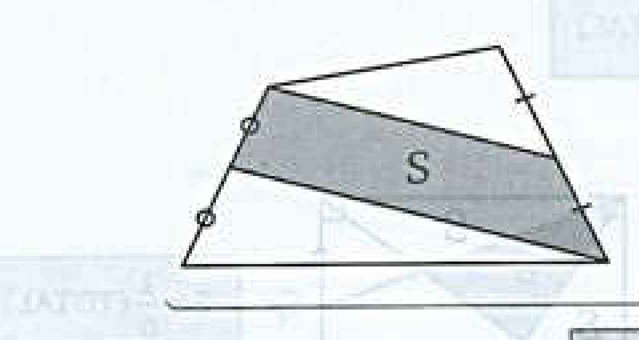


$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$

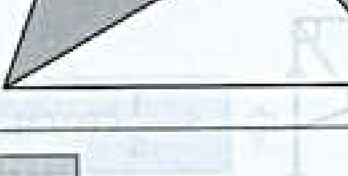
(Trapecio)



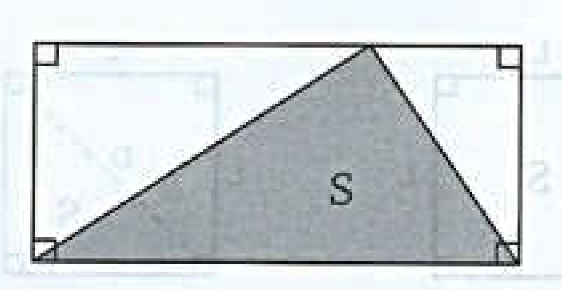
$S_1 = S_2$



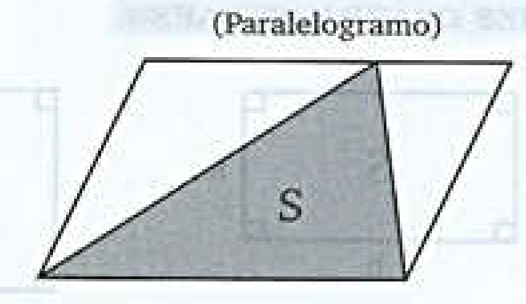
(Paralelogramo)



$S = \frac{1}{2}\text{(TOTAL)}$

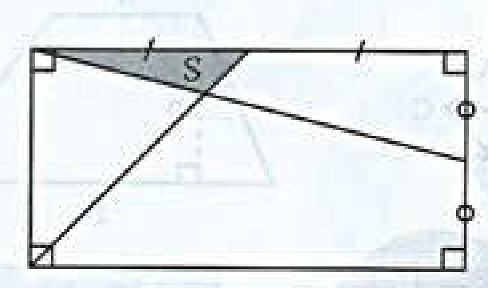


(Paralelogramo)



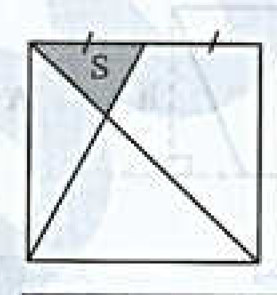
$S = \frac{1}{2}$ (TOTAL)

RELACIÓN DE ÁREAS



$S = \frac{1}{20}$ (TOTAL)

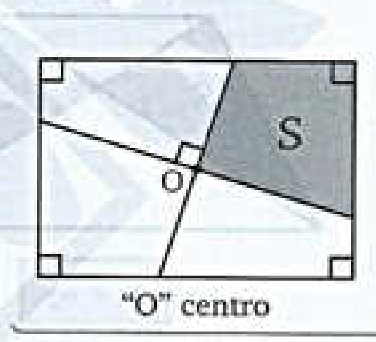
(mediana – mediana)



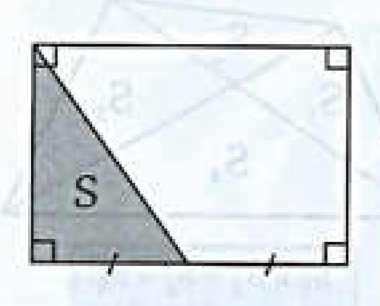
Cuadrado
Rectángulo
Paralelogramo

$S = \frac{1}{12}$ (TOTAL)

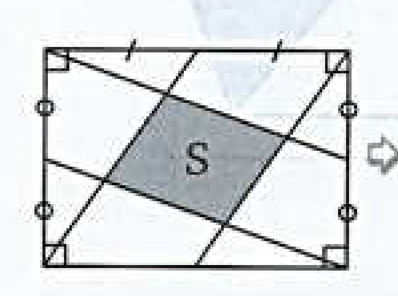
(diagonal – mediana)



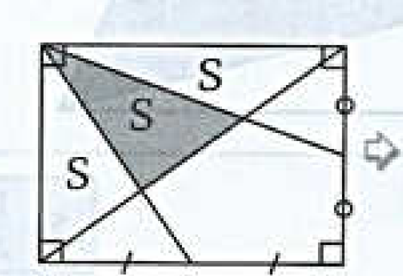
"O" centro



$S = \frac{1}{4}$ (TOTAL)

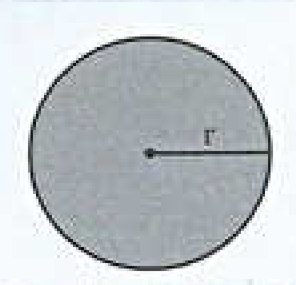


⇨ $S = \frac{1}{5}$ (TOTAL)

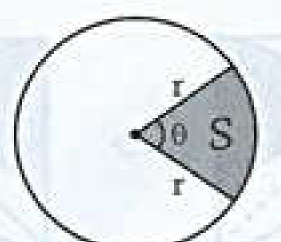


⇨ $S = \frac{1}{6}$ (TOTAL)

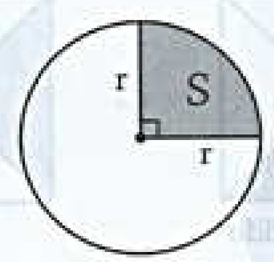
REGIONES CIRCULARES



$S = \pi r^2$ PERÍMETRO : $2p = 2\pi r$

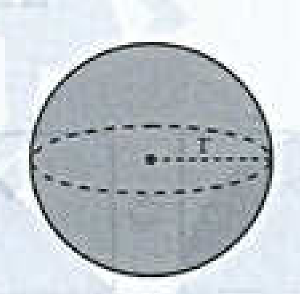


$S = \frac{\theta}{360} \cdot \pi r^2$ PERÍMETRO : $2p = \frac{\theta}{360}(2\pi r) + 2r$

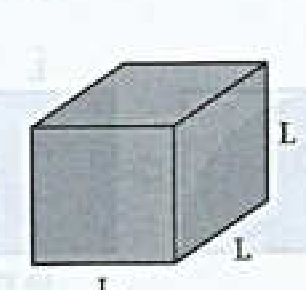


$S = \frac{\pi r^2}{4}$ PERÍMETRO : $2p = \frac{\pi r}{2} + 2r$

$S = \frac{\pi r^2}{2}$ PERÍMETRO : $2p = \pi r + 2r$



SUPERFICIE ESFÉRICA : $S = 4\pi r^2$



SUPERFICIE CÚBICA : $S = 6L^2$

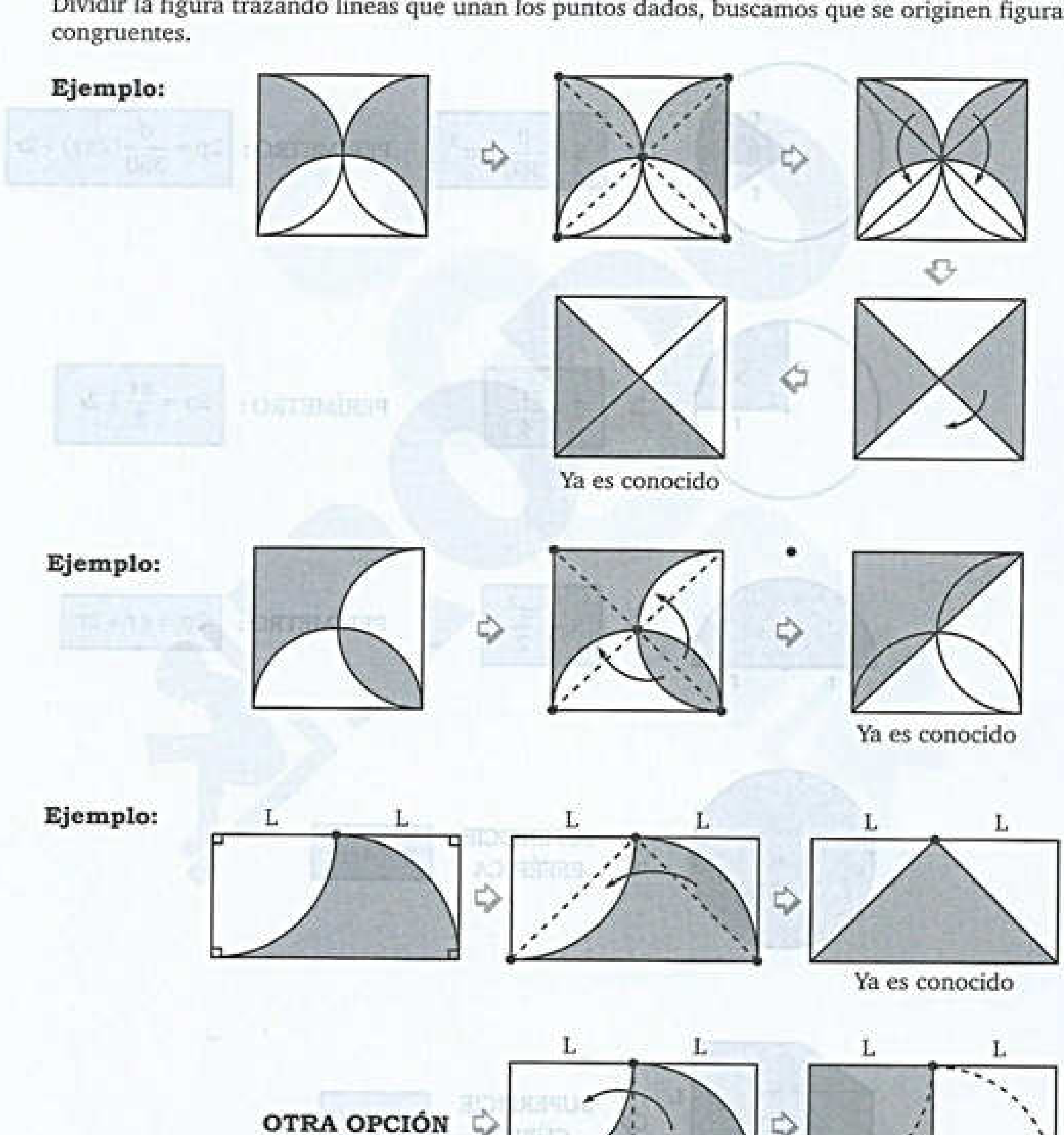
CRITERIOS PRINCIPALES PARA CALCULAR EL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

I. Por traslado
II. Por aplicación directa de fórmulas
III. Por planteo de ecuaciones
IV. Por diferencias

I. POR TRASLADO

Dividir la figura trazando líneas que unan los puntos dados, buscamos que se originen figuras congruentes.

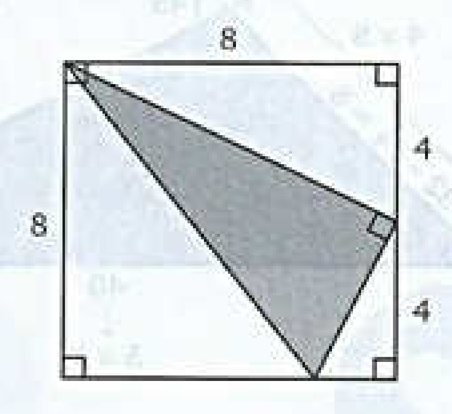
Ejemplo:



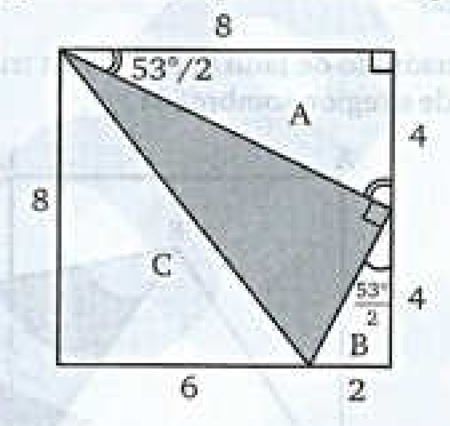
II. POR APLICACIÓN DIRECTA DE FÓRMULA

En este caso se recurre directamente a la fórmula previamente identificando el caso.

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada:



Resolución: Observamos triángulo de 53°/2 pues cateto mayor es doble del menor.

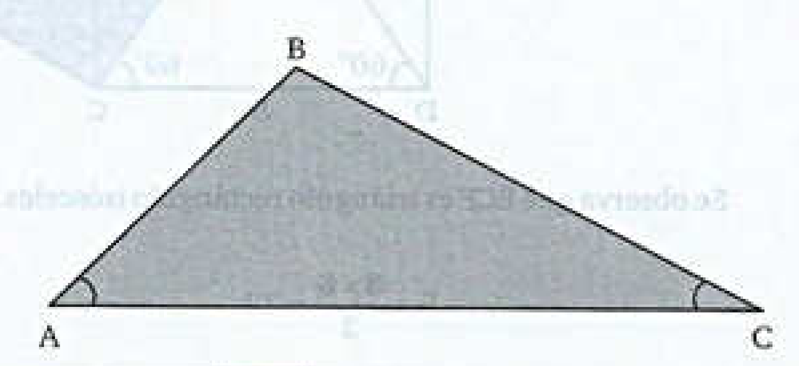


Áreas : $A = \dfrac{8 \times 4}{2} = 16$ $B = \dfrac{4 \times 2}{2} = 4$ $C = \dfrac{8 \times 6}{2} = 24$

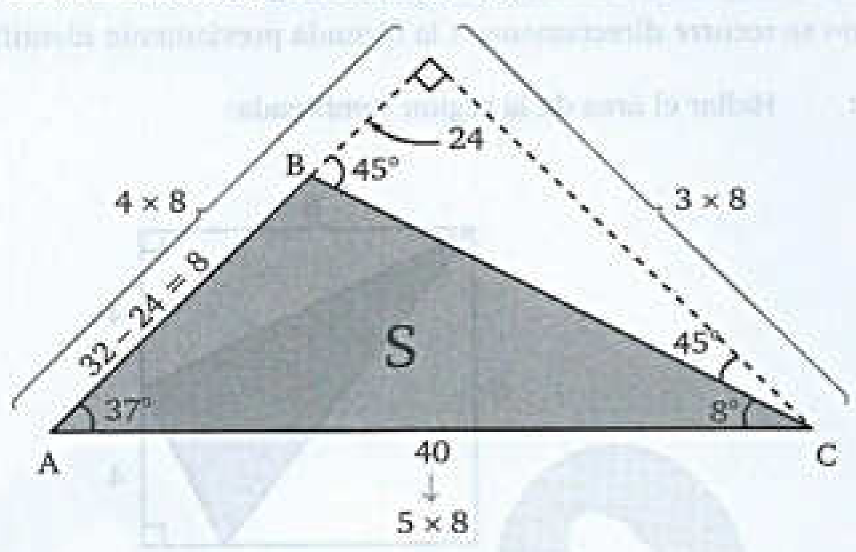
Total: 64

$\therefore$ Sombreado = 24

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada si m∠BAC = 37°; m∠BCA = 8°; AC = 40.

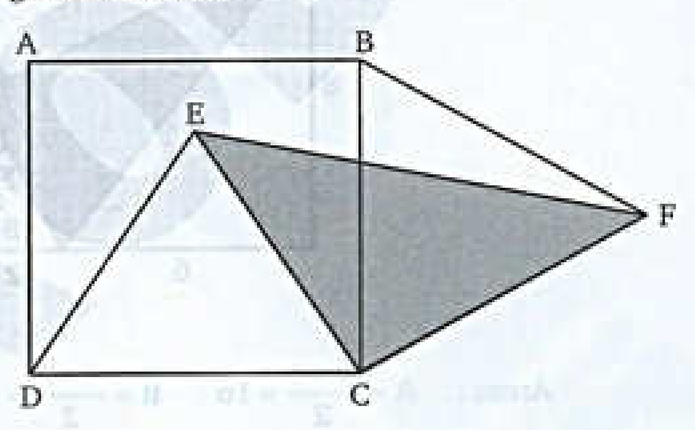


Resolución: Se observa que es un triángulo obtusángulo y además 37° + 8° = 45° es notable.

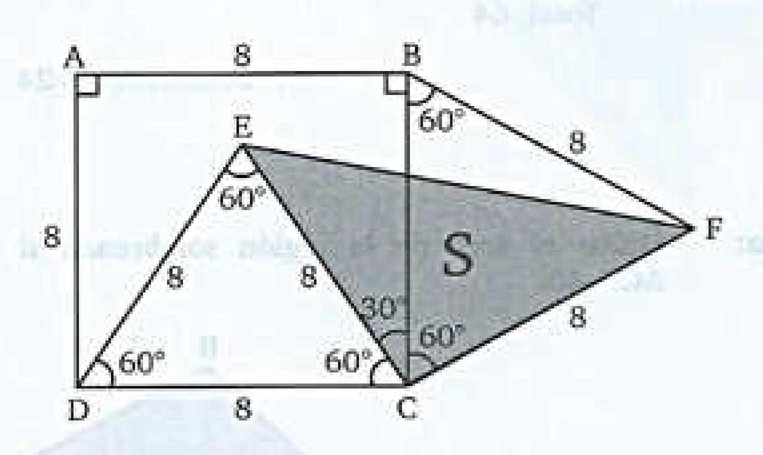


$$\therefore \quad S = \frac{8 \times 24}{2} = 96$$

Ejemplo: ABCD es un cuadrado de lado 8, DEC es un triángulo equilátero al igual que BFC. Hallar el área de a región sombreada



Resolución:



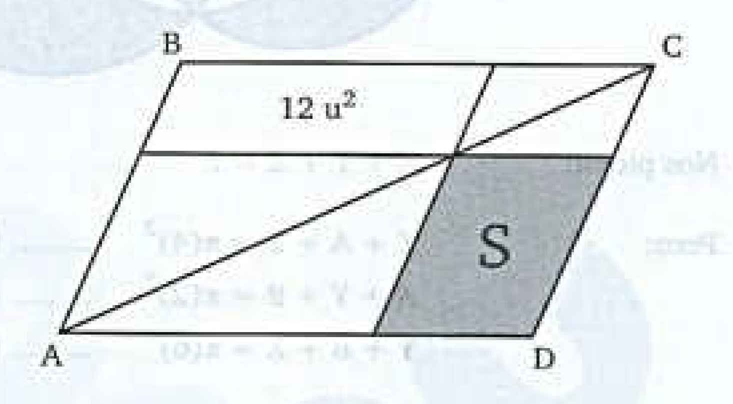
Se observa que ECF es triángulo rectángulo isósceles.

$$\therefore \quad S = \frac{8 \times 8}{2} = 32$$

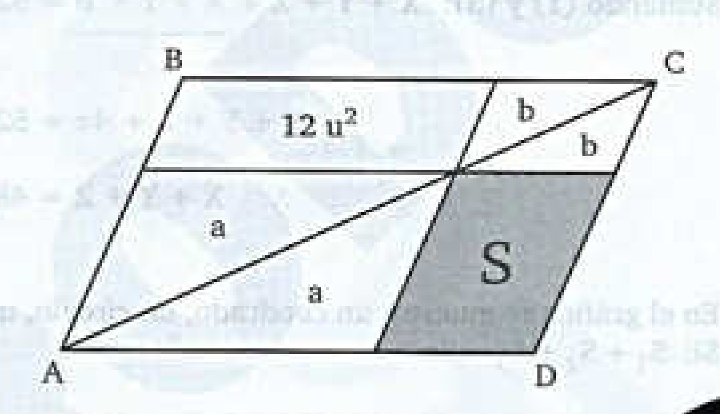
III. POR ECUACIONES

En este caso se deberán asignar variables a las regiones convenientes y luego relacionar con áreas conocidas.

Ejemplo: ABCD es un paralelogramo, si MN y PQ son paralelas a cada lado. Hallar el área de a región sombreada.



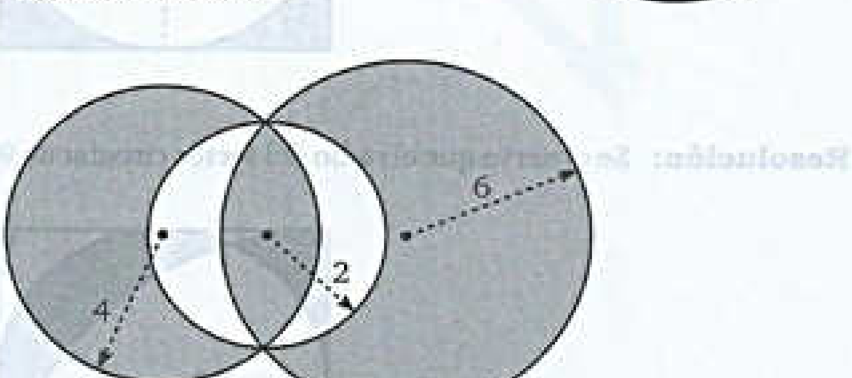
Resolución:



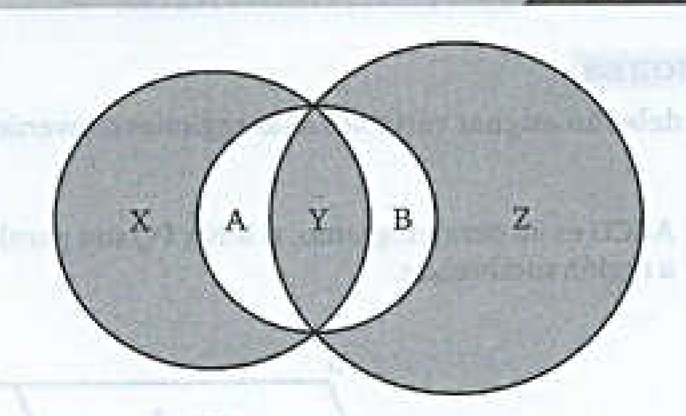
Se observa que: $\cancel{a} + 12 + \cancel{b} = \cancel{a} + S + \cancel{b}$

$\therefore \quad 12 = S$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada.



Resolución: En el gráfico se muestran 3 círculos con sus respectivos radios, por tanto se sabe sus respectivas áreas.



Nos piden: $X + Y + Z = ?$

Pero: $X + A + Y = \pi(4)^2$ .... (1)

$A + Y + B = \pi(2)^2$ .... (2)

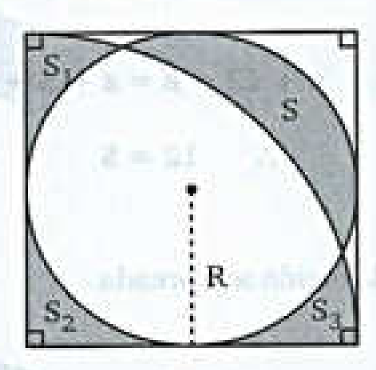
$Y + B + Z = \pi(6)^2$ .... (3)

Sumando (1) y (3): $X + Y + Z + \underbrace{A + Y + B}_{\pi(2)^2 \text{ .... (2)}} = 52\pi$

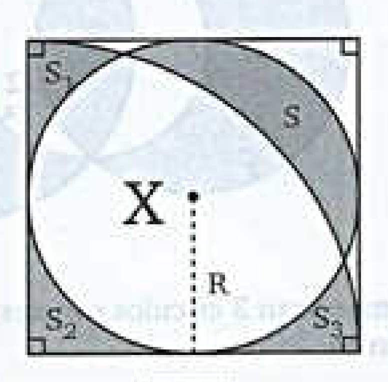
$X + Y + Z + 4\pi = 52\pi$

$\therefore \quad X + Y + Z = 48\pi$

Ejemplo: En el gráfico se muestra un cuadrado, un círculo, un cuarto de círculo. Hallar: S. Si: $S_1 + S_2 + S_3 = 8\pi$



Resolución: Se observa que el radio del sector circular de 90° es 2R.



$$S_1 + S_2 + S_3 + x = \frac{\pi(2R)^2}{4} = \pi R^2$$

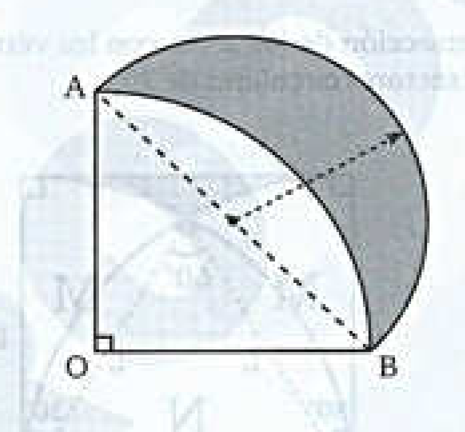
$$x + S = \pi R^2$$

Igualando ambas ecuaciones por tener el mismo valor igual a πR^2

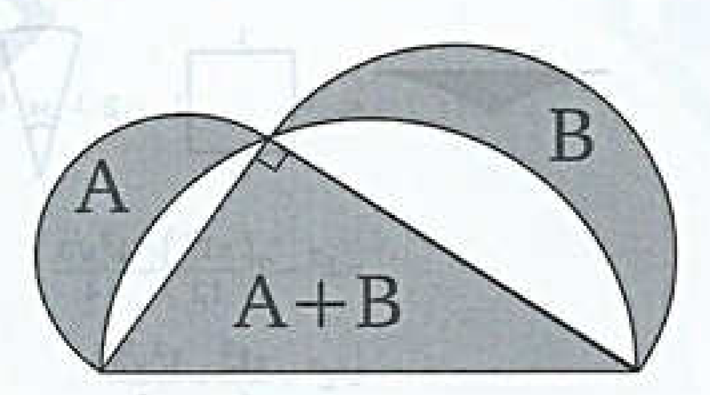
$$S + \cancel{x} = \underbrace{S_1 + S_2 + S_3} + \cancel{x}$$

$$\therefore\ S = 8\pi$$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada si AOB es una región triangular de área $16u^2$



Resolución: Recordar



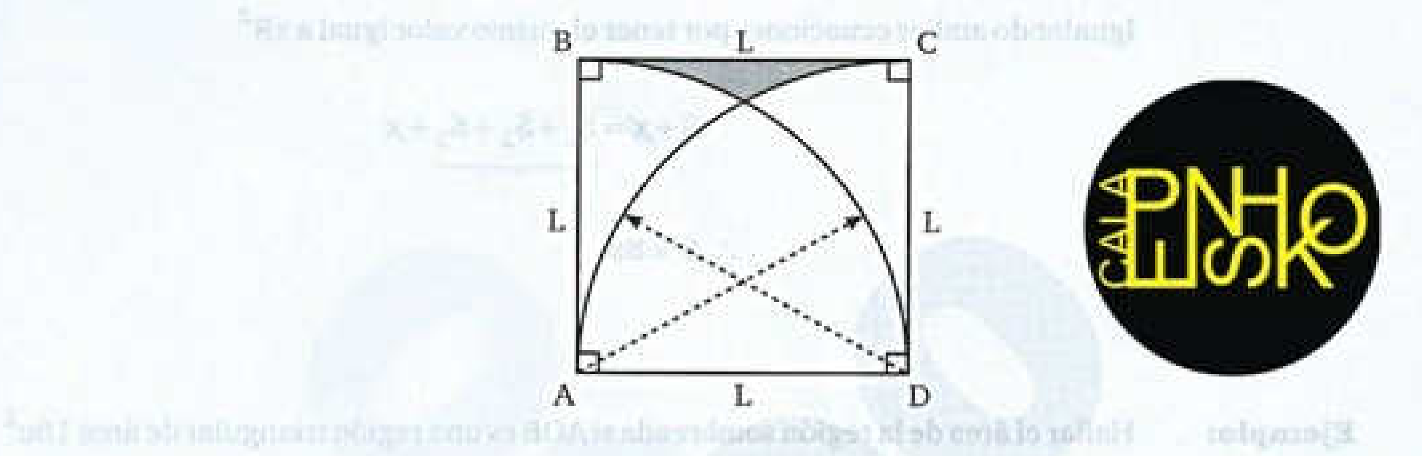
Lúnulas de Hipócrates

$$S_{Sombreada} = S_{\triangle AOB} = 16\,u^2$$

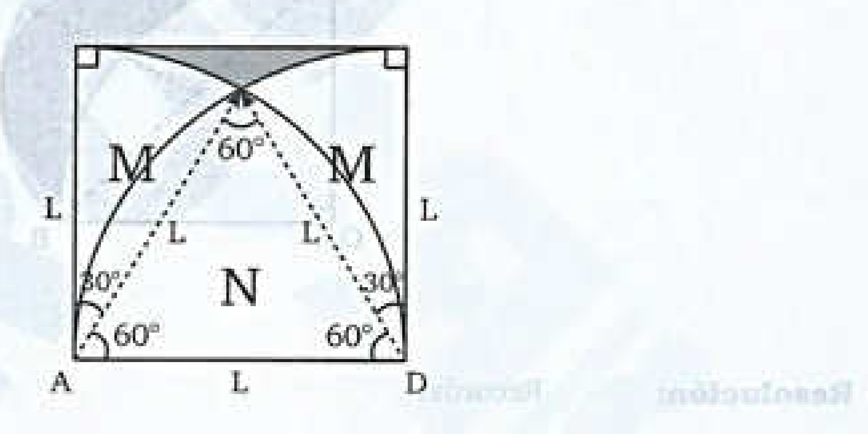
IV. POR DIFERENCIAS

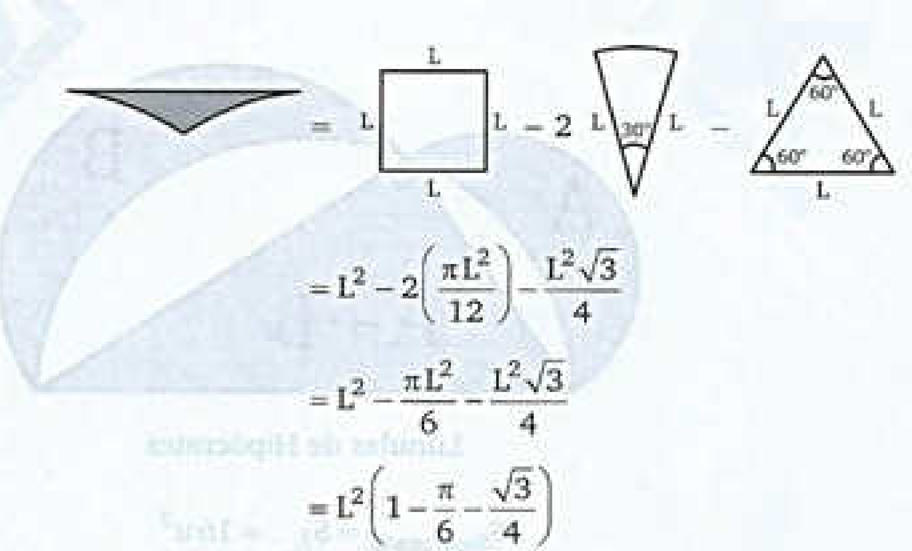
En este caso debemos ir quitando a toda la región lo que no es parte de la pregunta y al final nos quedará la región pedida.

Ejemplo: El cuadrado tiene lado L, hallar el área de la región sombreada.



Ejemplo: Al unir la intersección de los arcos con los vértices A y D se obtiene un triángulo equilátero y 2 sectores circulares de 30°



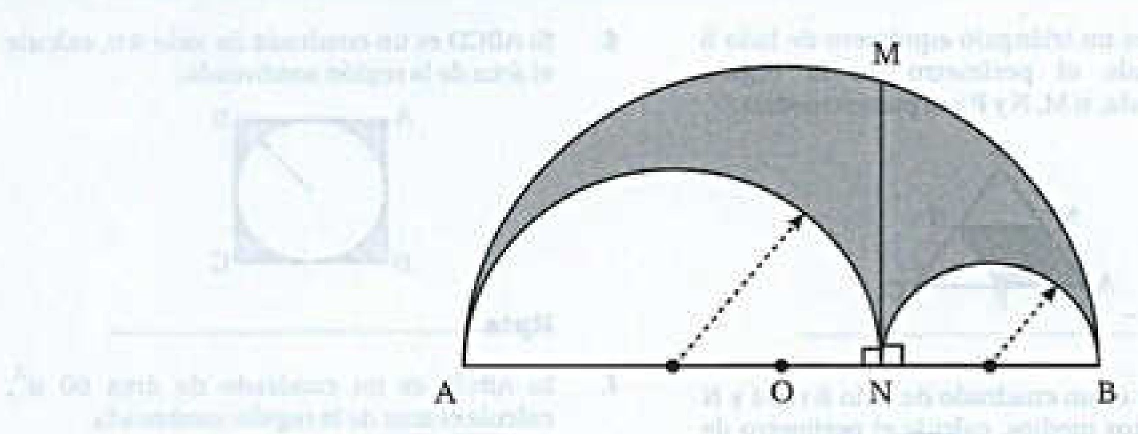


$$= L^2 - 2\left(\frac{\pi L^2}{12}\right) - \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

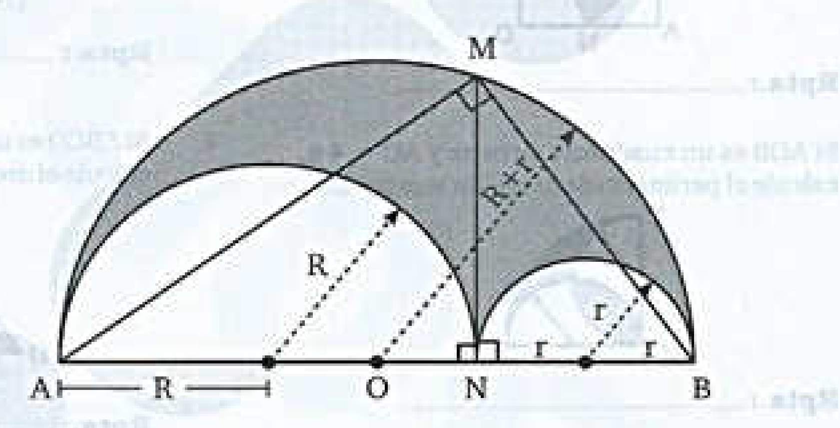
$$= L^2 - \frac{\pi L^2}{6} - \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= L^2\left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Ejemplo: Hallar el área de la región sombreada si MN = 2



Resolución: Se observan 3 semicírculos y al quitar los 2 pequeños del semicírculo mayor se obtiene la región sombreada pero para ello se necesita la relación de radios.



Por relaciones métricas en AMB:

$$MN^2 = AN \times NB$$

$$2^2 = 2R \times 2r \;\rightarrow\; 1 = Rr$$

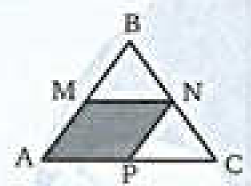
(región sombreada) = (semicírculo de radio R+r) − (semicírculo de radio R) − (semicírculo de radio r)

$$= \frac{\pi(R+r)^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi Rr}{\cancel{2}} = \pi \underbrace{Rr}_{1} = \pi$$

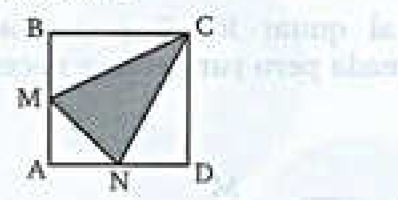
EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Si ABC es un triángulo equilátero de lado 6 u, calcule el perímetro de la región sombreada, si M, N y P son puntos medios.



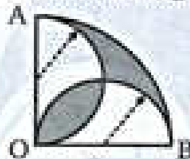
Rpta.: ....

2. Si ABCD es un cuadrado de lado 8 u, M y N son puntos medios, calcule el perímetro de la región sombreada.



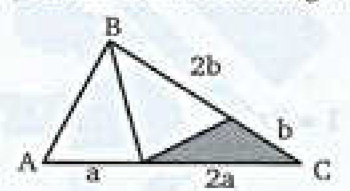
Rpta.: ....

3. Si AOB es un cuadrante circular y AO = 4 u, calcule el perímetro de la región sombreada.



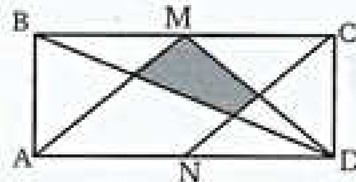
Rpta.: ....

4. En la figura, el área de la región sombreada es $6u^2$, calcule el área del triángulo ABC



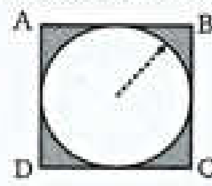
Rpta.: ....

5. En el gráfico, ABCD es un rectángulo donde M y N son puntos medios. Si AB = 4m y AD = 10m, calcule el área de la región sombreada.



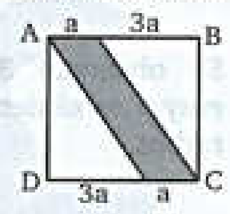
Rpta.: ....

6. Si ABCD es un cuadrado de lado 4 u, calcule el área de la región sombreada.



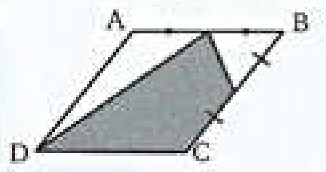
Rpta.: ....

7. Si ABCD es un cuadrado de área 60 u^2, calcule el área de la región sombreada.



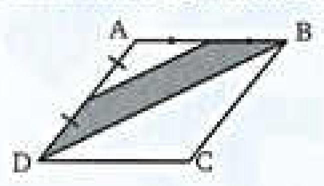
Rpta.: ....

8. Si ABCD es un paralelogramo de área 120 u^2, calcule el área de la región sombreada.



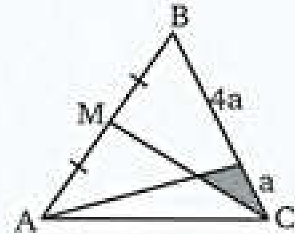
Rpta.: ....

9. Si ABCD es un paralelogramo de área 40 u^2, calcule el área de la región sombreada.



Rpta.: ....

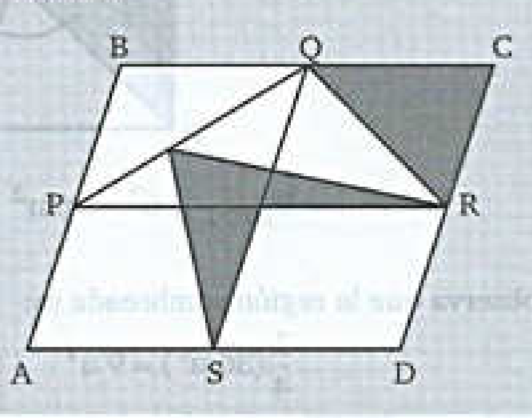
10. Halle el área de la región sombreada, si el triángulo ABC tiene un área de 90 m^2.



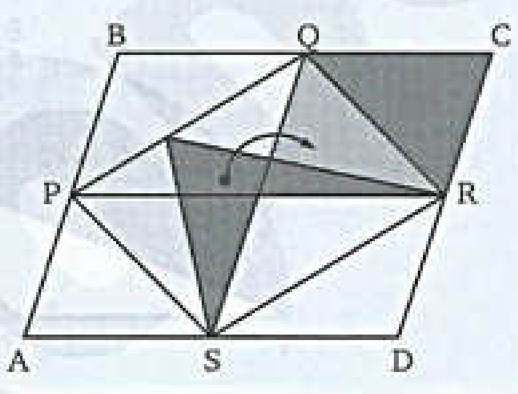
Rpta.: ....

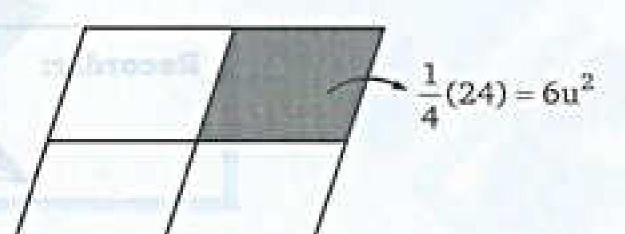
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 El área del paralelogramo ABCD es $24\ u^2$ P, Q, R y S son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada.

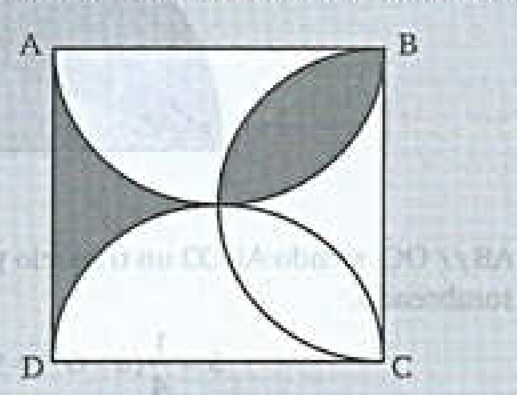


Resolución: Uniendo PS y SR se obtiene el paralelogramo PQRS, en el cual se halla un trapecio.

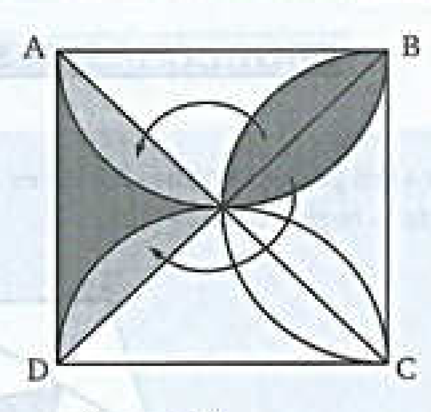




PROBLEMA 2 Hallar el área de la región sombreada si el cuadrado tiene lado 6u.



Resolución:

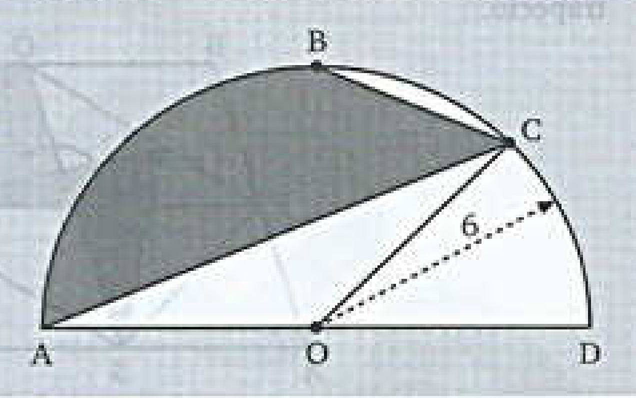


$$S_{TOTAL} = 6^2 = 36\ u^2$$

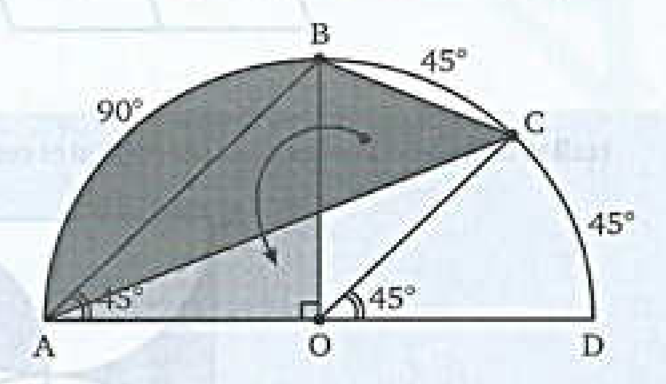
Se observa que la región sombreada es:

$$\frac{1}{4}(36\ u^2) = 9\ u^2$$

PROBLEMA 3 El radio es 6 u; AB = 90°; BC = 45°. Hallar el área de la región sombreada.



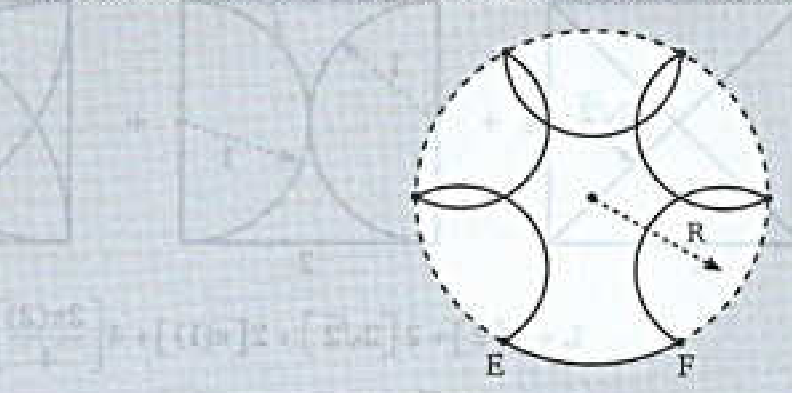
Resolución:



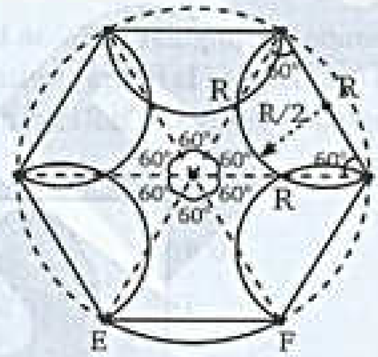
AB // OC; siendo ABCO un trapecio y trasladando se obtiene un cuarto de círculo sombreado.

$$S = \frac{1}{4}(\pi \times 6^2) = 9\pi\ u^2$$

PROBLEMA 4 Un alambre es doblado como se indica en la figura si EF = 60° y todos los demás arcos son semicircunferencias de igual radio. Hallar la longitud de dicho alambre.



Resolución: Al unir los puntos mostrados se obtiene un hexágono regular cuyo lado es diámetro de cada semicircunferencia, además el lado del hexágono es igual que el radio R.



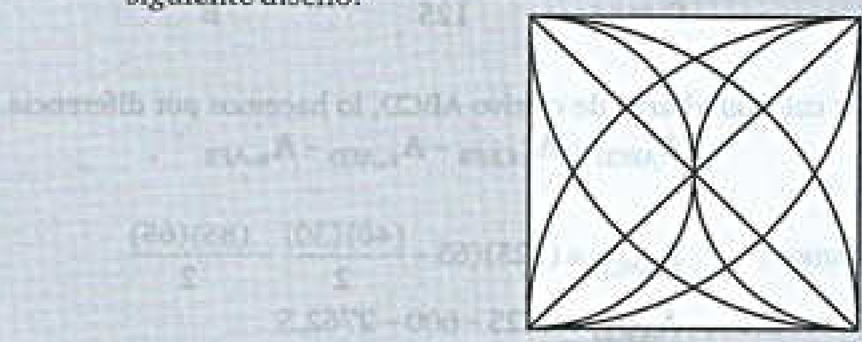
Longitud de los 5 arcos que son semicircunferencias y cuyo radio es R.

$$5\left[\pi\left(\frac{R}{2}\right)\right]=\frac{5\pi R}{2}$$

$$\text{Long. } \widehat{EF}=\frac{2\pi R}{6}=\frac{\pi R}{3}$$

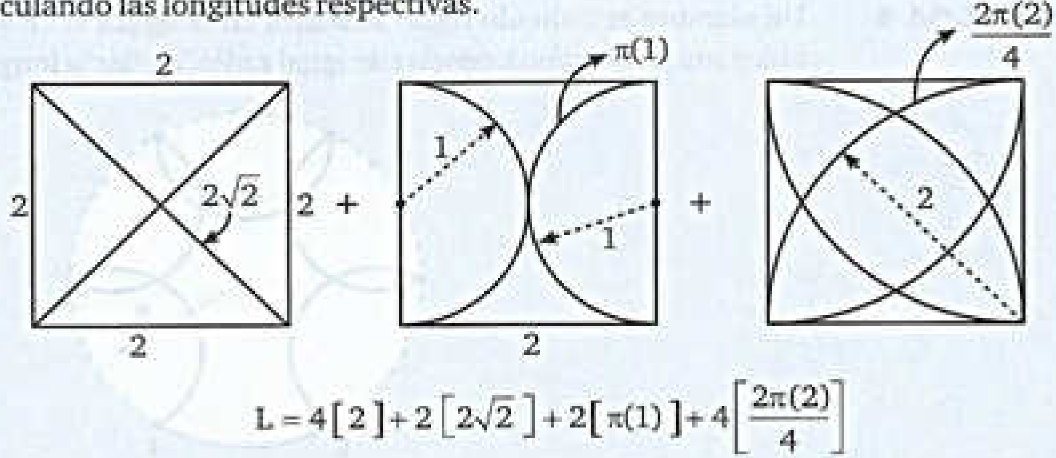
$$\therefore \quad \text{Long. del alambre: } \frac{5\pi R}{2}+\frac{\pi R}{3}=\frac{17\pi R}{6}$$

PROBLEMA 5 Un soldador metálico construye una ventana cuadrada de 2m por lado con el siguiente diseño:



¿Cuál es la longitud aproximada de fierro que necesita?

Resolución: Calculando las longitudes respectivas.

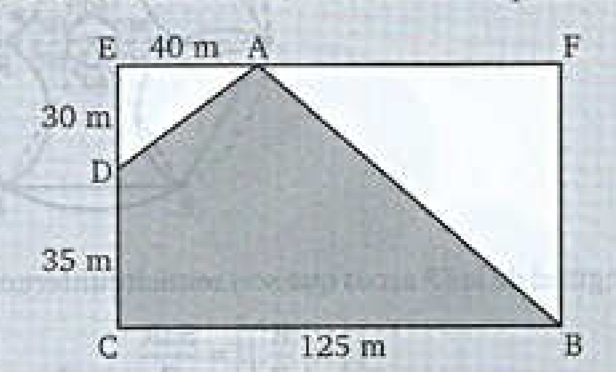


$$L = 4\left[2\right] + 2\left[2\sqrt{2}\right] + 2\left[\pi(1)\right] + 4\left[\frac{2\pi(2)}{4}\right]$$

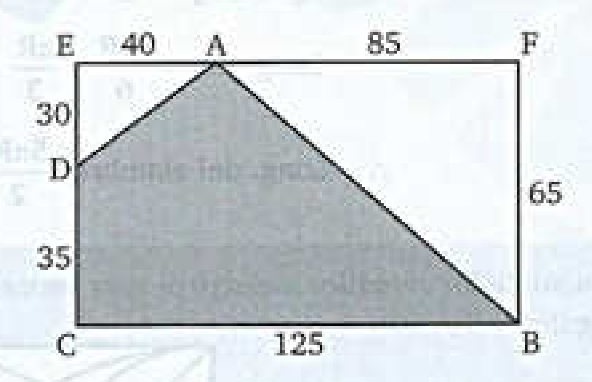
$$L = 8 + 4\sqrt{2} + 2\pi + 4\pi$$

$$\therefore \quad L = 8 + 4\sqrt{2}$$

PROBLEMA 6 De un campo rectangular BCEF se han suprimido dos regiones triangulares, AED y AFB (tal como indica la figura), resultando un cuadrilátero ABCD que se va a utilizar como campo de cultivo. ¿Cuál es el área de dicho campo de cultivo?



Resolución:



Para poder calcular el área de cultivo ABCD, lo hacemos por diferencia.

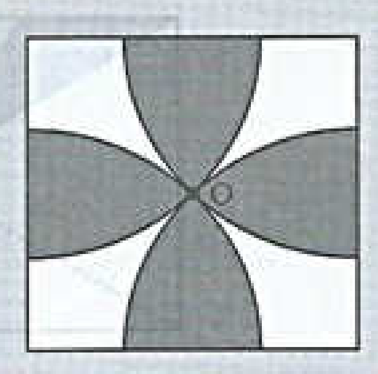
$$\mathbf{A}_{ABCD} = \mathbf{A}_{\square CEFB} - \mathbf{A}_{\triangle AED} - \mathbf{A}_{\triangle AFB}$$

Reemplazamos : $\mathbf{A}_{ABCD} = (125)(65 - \frac{(40)(30)}{2} - \frac{(85)(65)}{2}$

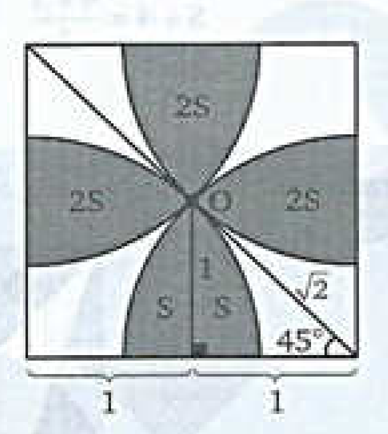
$$\mathbf{A}_{ABCD} = 8125 - 600 - 2762{,}5$$

$$\therefore \quad \mathbf{A}_{ABCD} = 4762{,}5\ m^2$$

PROBLEMA 7 Hallar el área de la región sombreada si el cuadrado tiene lado 2 u y centro "O".



Resolución:



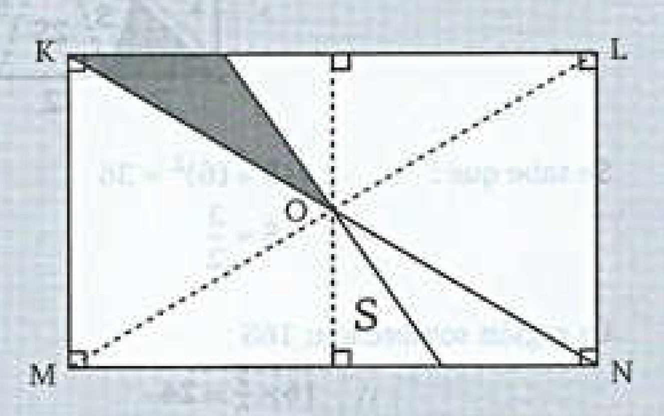
S = (sector circular de radio $\sqrt{2}$ y ángulo 45°) − (triángulo rectángulo de catetos 1 y 1)

$$S=\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{8}-\frac{1\times 1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

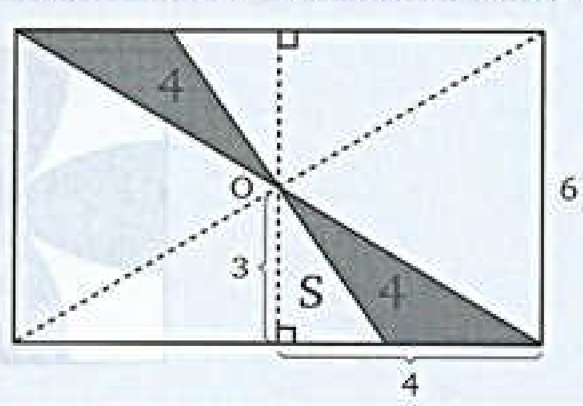
El área de la región sombreada es 8S.

$$\therefore \quad 8\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]=2\pi-4$$

PROBLEMA 8 En el rectángulo mostrado KL = 8; LN = 6 y el área de la región sombreada es $4u^2$. Hallar: S



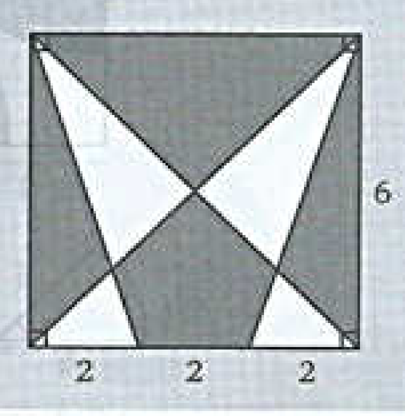
Resolución: Como KO = ON, los triángulos obtusángulos pequeños son congruentes.



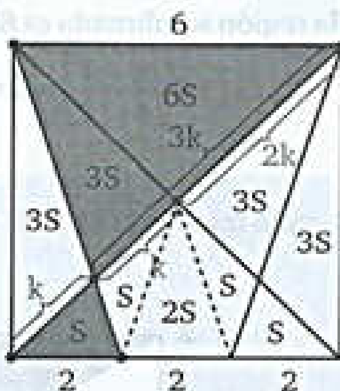
$$S + 4 = \frac{4 \times 3}{2} \rightarrow S + 4 = 6$$

$$\therefore \quad S = 2$$

PROBLEMA 9 El cuadrado tiene lado 6u, hallar el área de la región sombreada.



Resolución: Vemos en el gráfico triángulos semejantes en relación de 1 a 3. Por tanto por relación de áreas se tiene:



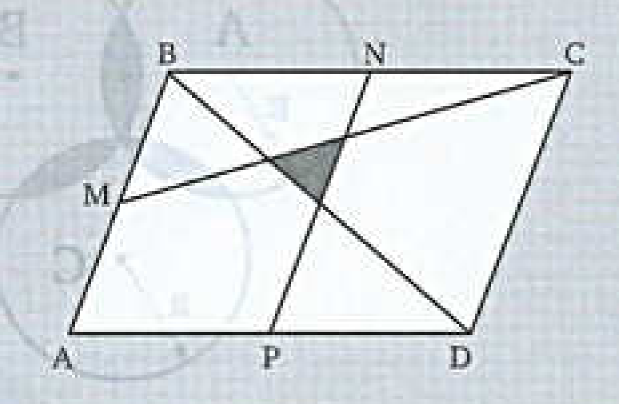
Se sabe que : $24S = (6)^2 = 36$

$$S = \frac{3}{2}$$

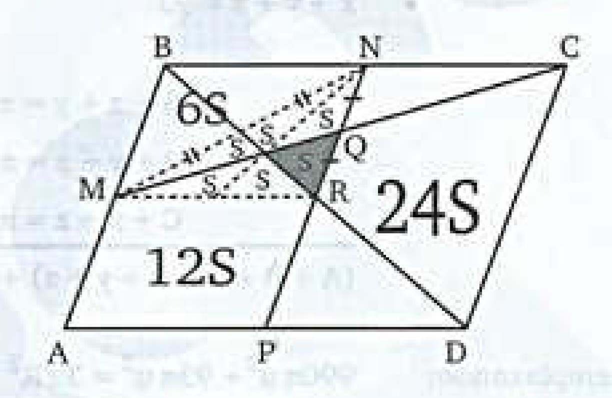
La región sombreada: 16S

$$\therefore \quad 16 \times \frac{3}{2} = 24$$

PROBLEMA 10 El área del paralelogramo ABCD es $960\ u^2$. Hallar el área de la región sombreada, siendo M, N y P puntos medios.



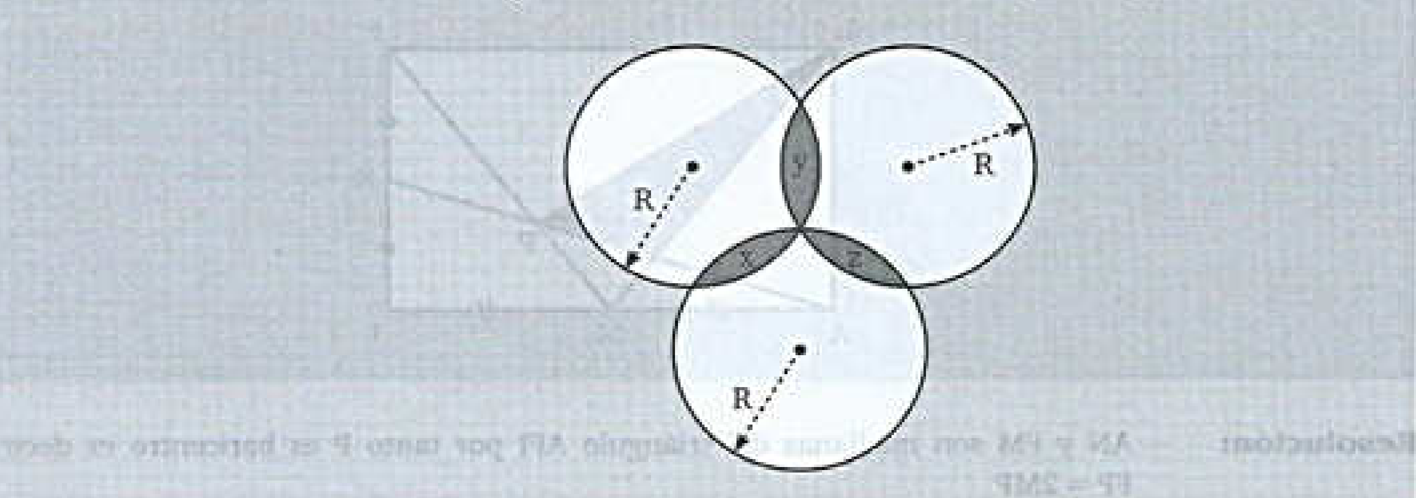
Resolución: $NQ = \dfrac{MB}{2}$; además $NR = MB$; $NQ = QR$ por lo tanto, en MBNR se observa medianas.



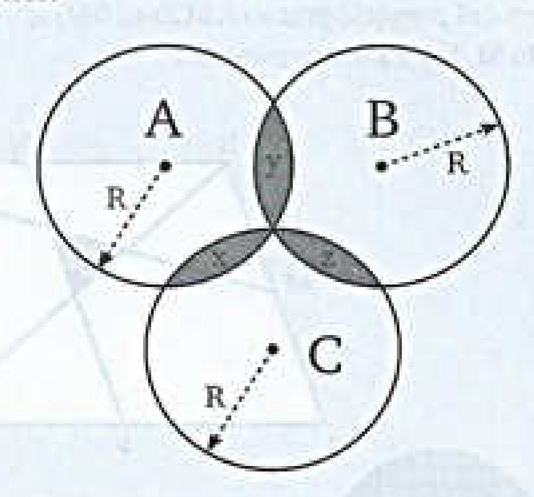
$$48S = 960\ u^2$$

$$\therefore \quad S = 20\ u^2$$

PROBLEMA 11 El área de las 6 regiones mostradas es $990\pi\ u^2$. Hallar R, si: $x + y + z = 93\pi\ u^2$



Resolución: Formando ecuaciones:



Se sabe:

- $\underbrace{A+B+C+x+y+z}_{6\text{ regiones}}=990\pi\,u^2$

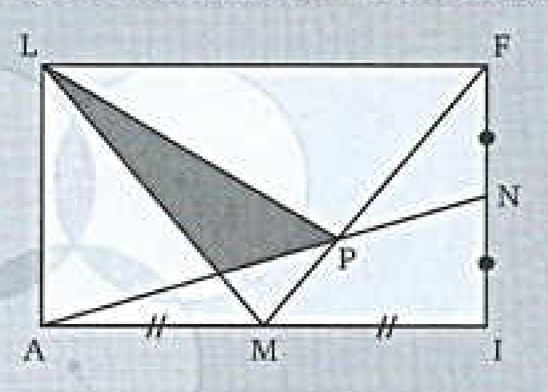
- $x+y+z=93$

$$\begin{array}{r} A+x+y=\pi R^2 \quad + \\ B+y+z=\pi R^2 \\ C+x+z=\pi R^2 \\ \hline (A+B+C+x+y+z)+(x+y+z)=3\pi R^2 \end{array}$$

Reemplazando: $990\pi\,u^2+93\pi\,u^2=3\pi R^2$

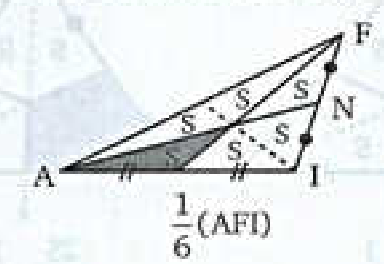
$$1083\not\pi u^2=3\not\pi R^2$$
$$361=R^2$$
$$19=R$$

PROBLEMA 12 Hallar el área de la región sombreada, si el área del rectángulo ALFI es $60\,u^2$.

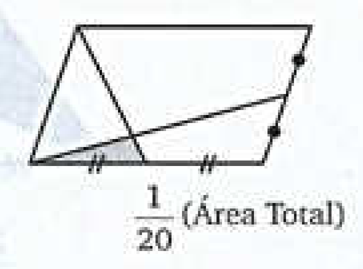


Resolución: AN y FM son medianas del triángulo AFI por tanto P es baricentro es decir FP = 2MP

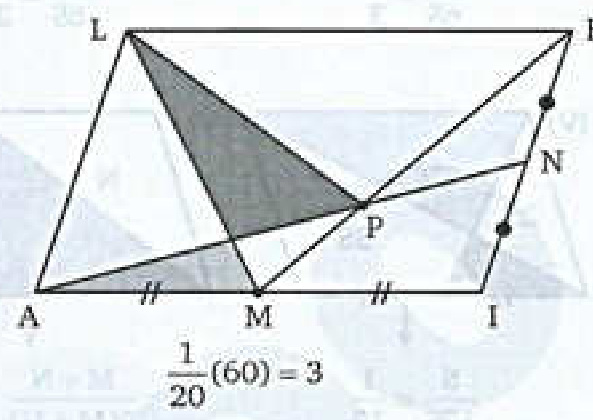
Además se sabe que LMF es mitad de ALFI y AMP es 1/6 del triángulo AFI.



$\frac{1}{6}(\text{AFI})$



$\frac{1}{20}(\text{Área Total})$



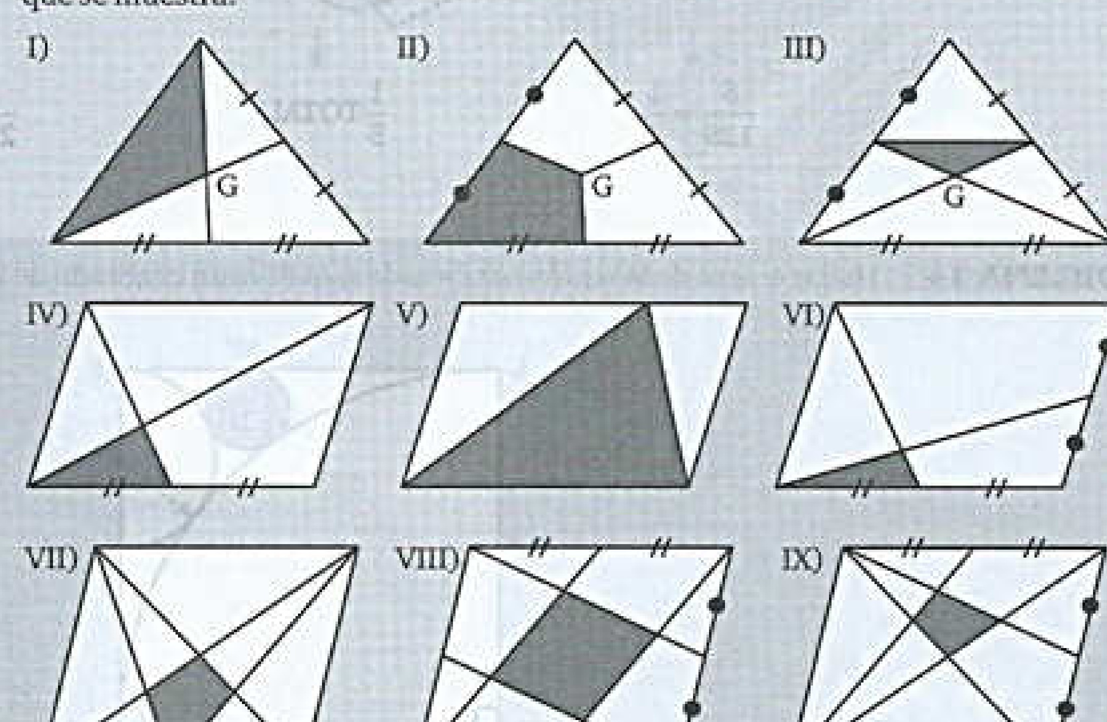
$$\frac{1}{20}(60) = 3$$

$$S_{AMP} = \frac{1}{6}[30] = 5$$

$$\Rightarrow \quad S + 2 + 2(S + 2) = \frac{1}{2}[60] \quad \rightarrow \quad 3S + 6 = 30$$

$$\therefore \quad S = 8$$

PROBLEMA 13 Calcular la región sombreada respecto del total en cada triángulo y paralelogramo que se muestra.



A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

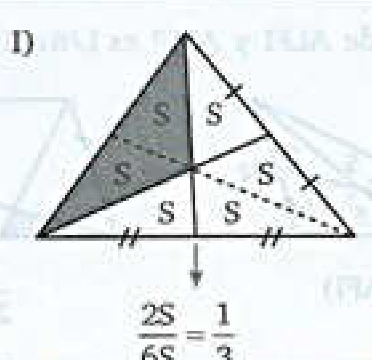
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

Resolución:

I)



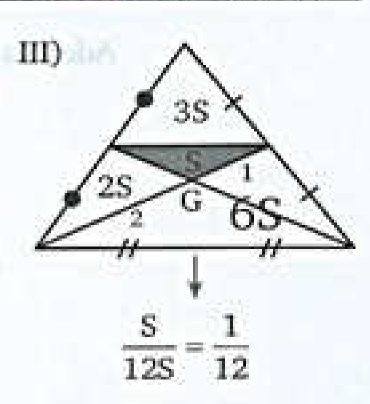
$$\frac{2S}{6S}=\frac{1}{3}$$

II)

S
S
S
S
S
S

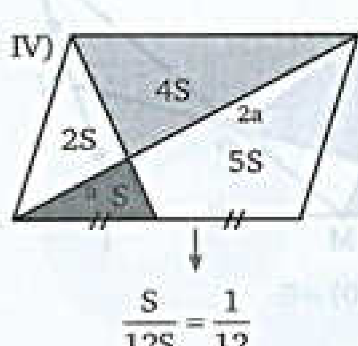
$$\frac{2S}{6S}=\frac{1}{3}$$

III)



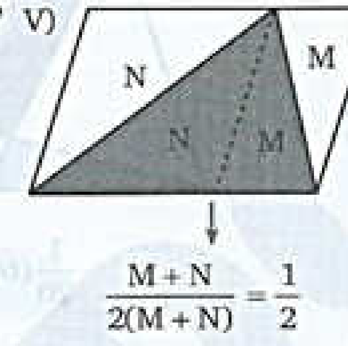
$$\frac{S}{12S}=\frac{1}{12}$$

IV)



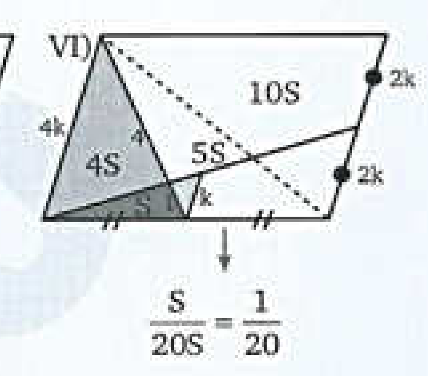
$$\frac{S}{12S}=\frac{1}{12}$$

V)



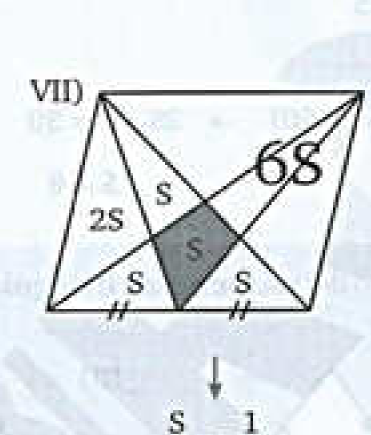
$$\frac{M+N}{2(M+N)}=\frac{1}{2}$$

VI)



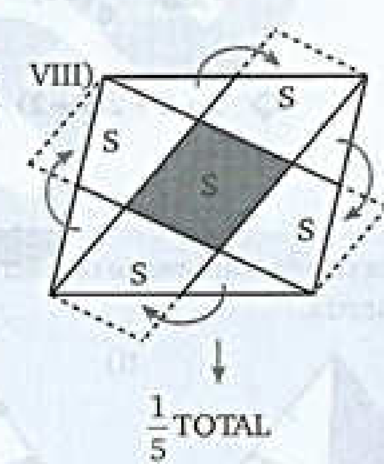
$$\frac{S}{20S}=\frac{1}{20}$$

VII)



$$\frac{S}{12S}=\frac{1}{2}$$

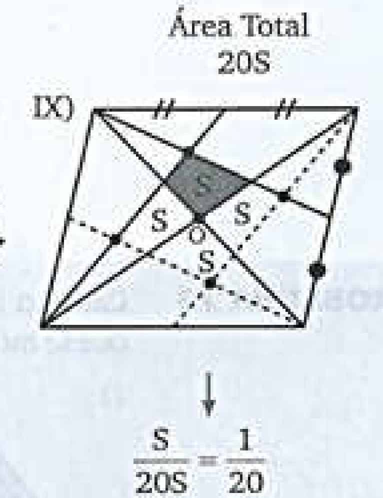
VIII)



$$\frac{1}{5}\text{TOTAL}$$

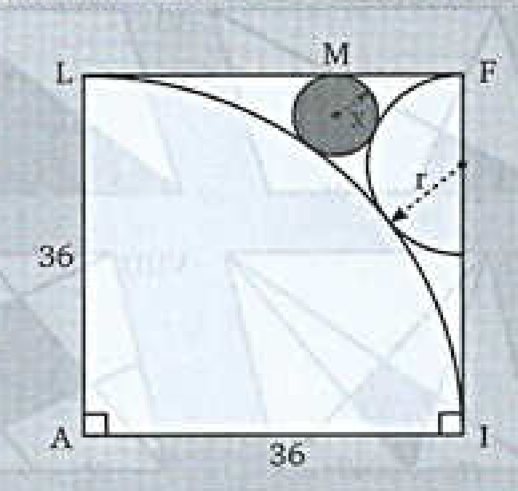
Área Total
20S

IX)



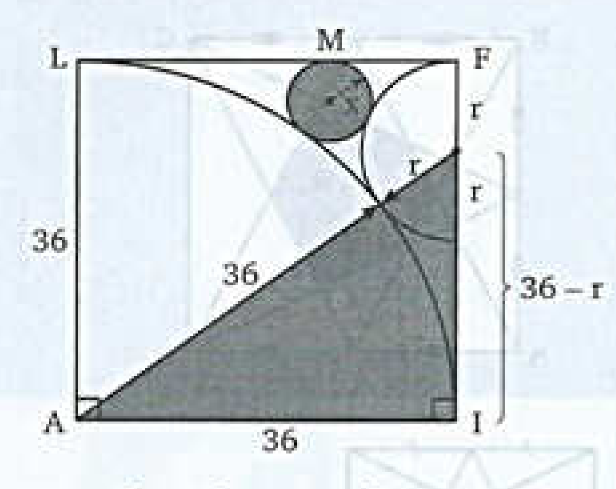
$$\frac{S}{20S}=\frac{1}{20}$$

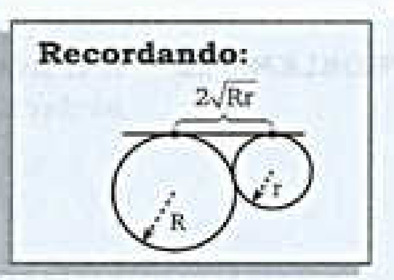
PROBLEMA 14 Hallar el área de la región sombreada si ALFI es un cuadrado de lado 36.



Resolución: LM + MF = LF

Pero se necesita el valor del radio mediano.





$$\underbrace{LM}+\underbrace{MF}=\underbrace{LF}$$

$$2\sqrt{36x}+2\sqrt{9x}=36$$

$$12\sqrt{x}+6\sqrt{x}=36$$

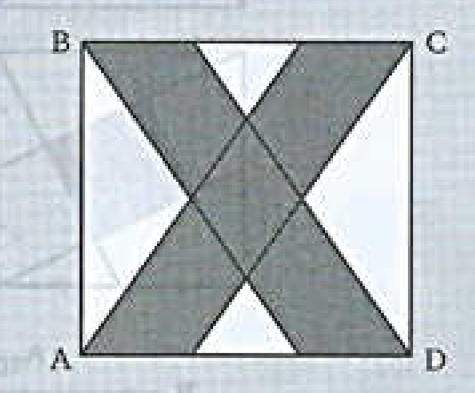
$$18\sqrt{x}=36$$

$$\sqrt{x}=2 \rightarrow x=4$$

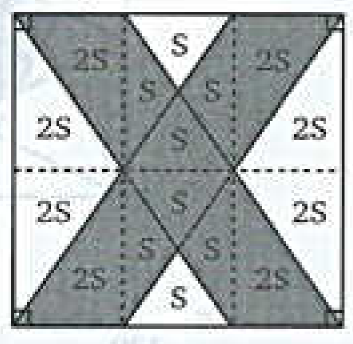
$$(36+r)^2=36^2+(36-r)^2 \rightarrow r=9$$

$$\therefore \; S_{sombr}: \; \pi x^2=\pi(4)^2=16\pi$$

PROBLEMA 15 Hallar el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado de lado 6u.



Resolución: Dividiendo la gráfica en partes ya conocidas:



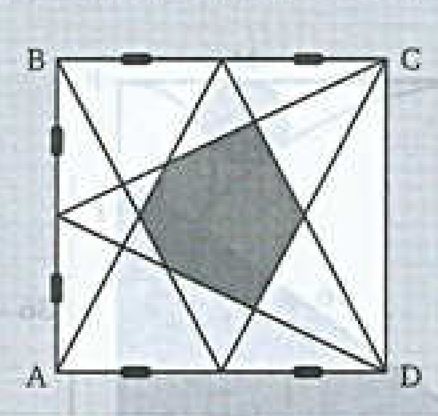
$$24S=6^2$$

$$24S=36$$

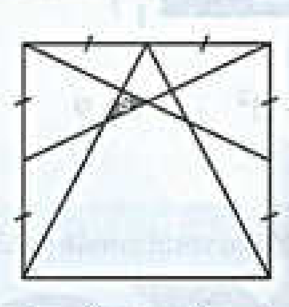
$$2S=3 \rightarrow S=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \; S_{sombr}: \; 14S=14\times\frac{3}{2}=21$$

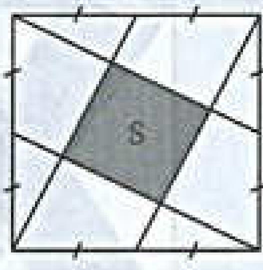
PROBLEMA 16 Si el área de la región cuadrangular ABCD es 120 m^2, calcule el área de la región sombreada.



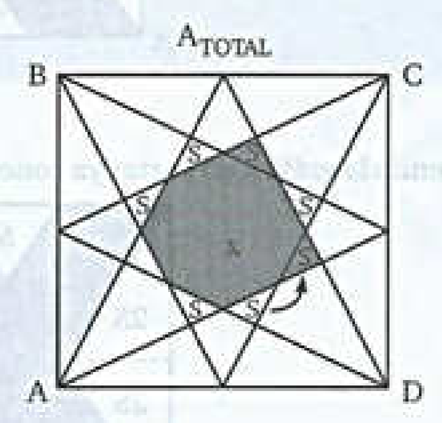
Resolución:



$S = \frac{1}{120} A_{TOTAL}$



$S = \frac{1}{5} A_{TOTAL}$



Tenemos : $S = \frac{1}{120} \times 120$

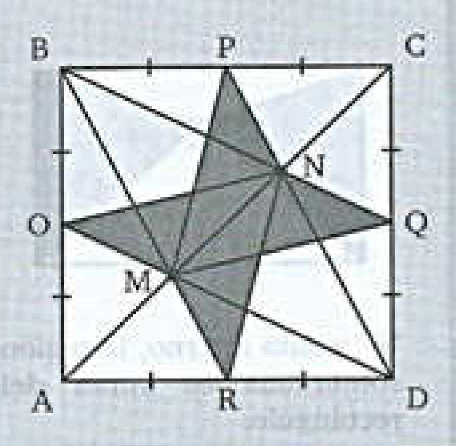
$S = 1$

Luego : $4S + x = \frac{1}{5} \times 120$

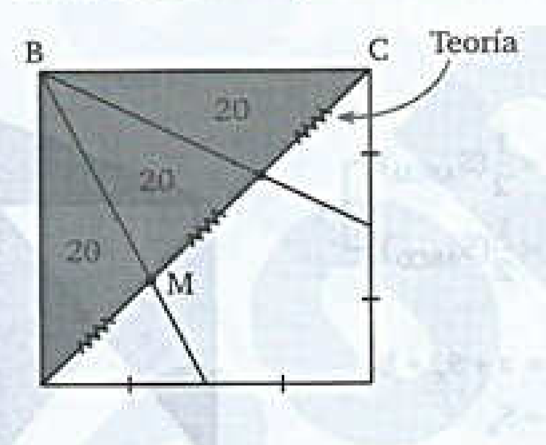
$x = 20$

$\therefore \quad A_{reg.somb.} = 20 + 2 = 22$

PROBLEMA 17 El área del cuadrado ABCD es $120\ u^2$. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución: En MBC se observa que vale $40\ u^2$.

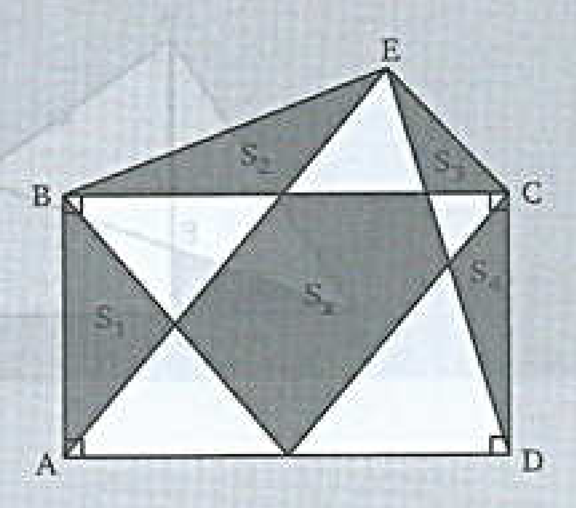


En ΔMBC: $20S = 40$

$S = 2$

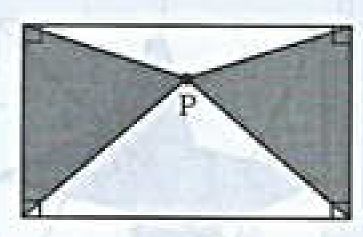
$\therefore\ S_{sombr}:\ 16S = 16(2) = 32\ u^2$

PROBLEMA 18 ABCD es un rectángulo. Hallar S_x si: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 6\ u^2$

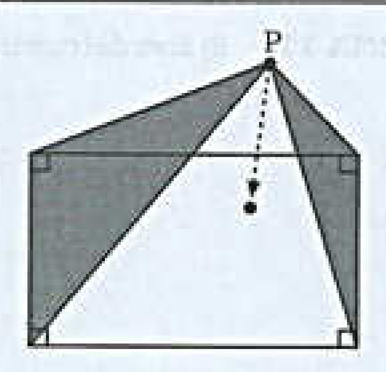


Resolución:

Se sabe:

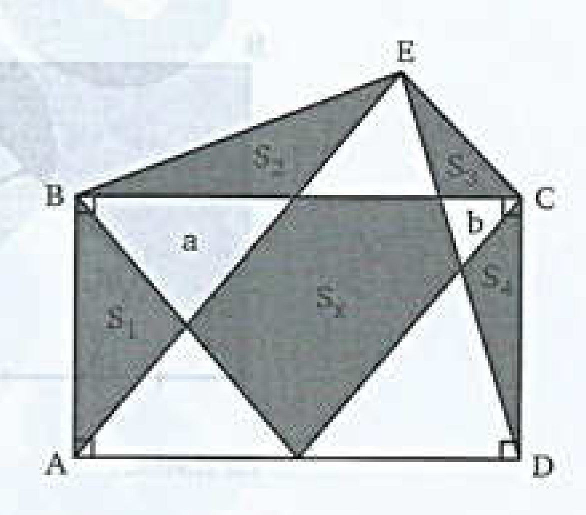


"P" punto interno, la región sombreada es mitad del rectángulo.



"P" punto externo, se cumple la misma relación, la región sombreada es mitad del rectángulo.

$$\left.\begin{aligned} S_1 + a + S_2 + S_3 + b + S_4 &= \frac{1}{2}(S_{ABCD}) \\ a + S_x + b &= \frac{1}{2}(S_{ABCD}) \end{aligned}\right] =$$

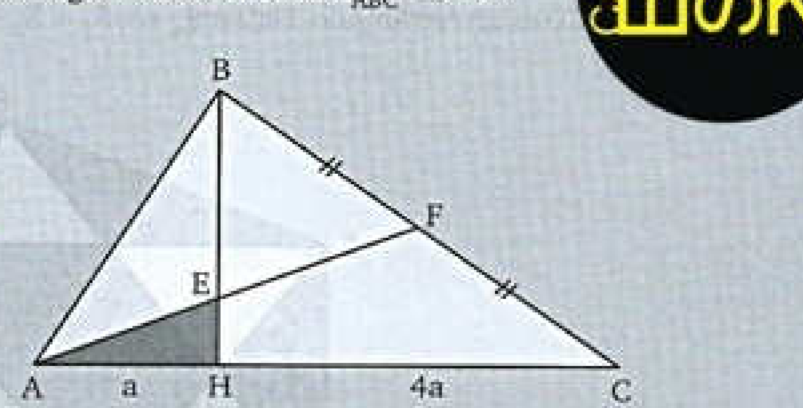


$$S_1 + a + S_2 + S_3 + b + S_4 = a + S_x + b$$

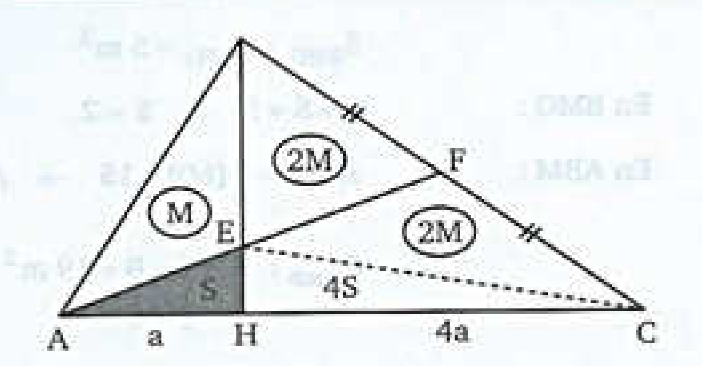
$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_x$$

$$\therefore \quad 6u^2 = S_x$$

PROBLEMA 19 Hallar el área de la región sombreada si: $S_{ABC} = 90u^2$.



Resolución:



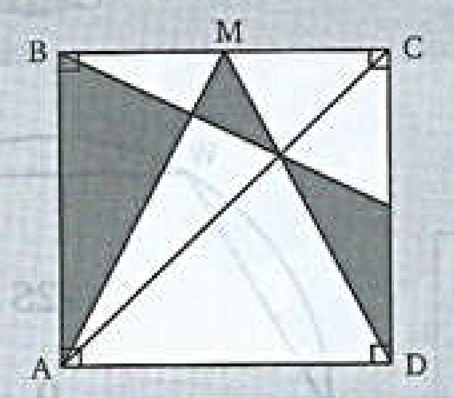
- La región HBC debe ser cuádruplo de ABH, repartiendo 4M entre 2 regiones iguales.
- ABF y AFC son iguales por ser BF = FC, es decir cada región vale 45 u^2.

$$3M = 45 \rightarrow M = 15$$

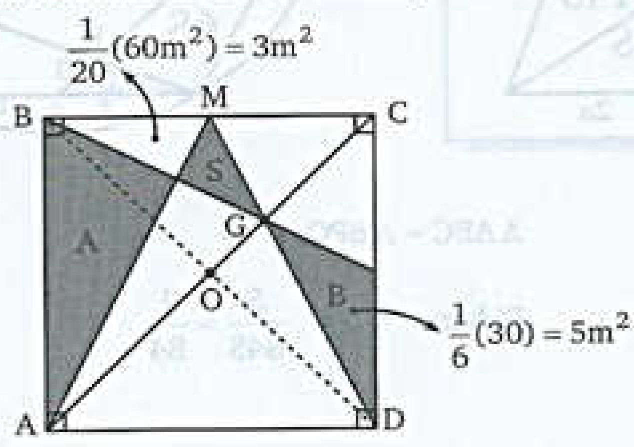
$$\Rightarrow 5S + 2M = 45$$
$$5S + 30 = 45$$

$$\therefore \quad S = 3$$

PROBLEMA 20 El cuadrado ABCD tiene área 60 m^2. Si M es punto medio hallar el área de la región sombreada.



Resolución: Al trazar BD observamos que en el triángulo BCD hay 2 medianas (DM y CO) que determinan el baricentro en consecuencia la tercera (BP) está pasando por el baricentro y será también mediana, de ello se deduce que B = 1/6(BCD) = 5



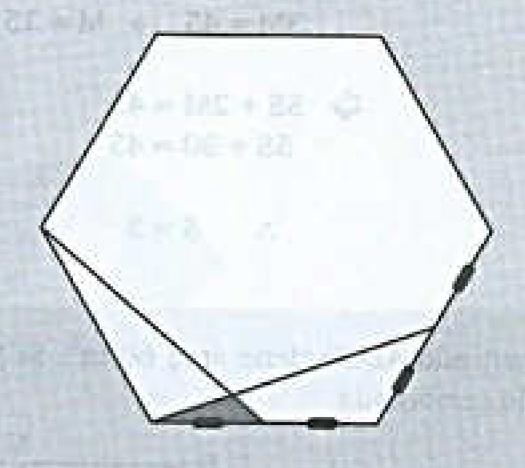
$$S_{BMG} = S_{GPD} = 5\ m^2$$

En BMG : $3 + S = 5 \rightarrow S = 2$

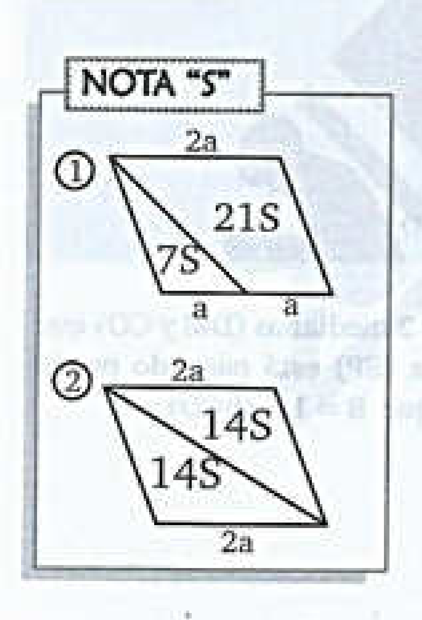
En ABM : $A + 3 = \frac{1}{4}[60] = 15 \rightarrow A = 12$

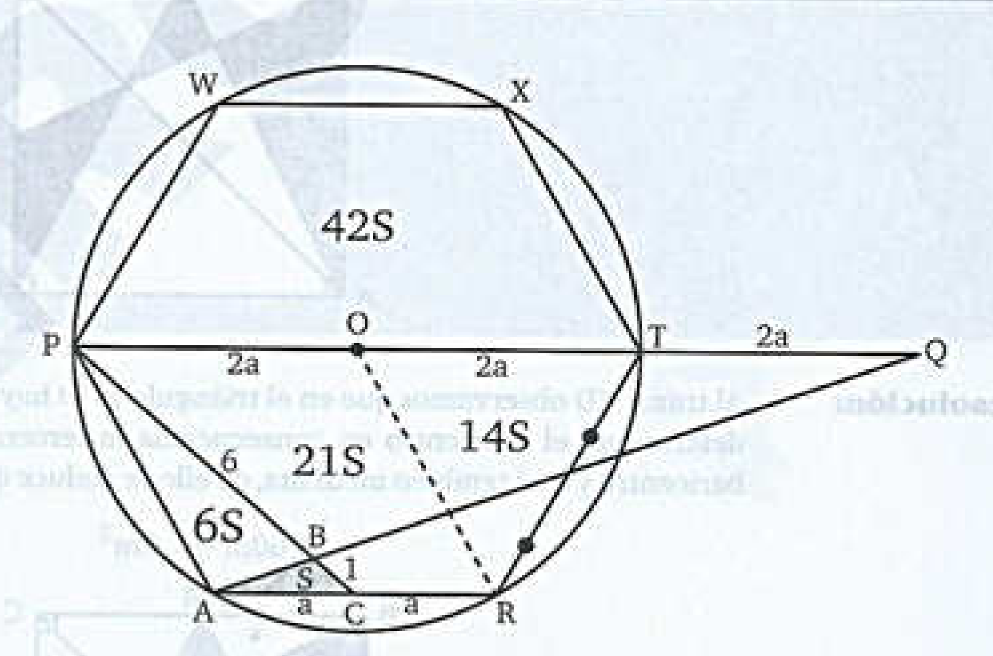
$\therefore\ S_{somb} : \underset{12}{A} + \underset{2}{S} + \underset{5}{B} = 19\ m^2$

PROBLEMA 21 Determine qué fracción del área total de la región limitada por el hexágono regular de la figura, representa el área de la región sombreada:



Resolución:

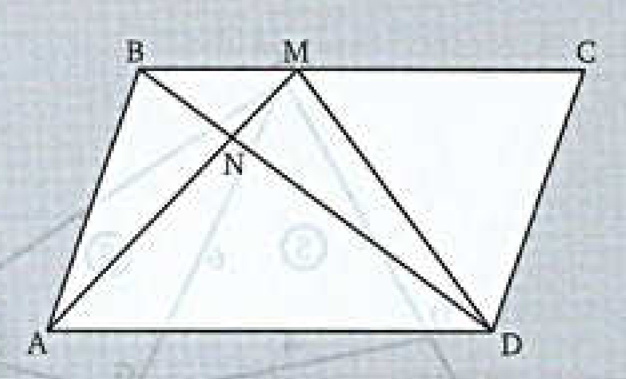




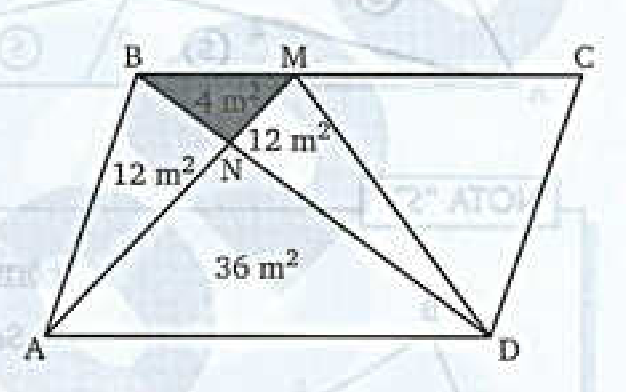
$\Delta ABC \sim \Delta BPQ (1:6)$

Piden: $\frac{S}{84S} = \frac{1}{84}$

PROBLEMA 22 En la figura, el paralelogramo ABCD representa un terreno destinado para área verde. El área de las regiones triangulares AMD y ABN son 48 m^2 y 12 m^2 respectivamente. Si para abonar 1 m^2 del terreno se requiere 1,5 kg de abono, ¿cuántos kilogramos de abono se necesitará para abonar el terreno correspondiente al cuadrilátero NMCD?



Resolución:



Sea x la cantidad de kilogramos de abono que se necesitará para abonar el terreno NMCD.

Dato: $A_{ABN} = 12\ m^2$

$A_{AMD} = 48\ m^2$

En ABMD se sabe que: $A_{ABN} = A_{MDN} = 12\ m^2$

$\rightarrow\ A_{AND} = 36\ m^2$

Además: $A_{BMN} \times 36 = 12 \times 12$

$A_{BMN} = 4\ m^2$

Luego, en ABCD: $A_{MCD} = A_{ABD} - A_{BMD} = 48 - 16$

$A_{MCD} = 32\ m^2$

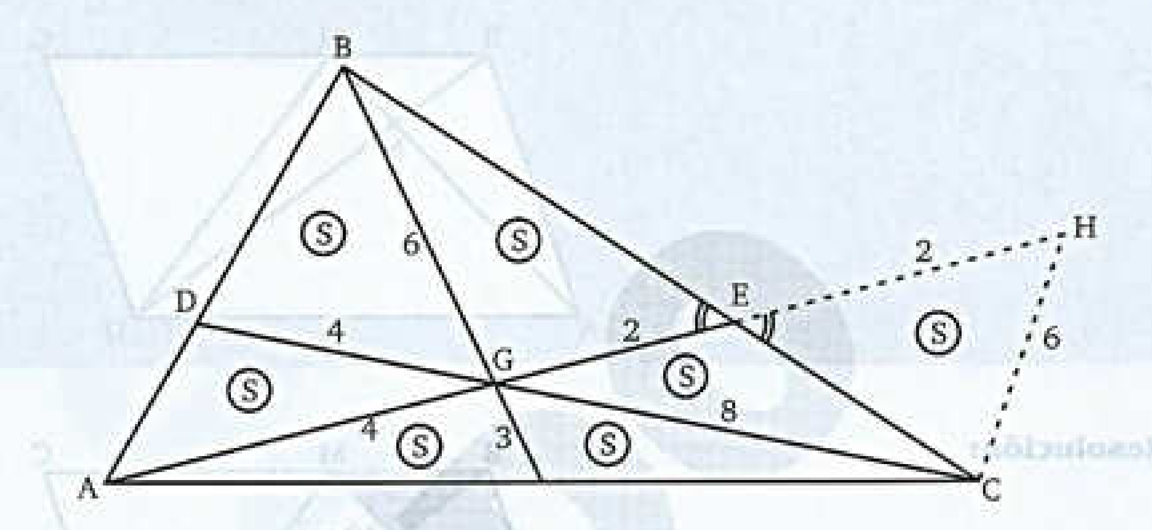
Como 1 m^2 requiere 1,5 kg de abono; 44 m^2 requiere x.

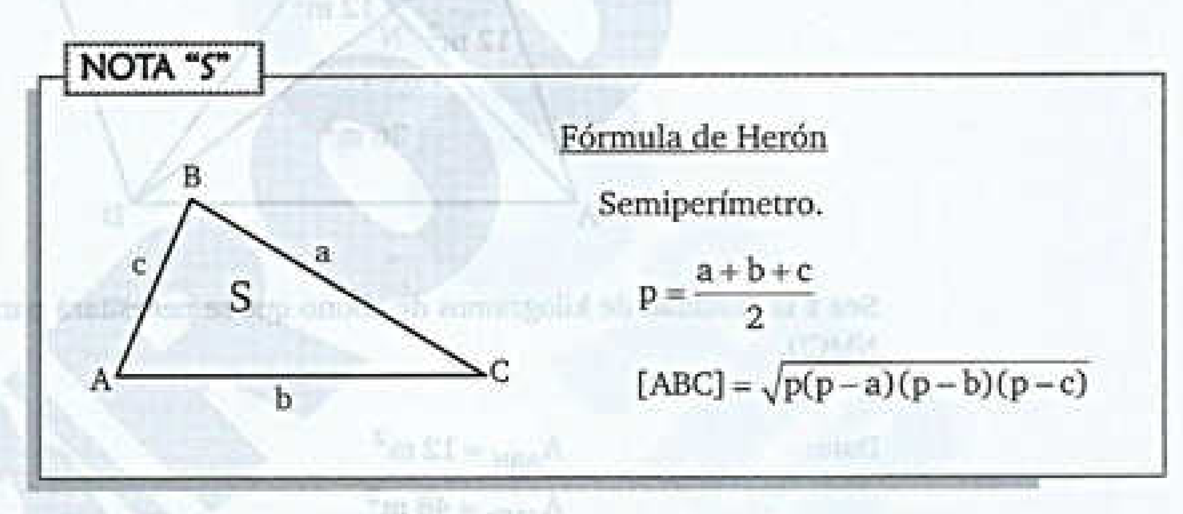
$\rightarrow\ x = 44 \times 1,5$

$\therefore\ x = 66\ kg$

PROBLEMA 23 Roberto, un hacendado deja como herencia a sus 6 hijos un terreno en forma triangular el cual debe ser repartido equitativamente a cada uno, si se sabe que las medianas de dicho terreno son: 6, 9 y 12u. Calcular el área del terreno en mención.

Resolución:





* Prolongamos $\overline{GE}$ hasta el punto H.

* Δ GEB $\cong$ ΔHEC

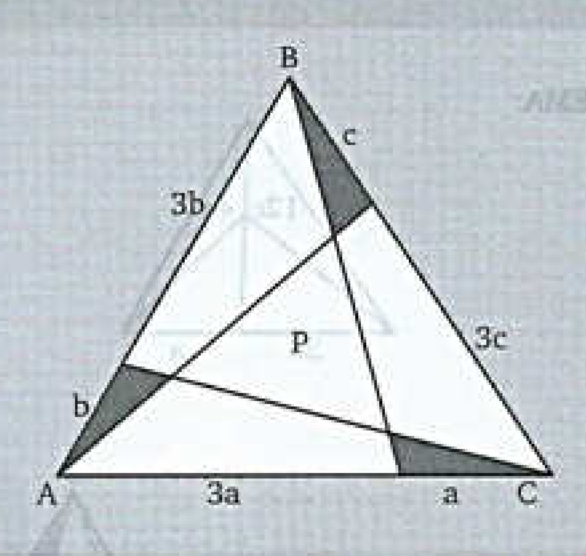
* ΔGPC: $2S = \sqrt{9(1)(3)(5)}$

$2S = 3\sqrt{15}$

Piden:

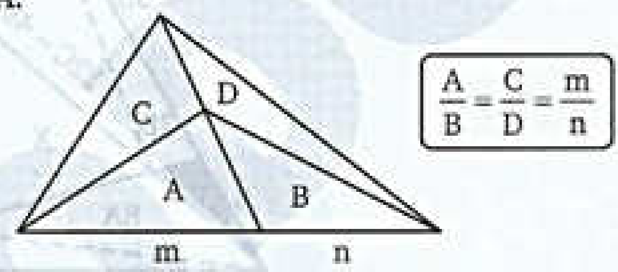
$\therefore \quad [ABC] = 6S = 9\sqrt{15}\ u^2$

PROBLEMA 24 Si el área de la región sombreada es 156 u^2 entonces el área "P" mide:



Resolución:

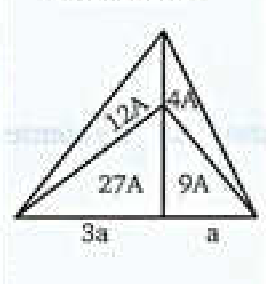
LEMA:



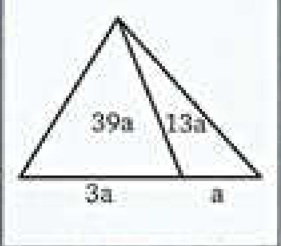
$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{m}{n}$$

NOTAS "S"

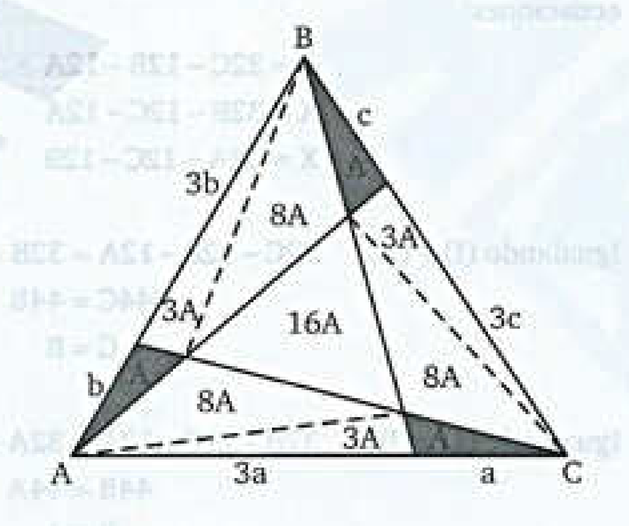
1. Por lema análogamente con los otros lados.



2. [ABC] = 52S



Realizamos trazos convenientes para la utilización del lema.



Entonces : $52S = 126$

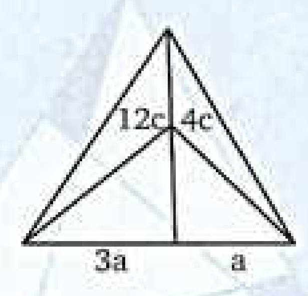
$S = 3$

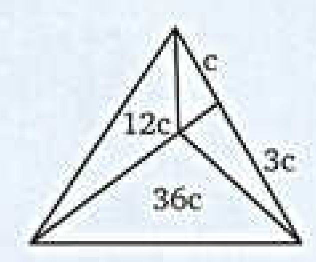
Piden : $P = 16A = 16(3) = 48$

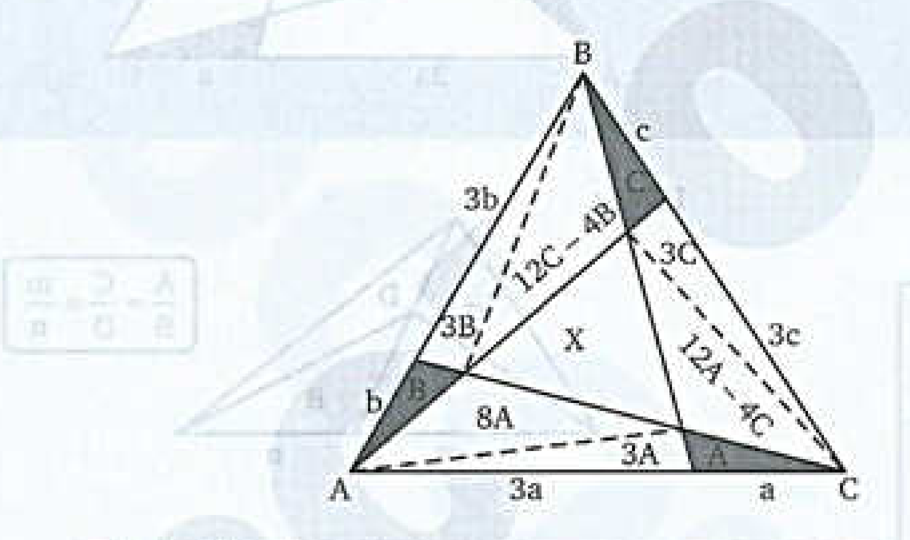
$\therefore$ El área de la región pedida es 48 u^2

PROBLEMA 25 Del problema anterior; demostrar que: A = B = C

Resolución: LEMA:







Utilizando el lema convenientemente en cada caso tenemos las siguientes ecuaciones:

$$X = 32C - 12B - 12A \quad ...(I)$$
$$X = 32B - 12C - 12A \quad ...(II)$$
$$X = 32A - 12C - 12B \quad ...(III)$$

Igualando (I) y (II): $32C - 12B - 12A = 32B - 12C - 12A$

$$44C = 44B$$
$$C = B$$

Igualando (I) y (II): $32B - 12C - 12A = 32A - 12C - 12B$

$$44B = 44A$$
$$B = A$$

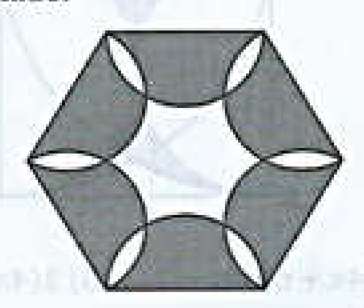
Análogamente (I) y (III):

$$A = C$$

$\therefore$ $A = B = C$ lqqd

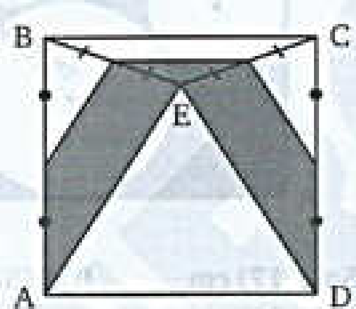
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule el perímetro de la región sombreada si el hexágono regular tiene 4 cm de lado.



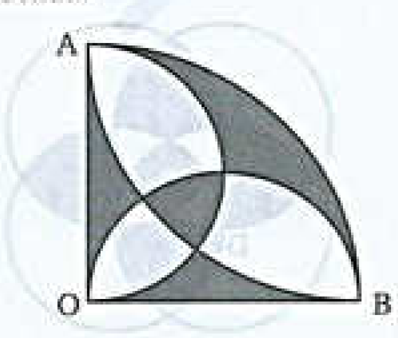
A) $16(\pi+2)$ cm B) $12(\pi-2)$ cm
C) $16(\pi+3)$ cm
D) $12(\pi+2)$ cm E) $16(\pi-2)$ cm

2. Si ABCD es un cuadrado de "p" unidades de perímetro, calcule el perímetro de la región sombreada, siendo AED un triángulo equilátero.



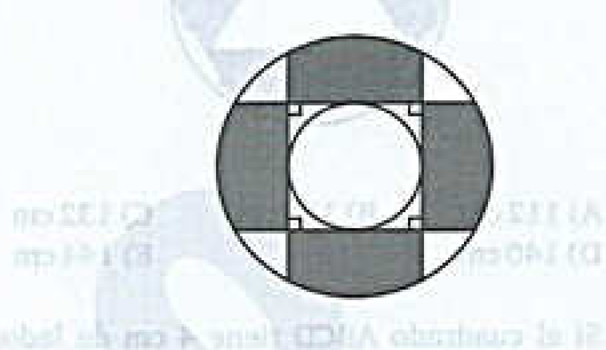
A) 3p/4 B) 3p/5 C) 5p/6
D) 8p/7 E) 9p/8

3. Si AOB es un cuadrante de 4 cm de radio, calcule el perímetro de la región sombreada.



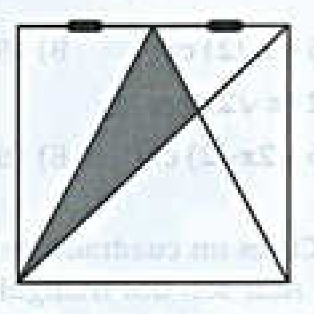
A) $4(\pi+2)$ cm B) $4(\pi+1)$ cm
C) $8(\pi+2)$ cm
D) $8(\pi+1)$ cm E) $4(\pi+3)$ cm

4. Si los 2 círculos son concéntricos y el mayor tiene doble radio que el menor, calcule el perímetro de la región sombreada si el radio mayor es de 6 cm.



A) $8(2\sqrt{3}+3\pi)$ cm
B) $8(\sqrt{3}+\pi)$ cm
C) $8(3\sqrt{3}+\pi)$ cm
D) $8(\sqrt{3}-\pi)$ cm
E) $8(3\sqrt{3}-2\pi)$ cm

5. Si el cuadrado de la figura tiene 30 cm de lado, calcule el perímetro de la región sombreada.



A) $10(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ cm
B) $10(5+\sqrt{2})$ cm
C) $20(5+\sqrt{2})$ cm
D) $10(\sqrt{5}+2)$ cm
E) $20(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ cm

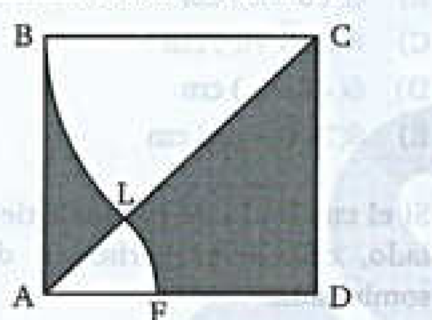
6. Halle el perímetro de un triángulo cuyos lados son 3 números pares consecutivos y el ángulo mayor es el doble del menor.

A) 32 u B) 34 u C) 30 u
D) 36 u E) 28 u

7. Si el hexágono es regular y la circunferencia es de 12 cm de radio, calcule usted el perímetro de la región sombreada.

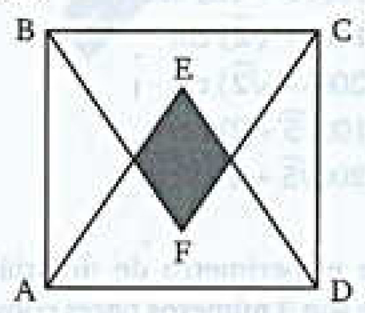
A) 112 cm B) 126 cm C) 132 cm
D) 140 cm E) 144 cm

8. Si el cuadrado ABCD tiene 4 cm de lado, además: BC = LC y AL = AF, calcule el perímetro de la región sombreada.



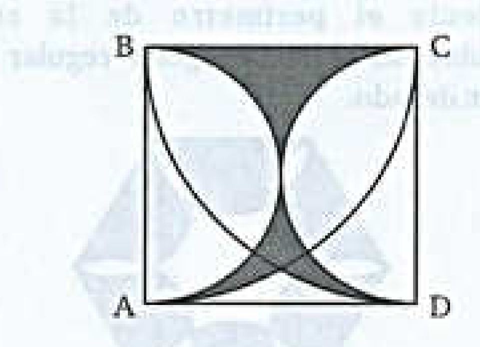
A) $(16 + \pi\sqrt{2})$ cm B) $(8 + \pi\sqrt{2})$ cm
C) $(12 + \pi\sqrt{2})$ cm
D) $(16 + 2\pi\sqrt{2})$ cm E) $(8 + 2\pi\sqrt{2})$ cm

9. Si ABCD es un cuadrado de 6 cm de lado; BFC y AED son dos triángulos equiláteros, calcule el perímetro de la región sombreada:



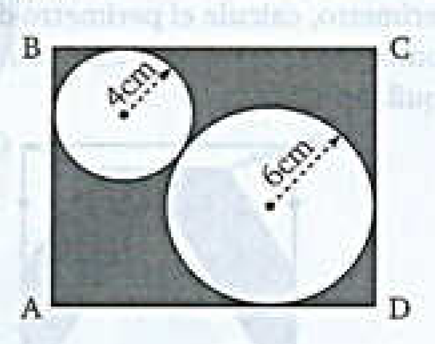
A) $8(3 - \sqrt{3})$ cm B) $6(3 + \sqrt{3})$ cm
C) $8(3 + \sqrt{3})$ cm
D) $6(3 - \sqrt{3})$ cm E) $2(4 - \sqrt{3})$ cm

10. Si ABCD es un cuadrado de 6 cm de lado, calcule el perímetro de la región sombreada.



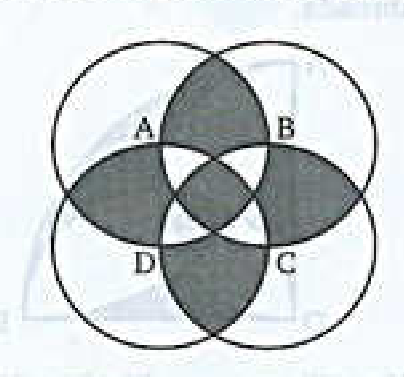
A) $3(4\pi + 6)$ cm B) $3(4\pi + 2)$ cm
C) $2(6\pi - 2)$ cm
D) $2(2\pi - 3)$ cm E) $2(4\pi + 3)$ cm

11. Si ABCD es un rectángulo y CD = 16 cm, calcule el perímetro de la región sombreada.



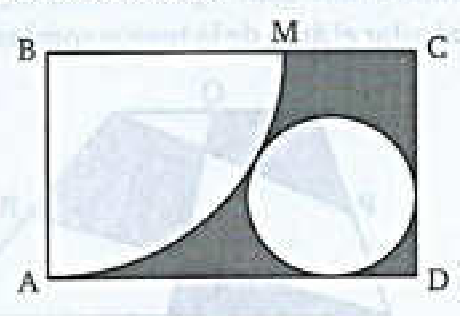
A) $4(5\pi + 17)$ cm B) $2(5\pi - 19)$ cm
C) $3(5\pi + 23)$ cm
D) $4(3\pi + 19)$ cm E) $3(3\pi - 13)$ cm

12. Si los radios de las circunferencias iguales es 3 cm y A, B, C y D son sus centros, calcule el perímetro de la región sombreada.



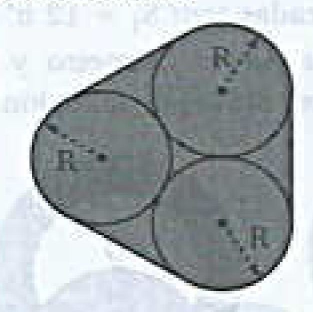
A) 12π cm B) 14π cm C) 16π cm
D) 18π cm E) 20π cm

13. Si ABCD es un rectángulo de 8 cm por 10 cm además: AB = BM, calcule el perímetro de la región sombreada.



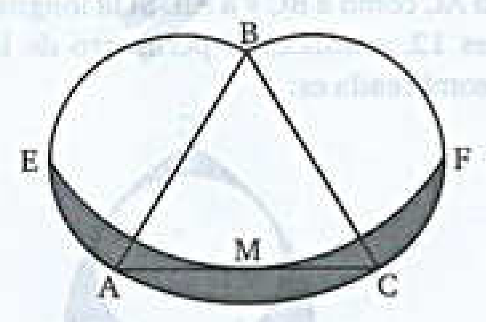
A) $3(4+2\pi)$ cm B) $4(5-3\pi)$ cm
C) $2(5-2\pi)$ cm
D) $4(3-2\pi)$ cm E) $4(5+2\pi)$ cm

14. Si R = 2 cm y π = 3,14, calcule el perímetro de la región sombreada.



A) 12,56 cm B) 18,56 cm
C) 24,56 cm
D) 14,56 cm E) 21,56 cm

15. Calcule el perímetro de la región sombreada si ABC es un triángulo equilátero, AC = 2 cm; AB y BC son diámetros de las semicircunferencias, M es punto medio de Ac y B es el centro de los arcos EMF y AC.



A) $\pi(4+\sqrt{3})/5$ cm B) $2\pi(2+\sqrt{3})/3$ cm
C) $\pi(2-\sqrt{3})/3$ cm
D) $4\pi(3+\sqrt{3})/5$ cm E) $2\pi(3-\sqrt{3})/3$ cm

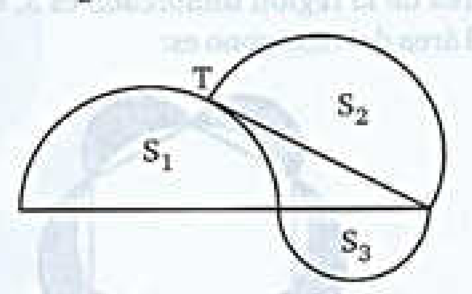
16. Se tiene un triángulo equilátero ABC de 8 cm de lado, tomando como diámetro 1 de sus alturas se construye una circunferencia, halle el perímetro de la región comprendida entre las 2 figuras.

A) $4(9+\sqrt{3}\pi)/3$ cm B) $2(3-\sqrt{3}\pi)/3$ cm
C) $4(3+\sqrt{3}\pi)/3$ cm
D) $2(6+\sqrt{3}\pi)/3$ cm E) $4(6-\sqrt{3}\pi)/3$ cm

17. En el cuadrado ABCD de 20 cm de lado se inscribe el triángulo isósceles CMD y se trazan sus alturas CF y DE que se cortan en H; calcule el perímetro del cuadrilátero MEHF.

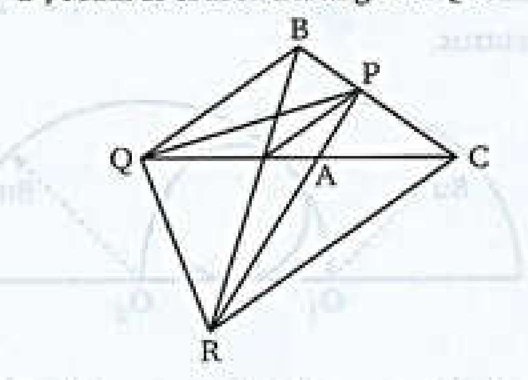
A) $12\sqrt{5}$ cm B) $14\sqrt{5}$ cm C) $16\sqrt{5}$ cm
D) $18\sqrt{5}$ cm E) $20\sqrt{5}$ cm

18. En el siguiente gráfico: $S_1 = 36m^2$ y $S_3 = 4m^2$. Calcular S_2 y T es punto de tangencia.



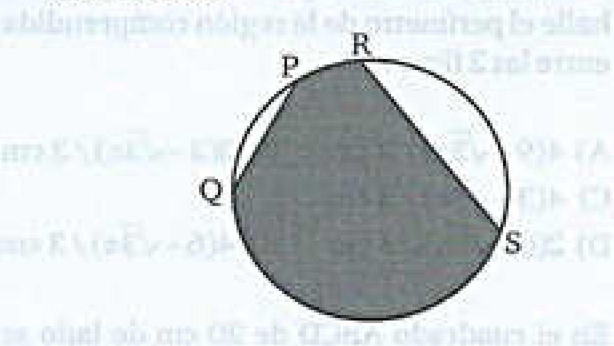
A) $10\,m^2$ B) $12\,m^2$ C) $14\,m^2$
D) $16\,m^2$ E) $18\,m^2$

19. En la siguiente figura, QB, AP y RC son paralelas. Si el área del triángulo ABC es $7\,u^2$, ¿cuál es el área del ángulo PQR?



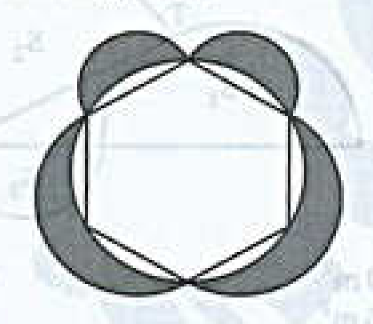
A) $7\,u^2$ B) $9\,u^2$ C) $10\,u^2$
D) $14\,u^2$ E) $18\,u^2$

20. En la figura, mPQ + mRS = 180°, PQ = 6 m y RS = 8 m. Calcular el área de la región sombreada.



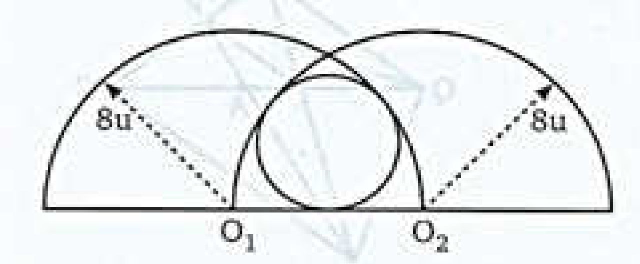
A) $0,5(24+25\pi)\ m^2$
B) $0,5(48+25\pi)\ m^2$
C) $0,5(48+15\pi)\ m^2$
D) $0,5(12+25\pi)\ m^2$
E) $0,5(24+49\pi)\ m^2$

21. En la siguiente figura se muestra un hexágono regular inscrito en una circunferencia. Los 4 arcos son semicircunferencias. Si el área de la región sombreada es S, entonces el área del hexágono es:



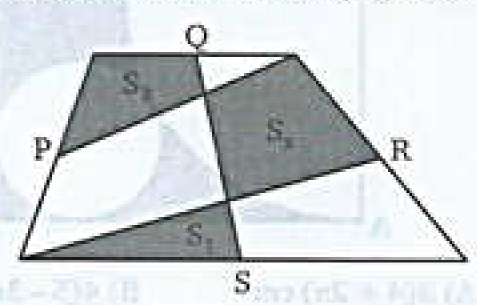
A) S B) 3S/2 C) 2S
D) 5S/4 E) 9S/4

22. Calcular el área del círculo, si O_1 y O_2 son centros.



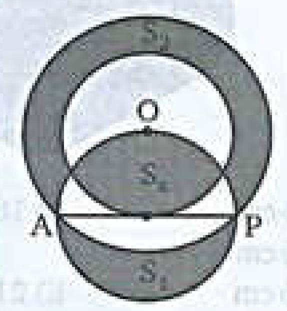
A) $4\ u^2$ B) $9\ u^2$ C) $8\ u^2$
D) $6\ u^2$ E) $10\ u^2$

23. En el siguiente trapecio, P, Q, R y S son puntos medios. Las áreas de las regiones sombreadas son: $S_1 = 4\ u^2$ y $S_2 = 8\ u^2$. Calcular el área de la región sombreada S_x.



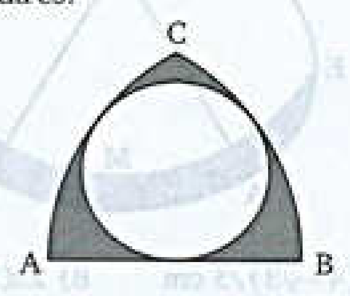
A) $8\ u^2$ B) $10\ u^2$ C) $12\ u^2$
D) $14\ u^2$ E) $15\ u^2$

24. En la figura, las áreas de las regiones sombreadas son: $S_1 = 12\ u^2$ y $S_2 = 20\ u^2$; además $\overline{AP}$ es diámetro y O es centro. Entonces el área de la región sombreada S_x es:



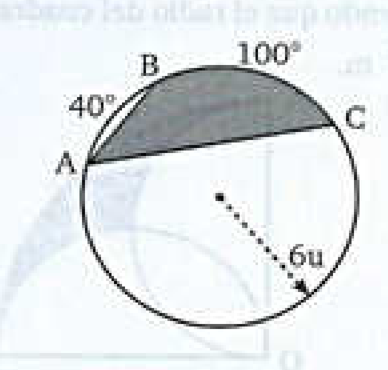
A) $16\ u^2$ B) $12\ u^2$ C) $8\ u^2$
D) $9\ u^2$ E) $10,5\ u^2$

25. Si los arcos de circunferencia AC y BC tienen centros en B y A respectivamente, además la circunferencia es tangente tanto a $\overset{\frown}{AC}$ como a $\overset{\frown}{BC}$ y a $\overline{AB}$. Si la longitud de $\overline{AB}$ es 12, entonces el perímetro de la región sombreada es:



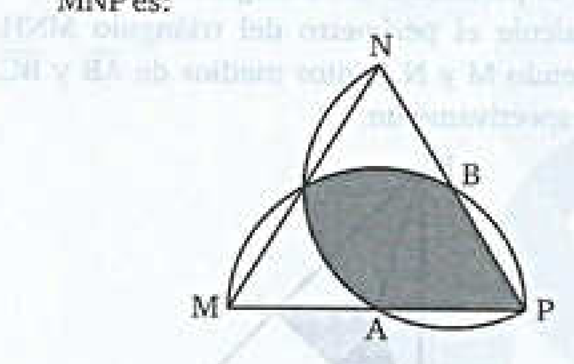
A) $12+17\pi$ B) $12+19\pi$ C) $12+15\pi$
D) $12+16\pi$ E) $12+20\pi$

26. Hallar el área de la región sombreada:



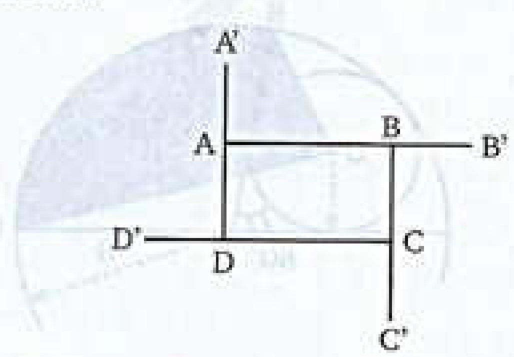
A) 8π B) 9π C) 10π
D) 12π E) 6π

27. El área de la región sombreada es $\sqrt{3}\,\pi$, A y B son centros de las circunferencias. Entonces el área del triángulo equilátero MNP es:



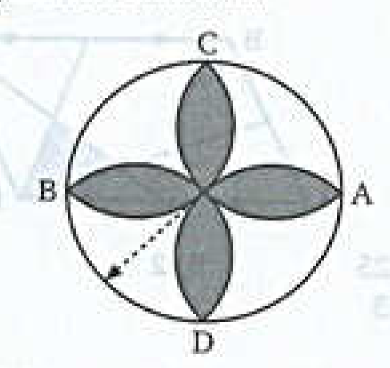
A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 6

28. Sea ABCD un rectángulo y A', B', C' y D' en las prolongaciones de sus lados tales que: AA' = kAD; BB' = kAB; CC' = kBC. Hallar k de modo que el área del cuadrilátero A'B'C'D' sea 25 veces el área del rectángulo ABCD.



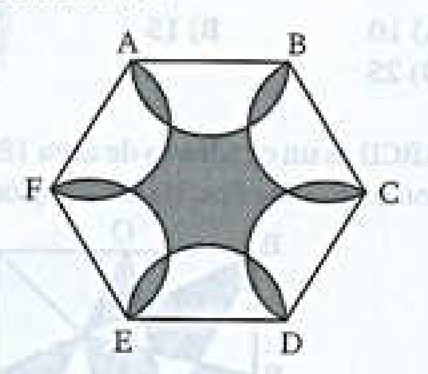
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

29. Calcular el área de la región sombreada. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son diámetros.



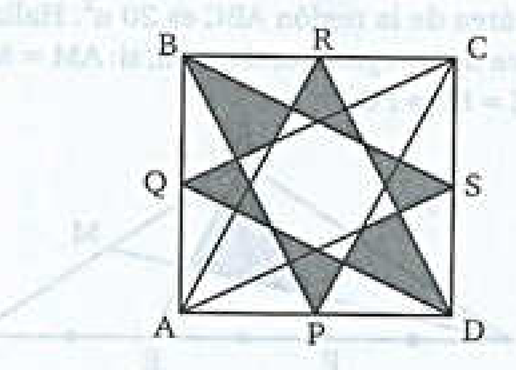
A) $\pi-2$ B) $\pi-1$ C) $\pi+1$
D) $\pi+2$ E) $2\pi-3$

30. ABCDEF es un hexágono regular de lado 6u. Si cada uno de sus lados es diámetro de las semicircunferencias, ¿cuál es el área de la región sombreada?



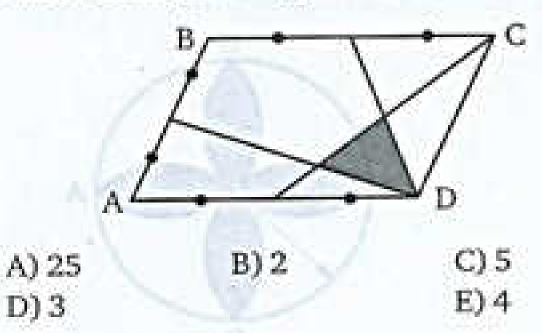
A) $4\pi\,u^2$ B) $2\pi\,u^2$ C) $3\pi\,u^2$
D) $6\pi\,u^2$ E) $9\pi\,u^2$

31. ABCD es un cuadrado de 60 m^2 de área. P, Q, R y S son puntos medios. Calcular el área de la región sombreada.



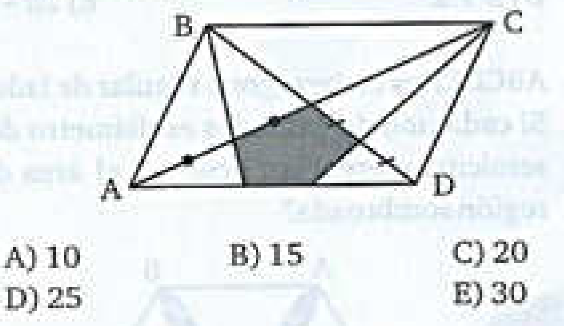
A) $12\,m^2$ B) $16\,m^2$ C) $20\,m^2$
D) $21\,m^2$ E) $24\,m^2$

32. Hallar el área de la región sombreada si ABCD es un paralelogramo de área 40.



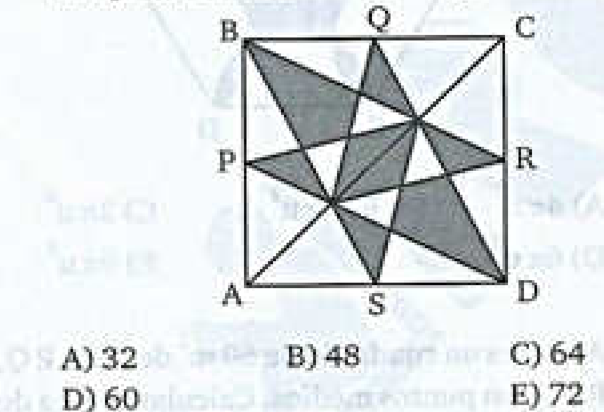
A) 25 B) 2 C) 5
D) 3 E) 4

33. Área del paralelogramo ABCD es 120. Hallar el área de la región sombreada.



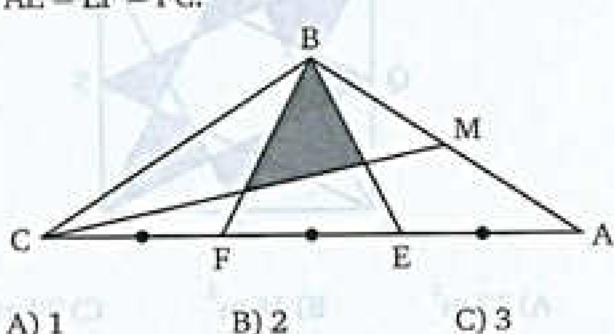
A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

34. ABCD es un cuadrado de área 180. P, Q, R y S son puntos medios. Hallar la región sombreada



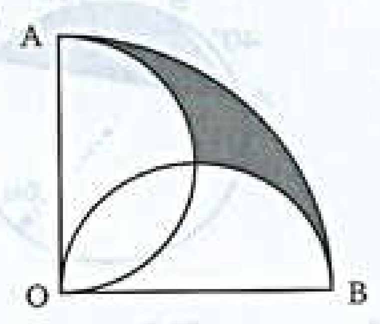
A) 32 B) 48 C) 64
D) 60 E) 72

35. El área de la región ABC es 20 u^2. Hallar el área de la región sombreada, si: AM = MB y AE = EF = FC.



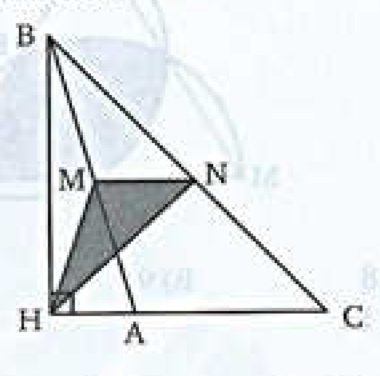
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

36. Calcular el área de la región sombreada sabiendo que el radio del cuadrante AOB es $2\sqrt{2}$ m.



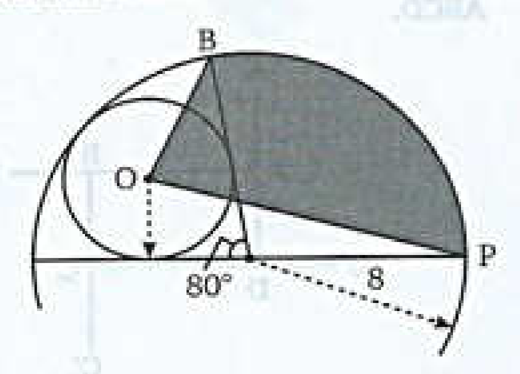
A) $(\pi-1)$ m^2 B) $(\pi-2)$ m^2
C) $(\pi-3)$ m^2
D) $(\pi-4)$ m^2 E) $2(\pi-1)$ m^2

37. Si el perímetro del triángulo ABC es 48 u. Calcule el perímetro del triángulo MNH, siendo M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.



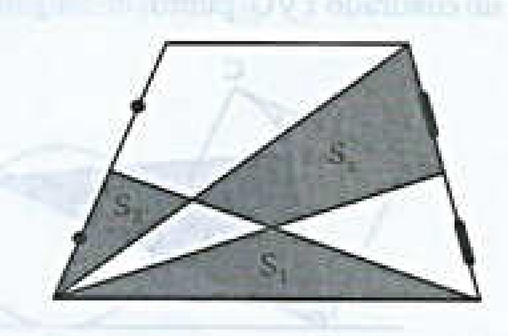
A) 24 u B) 20 u C) 18 u
D) 30 u E) 25 u

38. En el gráfico mostrado, calcule el área de la región sombreada.



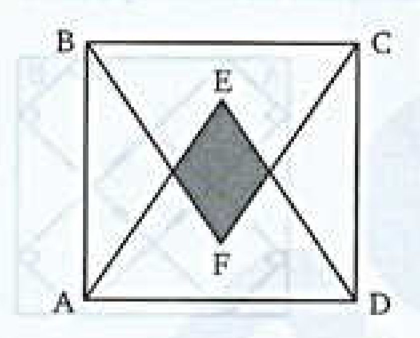
A) 17,7 u^2 B) 15,2 u^2 C) 12π u^2
D) 18π u^2 E) 19,2 u^2

39. En la figura, $S_1 + S_2 = 20\,u^2$. Calcule S_x.



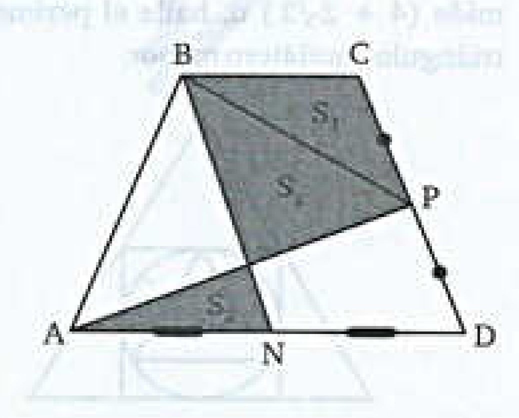
A) $40\,u^2$ B) $10\,u^2$ C) $15\,u^2$
D) $20\,u^2$ E) $18\,u^2$

40. Si ABCD es un cuadrado de área $490\,m^2$, halle el área de la región sombreada.



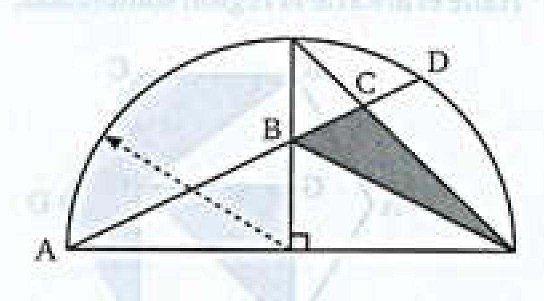
A) $120\,m^2$ B) $100\,m^2$ C) $105\,m^2$
D) $90\,m^2$ E) $86\,m^2$

41. Si ABCD es un trapecio y $S_1 + S_2 = 8\,u^2$, halle S_x. NB // CD.



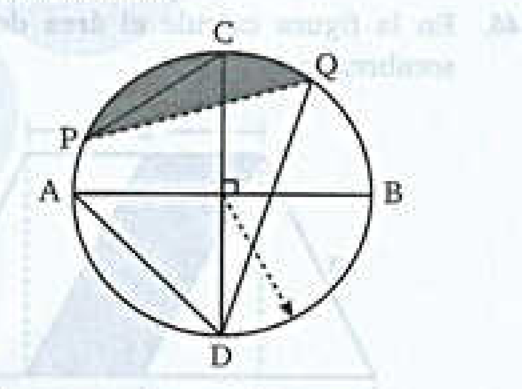
A) $14\,u^2$ B) $12\,u^2$ C) $8\,u^2$
D) $19\,u^2$ E) $16\,u^2$

42. En el gráfico, calcule el área de la región sombreada, si $AB \times CD = 16\,u^2$.



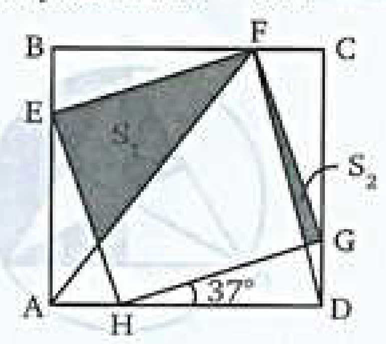
A) $16\,u^2$ B) $6\,u^2$ C) $12\,u^2$
D) $8\,u^2$ E) $10\,u^2$

43. En una circunferencia de radio R, si $m\angle PCD = m\angle ADQ$, calcule el área de la región sombreada.



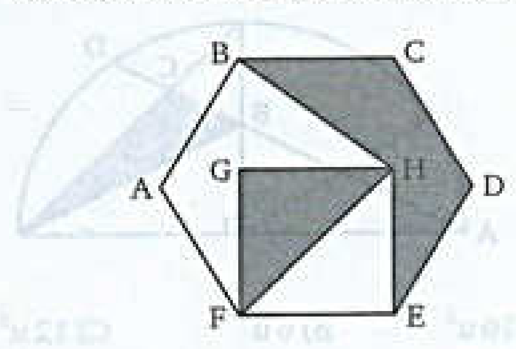
A) $\frac{R^2}{2}(\pi - 1)\,u^2$ B) $R^2(\pi - 2)\,u^2$
C) $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)\,u^2$
D) $\frac{R^2}{4}\pi\,u^2$ E) $\frac{R^2}{4}(\pi - 4)\,u^2$

44. Halle $S_1 + S_2$, si ABCD y EFGH son cuadrados y además EF = 10u



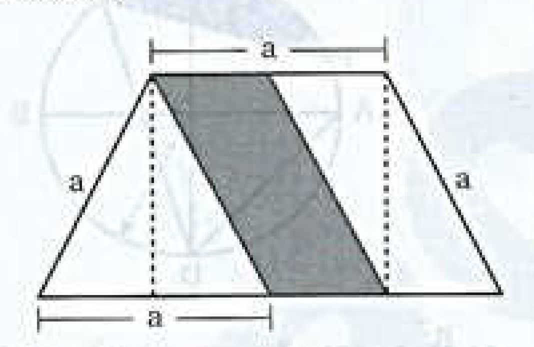
A) $28\,u^2$ B) $50\,u^2$ C) $40\,u^2$
D) $75\,u^2$ E) $35\,u^2$

45. En la figura ABCDEF es un hexágono regular de lado "a" y EFGH es un cuadrado. Halle el área de la región sombreada.



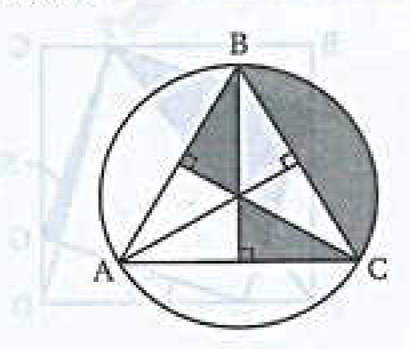
A) $3/2a^2$ B) $3/4a^2\sqrt{3}$
C) $3/7a^2\sqrt{3}$
D) $2/3a^2\sqrt{3}$ E) $2a^2$

46. En la figura calcule el área de la región sombreada.



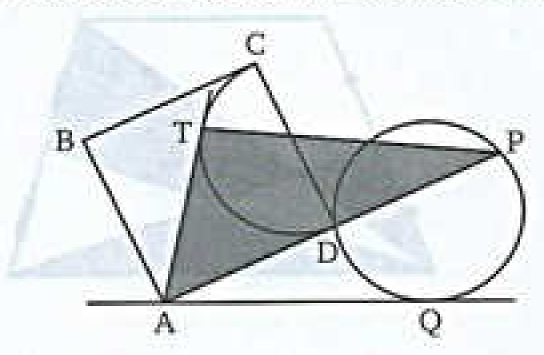
A) $3/2a^2$ B) $\sqrt{3}a/4$
C) $\sqrt{3}a^2/2$
D) $4\sqrt{3}a$ E) $\sqrt{3}a^2/4$

47. Si: $S_{ABQ} = 12\ m^2$; $AC = 4AQ$; $BC = 6RC$; $BQ = 3BP$. Halle el área de la región sombreada.



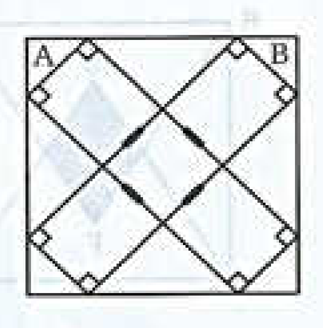
A) $30\ m^2$ B) $25\ m^2$ C) $32\ m^2$
D) $26\ m^2$ E) $28\ m^2$

48. De la figura, halle el área de la región sombreada. Además: $AQ = 10$ cm. ABCD es un cuadrado T y Q: puntos de tangencia.



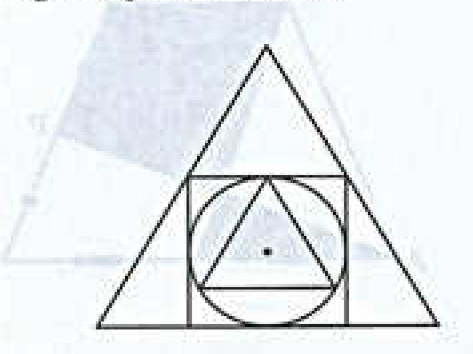
A) $35\ cm^2$ B) $40\ cm^2$ C) $42\ cm^2$
D) $56\ cm^2$ E) $36\ cm^2$

49. En la figura se muestra un cuadrado, entonces, la relación de las áreas de los rectángulos inscritos A y B será:



A) 1/2 B) 2/3 C) 3/5
D) 1 E) 3/4

50. La figura muestra dos triángulos equiláteros, un cuadrado y una circunferencia. Si el lado del triángulo equilátero mayor mide $(4 + 2\sqrt{3})$ u, halle el perímetro del triángulo equilátero menor.



A) 7 u B) 9 u C) 11 u
D) 13 u E) 15 u

Certezas y Conteo de Intervalos

CAPACIDADES

- Desarrollar aún más el sentido de análisis en situaciones especulativas.
- Desarrollar el sentido de precisión, aprendiendo a escoger la opción más provechosa.
- Aplicar los criterios de división, multiplicación, adición y sustracción.
- Aplicación de la regla de tres simple.
- Relacionar y aplicar en situaciones cotidianas de la vida real.

¿Cuántos intentos como mínimo se deben hacer, para tener la certeza de que la puerta se abrirá?

* Sólo una llave es de la puerta?

Un paciente toma 2 pastillas cada 6 hr y le han recetado por un mes (300) de tratamiento; si dichas pastillas se venden en cajitas de 11 unidades y la cajita cuesta S/.100 ¿cuál es el gasto que tendrán que hacer en dichas pastillas?

CERTEZAS

En este tema debemos pensar en el caso extremo o peor de los casos que nos puede suceder en la extracción de fichas, monedas, esferas, etc.

Habremos observado seguramente en algún instante de nuestras vidas que optamos una actitud preventiva para llegar a tiempo a una cita.

"... ahora llegaré con toda seguridad mucho más temprano, y para ello saldré 1 hora más temprano..."

"... El Sporting debe ganar 3 – 0 al visita para lograr el campeonato tranquilamente jugando de local ..."

"... necesito como mínimo 50 soles para llegar a Paracas y regresar a mi casa ..."

Generalmente se trata de problemas relacionados a extracción de monedas, fichas, esferas, etc. y la estrategia a seguir debe tener los siguientes principios:

- Pensar en el peor de los casos respecto a la obtención de lo que nos piden, tratando siempre de no obtener lo que se desea; si me piden esferas de color rojo; sacar las de otros colores...... si me piden una esfera de numeración par, sacar primero las impares.

- Siempre nos orientaremos a sacar los elementos que se encuentran en mayor cantidad, pues son los más probables en salir.

- Si razonamos coherentemente y obtenemos 2 valores posibles en nuestra solución, optaremos por considerar el de mayor valor, pues nos dará mayor seguridad en sacar lo que nos pidan.

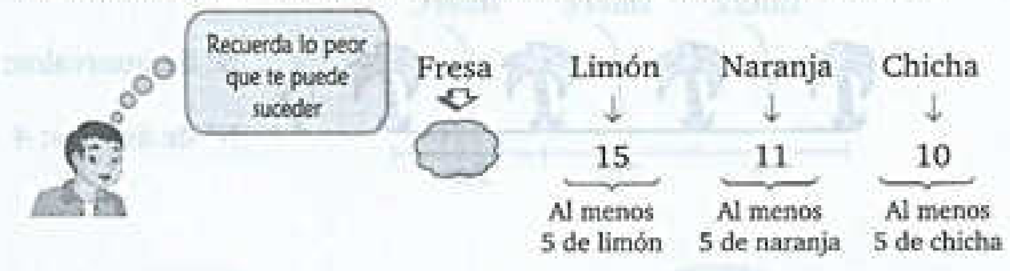
- También podemos decir que el caso extremo será casi casi obtener lo que nos piden pero no llegar a obtenerlo.

  Por ejemplo, si hay 3 colores de esferas (8 rojas, 5 azules y 11 verdes) y nos piden obtener un color completo, ser negativo sería sacar 7 rojas, 4 azules y 10 verdes casi pero no se obtuvo el color completo.

- Una vez que se ha considerado dichos puntos en la solución del problema se selecciona el elemento necesario que generalmente es 1 y ya se obtuvo la respuesta pedida.

Aplicación 1: En una caja se tiene 20 caramelos de fresa, 15 de limón, 11 de naranja y 10 de chicha. ¿Cuántas debo sacar como mínimo para obtener con seguridad al menos 5 de fresa?

Resolución: Como me piden fresa, por el primer principio y el segundo se tiene:

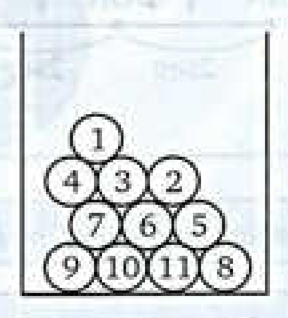


Ahora vemos que las que sobran son todas de fresa y por lo tanto cuando se extrae al azar siempre saldrá fresa y como nos piden por lo menos 5 y además la menor cantidad, extraeremos 5:

$$\therefore \quad 15 + 11 + 10 + 5 = 41$$

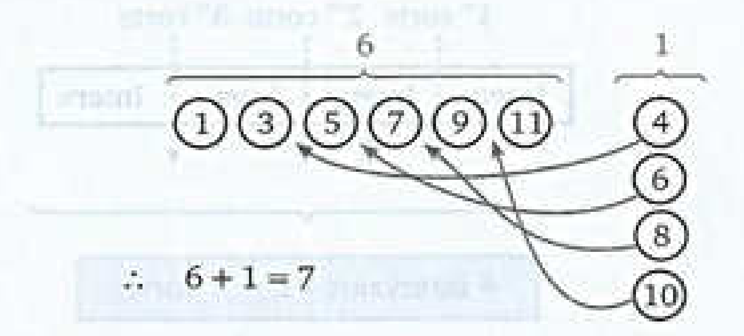
Aplicación 2: En una urna se tienen 11 fichas numeradas del 1 al 11 ¿cuántos se deben extraer como mínimo para estar seguro de haber sacado por lo menos un par de números consecutivos?

Resolución:



Lo peor que nos puede suceder es que saquemos todas las fichas impares ya que en ningún momento habrán 2 fichas consecutivas.

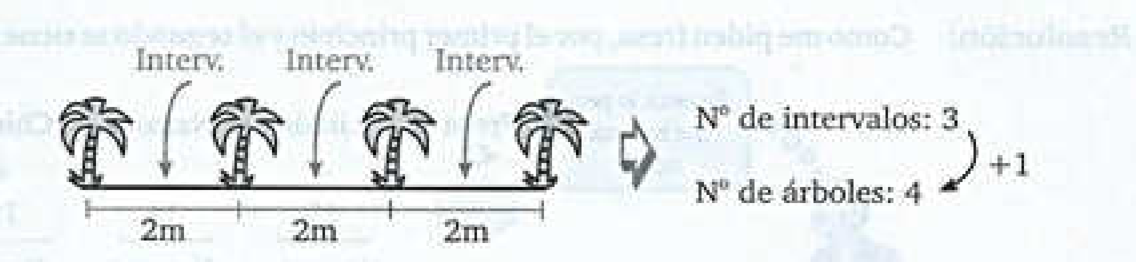
Al sacar cualquier ficha que nos queda vemos que ya obtendríamos un par de fichas consecutivas con toda seguridad.

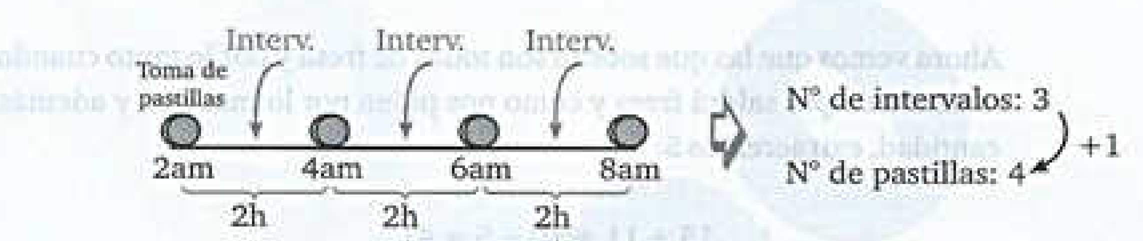


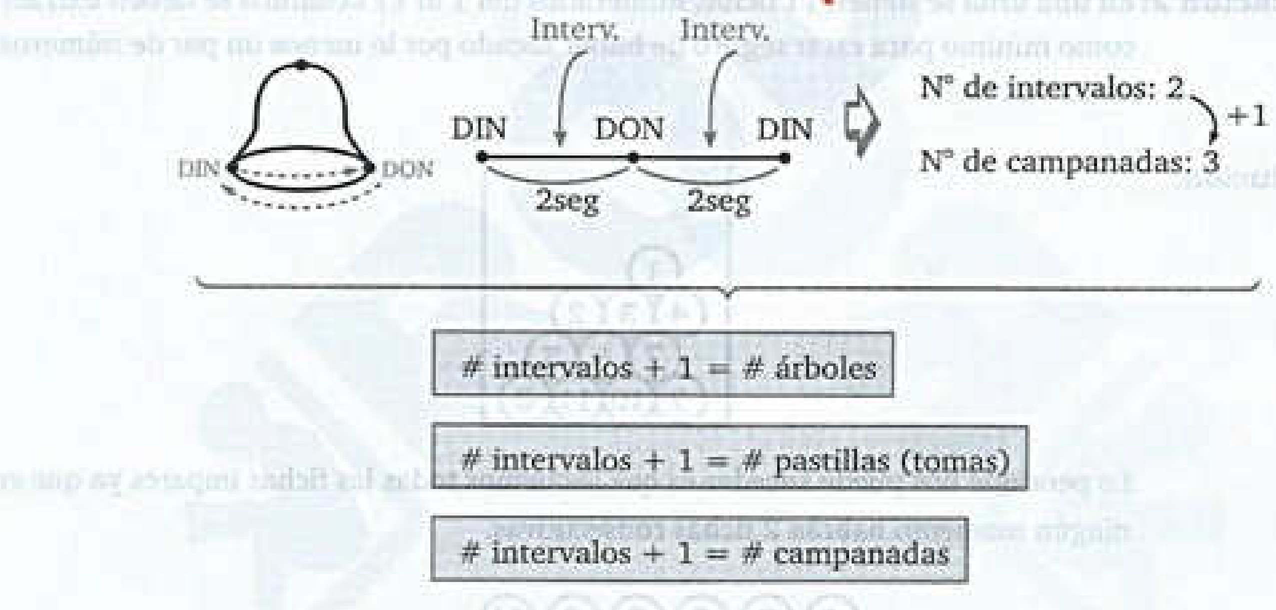
$$\therefore \quad 6 + 1 = 7$$

CONTEO DE INTERVALOS

Un intervalo es una porción o separación en una secuencia de objetos, toma de pastillas, campanadas, etc.







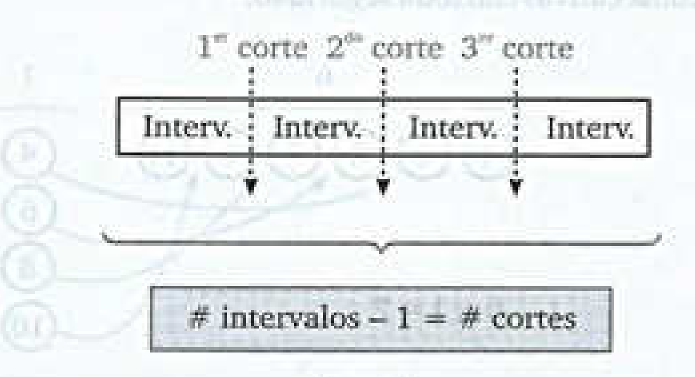
intervalos + 1 = # árboles

intervalos + 1 = # pastillas (tomas)

intervalos + 1 = # campanadas

Importante:

- Sólo en caso de cortes se cumple:



intervalos – 1 = # cortes

- En caso de figuras cerradas:

1^er^ corte, 2^do^ corte, 3^er^ corte, 4^to^ corte — Interv.

N° de intervalos: 4
N° de cortes: 4
Iguales

NOTA "S"

En figuras cerradas se cumple:

$$\text{N° de cortes o intervalos} = \frac{\text{Perímetro}}{\text{Longitud unitaria}}$$

N° de intervalos: 6
N° de árboles: 6
Iguales

Piedras

N° de intervalos: 9
N° de piedras: 9
Iguales

intervalos = # objetos

Aplicación 1: Un médico atiende en su consultorio desde las 8 p.m. a las 10 p.m. Si en cada paciente utiliza 20 min y que los pacientes no pierden tiempo al salir y el otro paciente ingresa inmediatamente. ¿A cuántos pacientes atiende en 12 días?

Resolución: Primero utilizamos por día y este valor lo multiplicamos por 12.

Observamos que los intervalos constan de 20 min por tanto para saber cuántos intervalos existen en los 120 min: $\frac{120}{20} = 6$

Como las personas son uno más que los intervalos: $6 + 1 = 7$

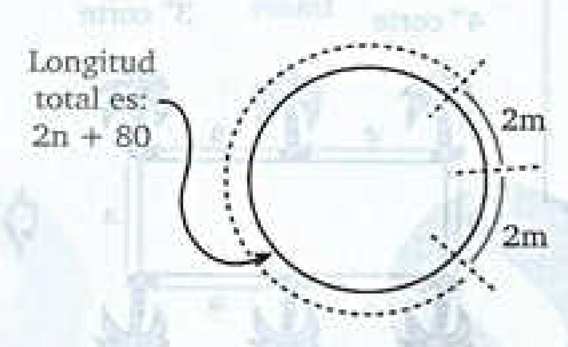
Interv. Interv.
Intervalos: 2
Pacientes: 3
+1

En un día atiende 7 pacientes.

$\therefore$ En 12 días: $12(7) = 84$ pacientes

Aplicación 2: Un alambre en forma circular tiene longitud 2n + 80 metros. ¿Cuántos cortes se deben hacer para obtener pedazos de 2 metros?

Resolución: Sabemos que la cantidad de cortes es igual que la cantidad de intervalos, en éste caso los intervalos serán los pedacitos a obtener; por tanto sólo hallaremos cuántos pedazos nos salen de todo el alambre circular con una simple división.

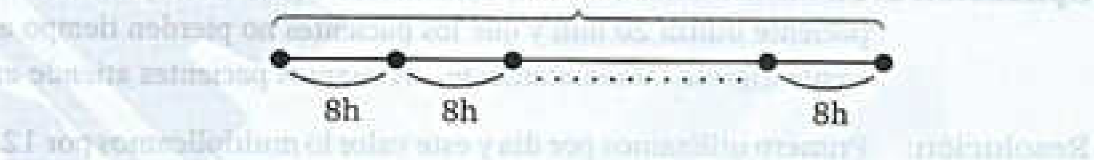


$$N^\circ \text{ pedazos (intervalos)} = \frac{2n+80}{2} = n + 40$$

$$\therefore \quad N^\circ \text{ cortes} = n + 40$$

Aplicación 3: Un paciente toma una pastilla cada 8h ¿cuántas debe tomar en un mes de 30 días?

Resolución:



NOTA "S"

El tiempo total y el tiempo entre toma y toma deben estar en las mismas unidades

Pasamos los 30 días a horas pues las tomas son por horas, como es lineal se cumple:

$$\# \text{Intervalos} + 1 = N^\circ \text{ Pastillas}$$

Para obtener el N° de intervalos dividimos el tiempo total entre el valor de cada intervalo:

$$N^\circ \text{ Intervalo} = \frac{30(24h)}{8h} = 90$$

$$\therefore \quad N^\circ \text{ Pastillas} = 90 + 1 = 91$$

También:

$$N^\circ \text{ de pastillas} = \frac{\text{T. Total}}{\text{Tiempo de cada toma}} + 1$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. En una urna se tienen 4 bolas rojas y 6 bolas blancas. ¿Cuántas bolas se deben extraer como mínimo y al azar para tener la certeza de obtener una bola roja?

Rpta.: ....

2. En una urna se tienen 10 bolas numeradas del 1 al 10. ¿Cuántas bolas se deben extraer como mínimo y al azar para estar seguro de obtener una bola con número par?

Rpta.: ....

3. En una urna se tiene 10 bolas blancas y 8 verdes. ¿Cuántas bolas se deben extraer como mínimo y al azar para tener la certeza de obtener una bola de cada color?

Rpta.: ....

4. En una caja se tienen 10 bolas rojas y 12 blancas. ¿Cuántas bolas se deben extraer como mínimo y al azar para tener la certeza de obtener 2 bolas del mismo color?

Rpta.: ....

5. En una caja se tienen 6 bolas blancas, 8 rojas y 10 verdes. ¿Cuántas bolas se deben extraer como mínimo y al azar para tener la certeza de obtener 3 bolas del mismo color?

Rpta.: ....

6. Se tienen 10 bolas numeradas del 1 al 10. ¿Cuántas bolas se deben extraer como mínimo y al azar para estar seguro de obtener una bola con un número menor que 5?

Rpta.: ....

7. A lo largo de una avenida de 100 m de longitud se van a colocar postes cada 5 m, ¿cuál es la mayor cantidad de postes que se pueden colocar?

Rpta.: ....

8. Un enfermo debe tomar una pastilla cada 8 horas. Si su tratamiento durara 1 semana, ¿cuántas pastillas tomará?

Rpta.: ....

9. Un sastre tiene un rollo de tela de 60 m de longitud. Si debe cortarlo en piezas de 2 m de longitud, ¿cuántos cortes debe realizar?

Rpta.: ....

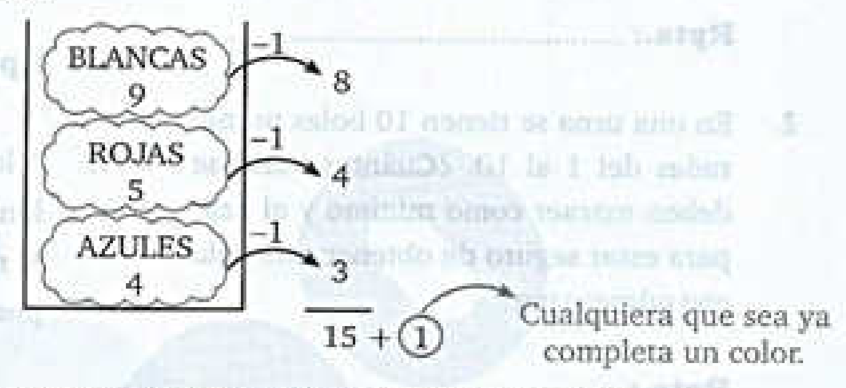
10. En el perímetro de un terreno de forma cuadrada de lado 20 m se van a plantar árboles cada 4 m. ¿Cuántos árboles se plantarán?

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 De 5 fichas rojas, 4 azules y 9 blancas, ¿cuál es el mínimo número de fichas que se deben sacar para tener la certeza de haber extraído un color por completo?

Resolución: El peor de los casos será sacar casi un color por completo osea uno menos de los que hay en cada grupo.



∴ Deben realizarse 16 extracciones como mínimo.

PROBLEMA 2 Se tienen fichas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la menor cantidad de fichas que se deben extraer para tener la certeza de que en las fichas extraídas existen 2 fichas cuya suma sea 11?

Resolución: Las 2 únicas fichas que sumen 11 son:

Al extraer debemos tener en cuenta que no se obtenga la suma 11.

Si se extraer (1) ya no se puede extraer la ficha (10)
Si se extraer la ficha (2) ya no se puede extraer la ficha (9)
Análogamente con (3) (4) y (5)

(1), (2), (3), (4), (5) → (?) → Cualquiera sea la ficha extraída sumará 11,con una de las fichas que ya se había extraído

∴ Se deben extraer como mínimo: 5 + 1 = 6 fichas.

PROBLEMA 3 En una bolsa hay caramelos de 4 sabores distintos. ¿Cuántos debe tomarse como mínimo para tener la seguridad de haber extraído 5 del mismo sabor; si de cada uno hay más de 8?

Resolución: Se sabe que cada sabor hay más de 8.

Ahora vemos que al sacar cualquier caramelo (uno sólo) ya completaríamos los 5 de un sabor que nos piden.

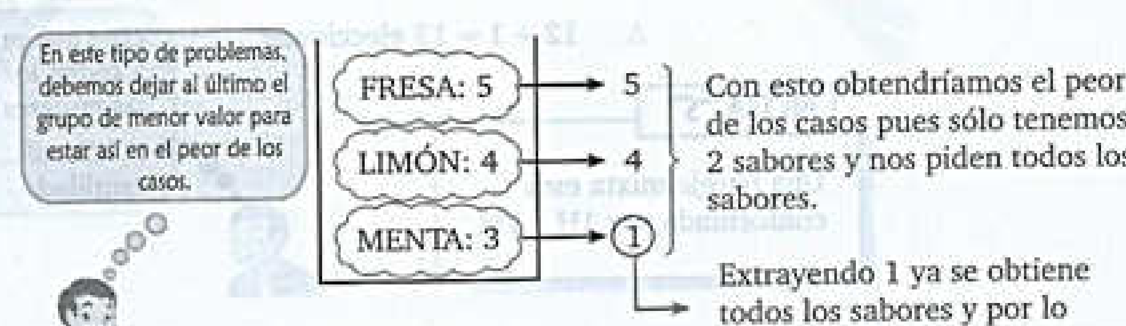
$$\therefore \quad 16 + 1 = 17$$

PROBLEMA 4 En una bolsa se tiene caramelos de distintos sabores; 5 de fresa, 4 de limón y 3 de menta.

I. ¿Cuál es la cantidad mínima que se debe extraer para obtener con seguridad por lo menos uno de cada sabor?

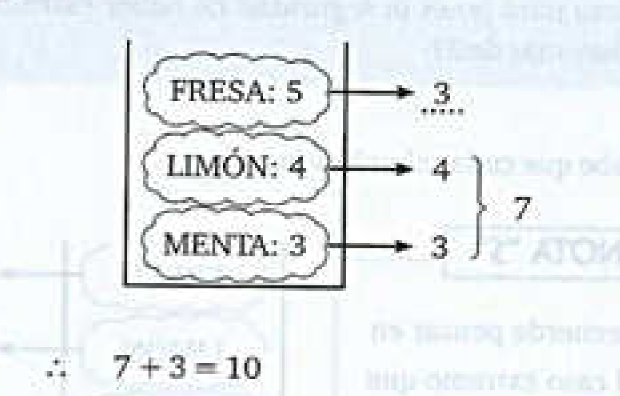
II. ¿Cuántos debemos extraer como mínimo para obtener con certeza 3 caramelos de fresa?

Resolución: I. Si queremos por lo menos uno de cada sabor nos están diciendo que saquemos todos los sabores. Por tanto empezamos ha sacar los de mayor cantidad.



$$\therefore \quad 9 + 1 = 10$$

II. Si queremos 3 de fresa primero extraemos lo que no es de fresa y luego los 3 que nos piden.



$\therefore \quad 7 + 3 = 10$

PROBLEMA 5 En una conferencia, entre los expositores se tiene 12 hombres y 10 mujeres, de los cuales se elige uno por uno y al azar. ¿Cuántas elecciones se tendrá que realizar como mínimo para tener la seguridad que entre los elegidos se encuentre:

I. Un hombre
II. Una pareja mixta

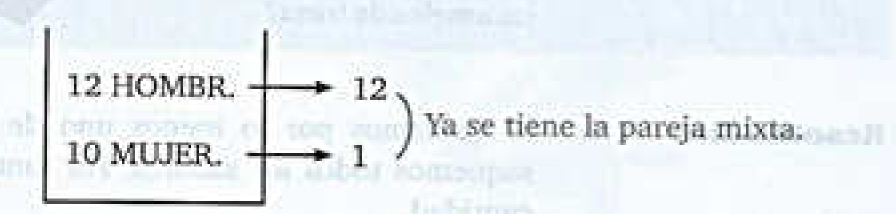
Resolución: I.

12 HOMBR. → 1
10 MUJER. → 10

El peor de los casos sería escoger a las 10 mujeres y por último 1 hombre

$\therefore \quad 10 + 1 = 11$ elecciones

II.



$\therefore \quad 12 + 1 = 13$ elecciones

NOTA "S"
Una pareja mixta esta conformada por 1H y 1M

¿Por que primero se sacan a todos los hombres y no las mujeres?
... ¡Claro! ... son de mayor cantidad

PROBLEMA 6 En una reunión se encuentran presente 250 personas. ¿Cuántas personas como mínimo deberán llegar para que en dicha reunión tengamos la seguridad de que estén presentes dos personas con la misma fecha de cumpleaños?

Resolución: Para tener a 2 personas con la misma fecha de cumpleaños (día y mes) deben haber 367 personas como mínimo:

NOTA "S"
El peor de los casos se presentaría en un año bisiesto de 366 días

$$366 + 1 = 367$$

Entonces las persona que deben llegar deben ser la que faltan para tener 367:

$$\therefore \quad 367 - 250 = 117$$

PROBLEMA 7 En una caja hay once discos de cartón que llevan impresos los números del 1 al 11. ¿Cuántos discos hay que extraer al azar, uno por vez, como mínimo, para lograr la certeza de tener un par cuyos números cumplan la igualdad indicada?

$$\sqrt{ⓧ + ⓧ} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

Resolución:

Paso 1: ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨✓ ⑩✓ ⑪✓

Primero extraemos estos discos que no cumplirán con lo pedido

NOTA "S"
Recuerda que le debe ocurrir un caso extremo o peor de los casos.

Paso 2: ①× ②× ③× ④× ⑤✓ ⑥✓ ⑦✓ ⑧✓ } De aquí elegimos cualquiera de los discos supongamos que extraemos 8 ya no podemos sacar el 1, si extraemos el 7 ya no podemos sacar el 2 y así.

Paso 3: ① ② ③ ④ } De estos discos que quedan si extraemos cualquiera de ellos se cumplirá la suma 9 o 4

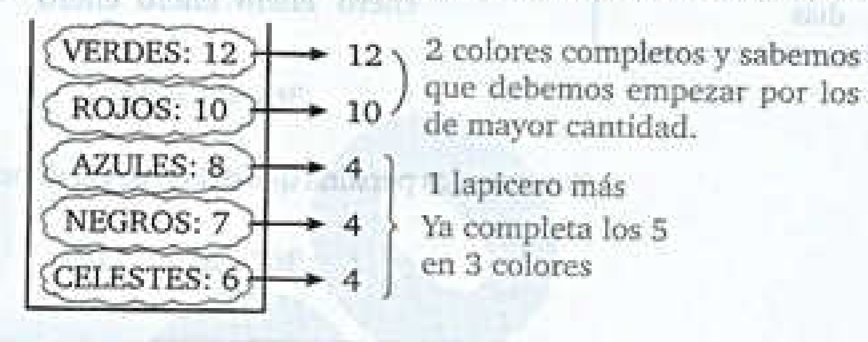
$$\therefore \; \begin{array}{c}\text{Número mínimo}\\ \text{de extracciones}\end{array} = 3 + 4 + 1 = 8$$

PROBLEMA 8 En una caja hay 12 lapiceros verdes 10 rojas, 8 azules, 7 negros y 6 celestes. Cuántos se deben extraer como mínimo para estar seguros de obtener:

I. 5 de cada color en 3 colores de los mostrados
II. 3 de cada color en 5 colores de los mostrados

Resolución:

I. Nos piden 3 colores por tanto sacaremos 2 colores completos y así no habremos cumplido la pregunta, luego de los siguientes colores sacaremos 4 (uno menos de los que piden) y seguiremos pensando en el peor de los casos.



En los verdes	: ya hay 5 (y de sobra)	5 en 3 colores
En los rojos	: ya hay 5 (y de sobra)	
En cualquiera de los restantes	: 4 + 1 = 5	

$\therefore\ 12 + 10 + 4 + 4 + 4 + 1 = 35$

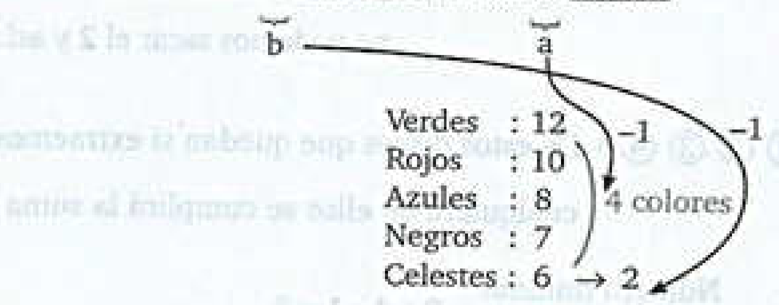
MÉTODO "S"

1) Si piden "a" colores, sacamos (a – 1) colores completos.
2) La cantidad de objetos: b de cada color; sacamos (b – 1) de los colores restantes.
3) Aumentamos 1 a lo extraído y ... ¡listo!

Verdes : 12 → 12
Rojos : 10 → 10 } 2 (3 – 1)
Azules : 8 → 4 (5 – 1)
Negros : 7 → 4 (5 – 1)
Celestes : 6 → 4 (5 – 1) } + 1

$12 + 10 + 3(4) + 1 = 35$

II. Piden 3 de cada color en 5 colores

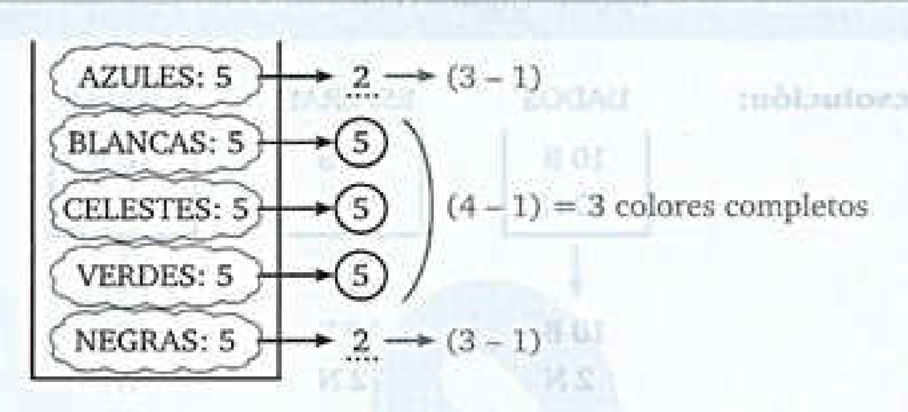


$\therefore\ 12 + 10 + 8 + 7 + 2 + 1 = 40$

PROBLEMA 9 En una caja hay 25 canicas del mismo tamaño pero diferentes colores: azules, blancas, celestes, verdes y negras (5 de cada color). ¿Cuántas se deben extraer al azar y como mínimo para tener la certeza de haber extraído 3 de cada color en 4 de los colores mostrados.

Resolución:

Apliquemos el Método "S" del problema anterior

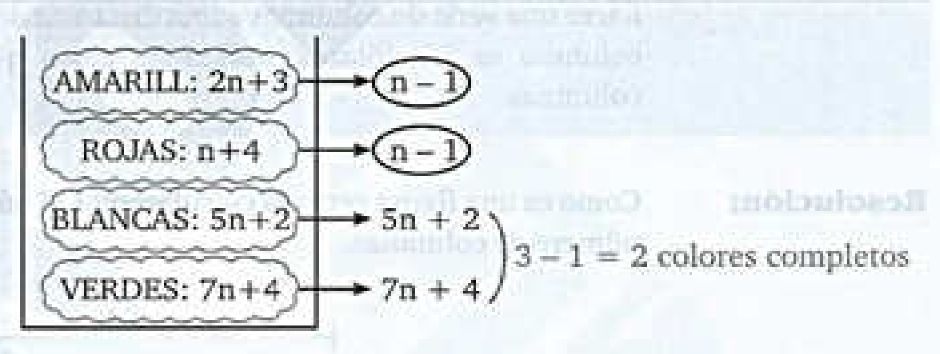


∴ N° mínimo de extracciones: $5 + 5 + 5 + 2 + 2 + ① = 20$

PROBLEMA 10 En una urna se tienen (2n + 3) esferas amarillas, (n + 4) rojas, (5n + 2) blancas y (7n + 4) verdes. ¿Cuántas esferas como mínimo se deberán extraer al azar para tener la seguridad de obtener "n" del mismo color en 3 de los colores? ($n \geq 2$)

Resolución:

Genial
Aplico la misma técnica

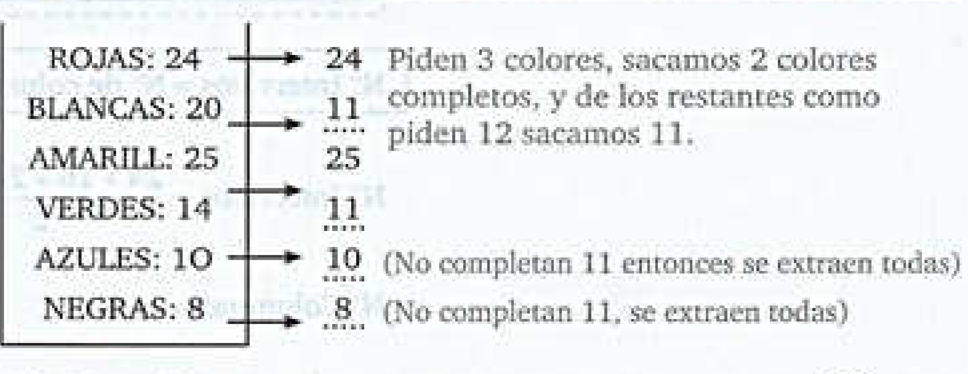


∴ N° mínimo de extracciones: $7n + 4 + 5n + 2 + n - 1 + n - 1 + ① = 14n + 5$

PROBLEMA 11 En un cajón hay 24 bolas rojas, 20 blancas, 25 amarillas, 8 negras, 14 verdes y 10 azules. ¿Cuál es el menor número de bolas que se han de sacar para tener la seguridad de haber extraído por lo menos 12 bolas en 3 de los 6 colores?

Resolución:

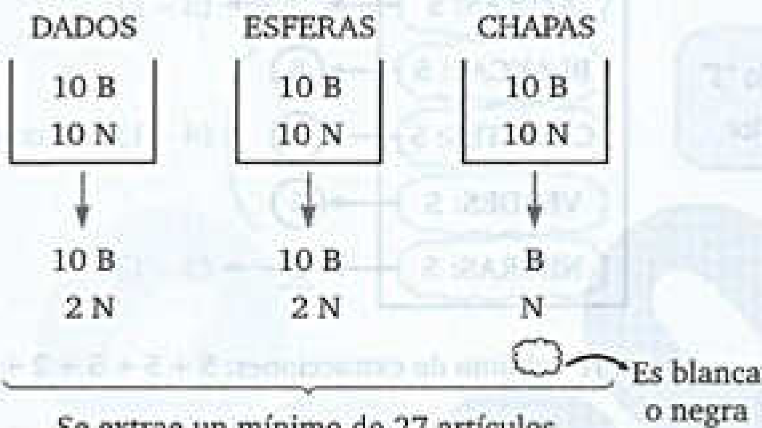
NOTA "S"
Las bolas que tienen una cantidad menor a lo que se pide, deben extraerse en su totalidad



∴ N° mínimo de extracciones: $25 + 24 + 11 + 11 + 10 + 8 + ① = 90$

PROBLEMA 12 Se tienen 3 cajas, en una hay 10 dados negros y 10 blancos, en la otra hay 10 esferas blancas y 10 negras y en la última hay 10 chapas blancas y 10 negras. ¿Cuál es el menor número de objetos que se deben sacar de las tres cajas para tener necesariamente entre ellos un par de dados, un par de esferas y un par de chapas, todos del mismo color?

Resolución:

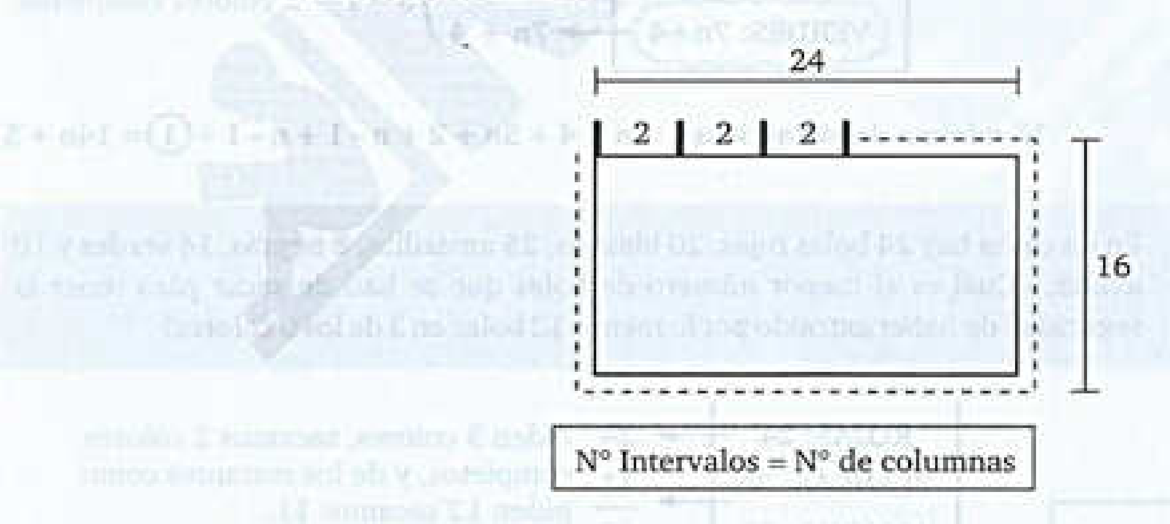


NOTA "S"

Para asegurarnos de obtener 2 dados y 2 esferas de cada color se debe extraer un mínimo de 12 de cada uno.

PROBLEMA 13 Se desea cercar un terreno rectangular de 16m × 24m, para lo cual es conveniente hacer una serie de columnas a una distancia de 2m una de otra. Si el costo de cada columna es 35 dólares, indicar el costo que originará levantar todas estas columnas.

Resolución: Como es una figura cerrada calcularemos el número de intervalos y ello indicará el número de columnas.



N° Intervalos = N° de columnas

$$\text{N° Intervalos} = \frac{24+16+24+16}{2} = 40$$

N° Columnas = 40

$\therefore$ Costo de todas las columnas : 40(35) = \$1400

PROBLEMA 14 A un paciente se le receta tomar una pastilla del tipo A cada 8 horas y dos pastillas del tipo B cada 7 horas. Si empieza su tratamiento tomando los dos tipos de pastillas simultáneamente, ¿en cuántas horas como mínimo habrá tomado 18 pastillas? **ADMISIÓN UNMSM 2016 - II**

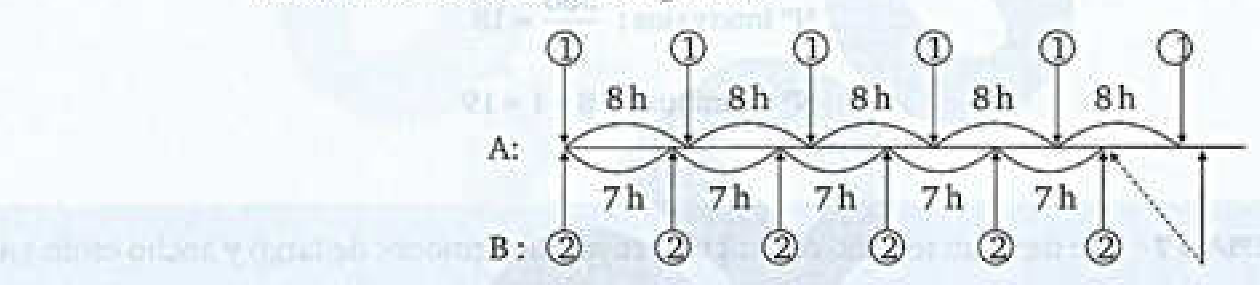
Resolución: Nos piden en cuántas horas como mínimo habrá tomado 18 pastillas.

De los datos : * 1 pastilla A cada 8 horas.

* 2 pastillas B cada 7 horas.

* Inicia su tratamiento simultáneamente con las 2 pastillas.

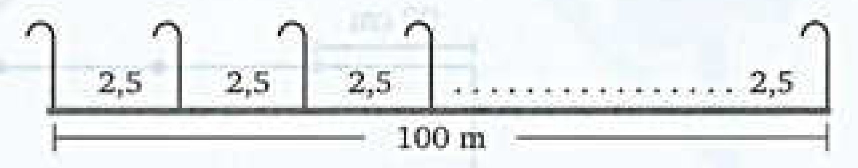
Analizamos los datos en un gráfico.



Del gráfico : Mínimo tiempo = 40 h

PROBLEMA 15 En una de las calles de cierta avenida se observa una cierta cantidad de postes de alumbra; la calle tiene 100 metros de largo y los postes están separados uno de otro en 2,5 m. Indique la cantidad de postes que hay en dicha calle.

Resolución:



$$\text{N° Intervalos}: \frac{100}{2,5} = 40$$

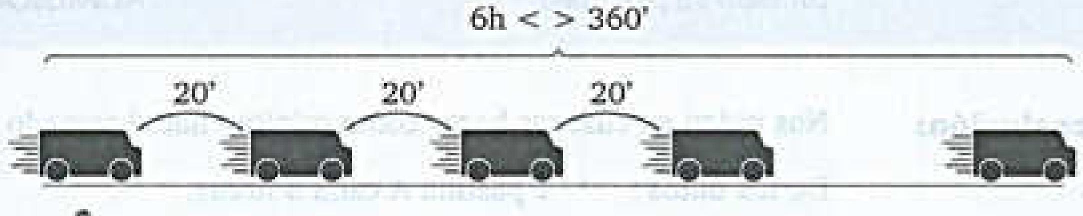
N° Partes : $40 + 1 = 41$

(aquí ocurre lo mismo)

∴ Total de partes : $2[41] = 82$

PROBLEMA 16 Un escolar está parado en una esquina poco transitada y nota que cada 20 minutos pasa un ómnibus. Si está parado durante 6 horas y apenas llegó pasó uno, ¿cuántos ómnibus llega a ver?

Resolución:



N° Intervalos + 1 = N° de Ómnibus

$$\text{N° intervalos}: \frac{360}{20} = 18$$

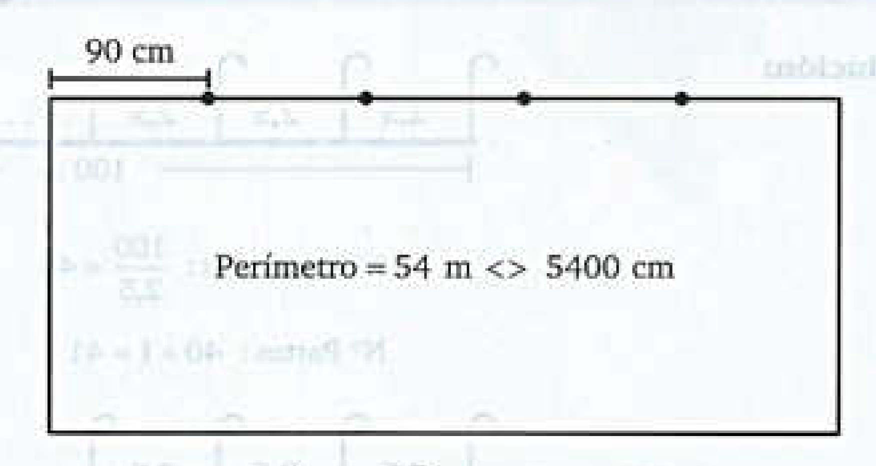
$$\therefore \quad \text{N° Ómnibus}: \ 18 + 1 = 19$$

PROBLEMA 17 Se tiene un terreno rectangular cuyas dimensiones de largo y ancho están en relación de 2 a 1 y su perímetro mide 54 m. Para cercar con mallas este terreno, se colocan postes (verticalmente) a lo largo del perímetro a una distancia de 90 cm uno del otro. ¿Cuántos postes son necesarios para cercar el terreno?

ADMISIÓN UNMSM 2016 - I

Resolución: Nos piden hallar el número de postes necesarios para cercar el terreno.

De los datos:



$$\text{N° postes} = \frac{\text{perímetro del terreno}}{\text{distancia entre postes}} = \frac{5400 \text{ cm}}{90 \text{ cm}}$$

$$\therefore \quad \text{N° postes} = 60$$

PROBLEMA 18 Se tiene una figura hexagonal de lados iguales, cada uno de los cuales mide 20 cm. ¿Cuántos puntos rojos podemos marcar a su alrededor (a lo largo de su perímetro) si entre ellos debe haber una distancia de 3 cm?

Resolución: Como es una figura cerrada:

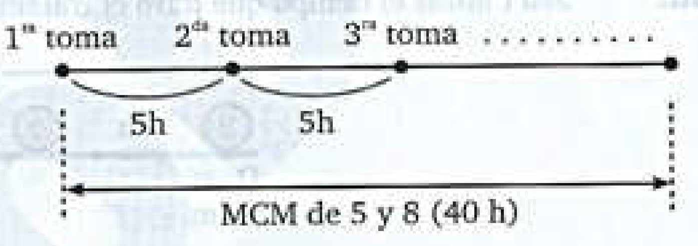
N° Intervalos = N° Puntos marcados

$$\text{N° Intervalos}: \frac{\text{Perímetro}}{\text{c / interv.}} = \frac{6 \times 20\text{cm}}{3\text{cm}} = 40$$

$\therefore$ N° Puntos marcados : 40

PROBLEMA 19 Un enfermo toma 3 pastillas cada 5 h y otro toma 2 pastillas cada 8 h, si empiezan tomando juntos ¿cuántas habrán tomado en total los 2 hasta el momento en que vuelvan ha tomar los 2 simultáneamente por 1ra vez?

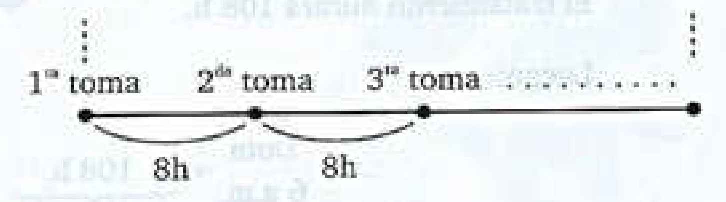
Resolución:



$\Rightarrow$ N° Intervalos : $\frac{40}{5} = 8$

N° de Tomas : $8 + 1 = 9$

N° Pastillas : $9(3) = 27$



$\Rightarrow$ N° Intervalos : $\frac{40}{8} = 5$

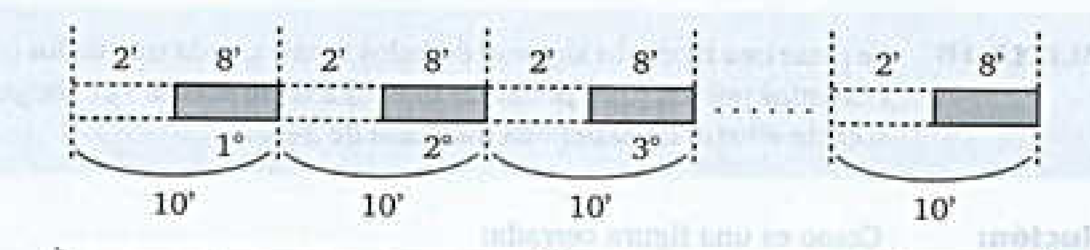
N° de Tomas : $5 + 1 = 6$

N° Pastillas : $6(2) = 12$

$\therefore$ Total pastillas : $27 + 12 = 39$

PROBLEMA 20 Una operadora emplea 8' en atender una llamada y al colgar el teléfono deja que timbre 2 min. ¿A cuántas personas atiende en su horario, si es desde las 8 a.m. hasta las 12 a.m.? sabiendo que apenas ingresa empieza a timbrar el teléfono?

Resolución:



$$4h <> 4(60) = 240'$$

$$\therefore \quad N° \text{ Personas: } \frac{240}{10} = 24$$

PROBLEMA 21 El médico de Luis le recomendó tomar dos pastillas cada 4 horas. Si empezó su tratamiento hoy Domingo a las 6:00 a.m. y el tratamiento terminará cuando en total haya tomado 56 pastillas, ¿en qué día y hora terminará su tratamiento?

Resolución: Sea t horas el tiempo que duró el tratamiento:

t h

(2) 4 h (2) 4 h (2) ......

Dom
6 a.m.

$$\# \text{ pastillas} = 2\left(\frac{t}{4}+1\right) = 56$$

$$t = 108$$

El tratamiento durará 108 h.

Luego:

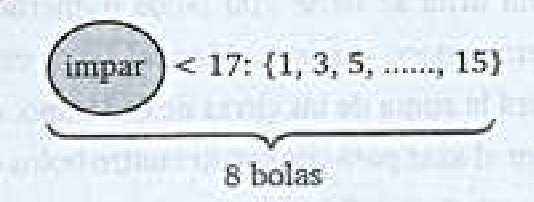
$$\therefore \quad \begin{matrix}\text{Dom}\\ \text{6 a.m.}\end{matrix} + \underbrace{108 \text{ h}}_{4 \text{ días } 12\text{h}} = \begin{matrix}\text{Jueves}\\ \text{18 hr}\end{matrix}$$

PROBLEMA 22 En una caja hay 20 bolas numeradas del 1 al 20. ¿Cuántas bolas como mínimo, se debe extraer al azar para tener la certeza de haber extraído entre ellas una bola con numeración impar menor que 17?

Resolución:

(1) (2) (3) ...... (20)

Debemos obtener:

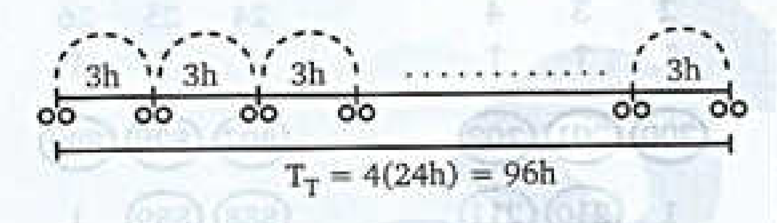


Primero salen las otras 12 bolas y luego 1 bola más para obtener lo que nos piden.

$\therefore$ Se extraen 12 + 1 = 13 bolas

PROBLEMA 23 Milagros debe tomar 2 pastillas cada 3 horas. ¿Cuántas pastillas tomará al cabo de 4 días?

Resolución:



$$N^\circ\ Tp = \left(\frac{96}{3}+1\right) \times 3 = 99$$

Número de tomas — N° de pastillas a tomar

NOTA "S"

Tengan en cuenta:

$$\begin{matrix}N^\circ \text{ total}\\ \text{de pastillas}\end{matrix} = \left(\frac{T_T}{T_U}+1\right)\times P$$

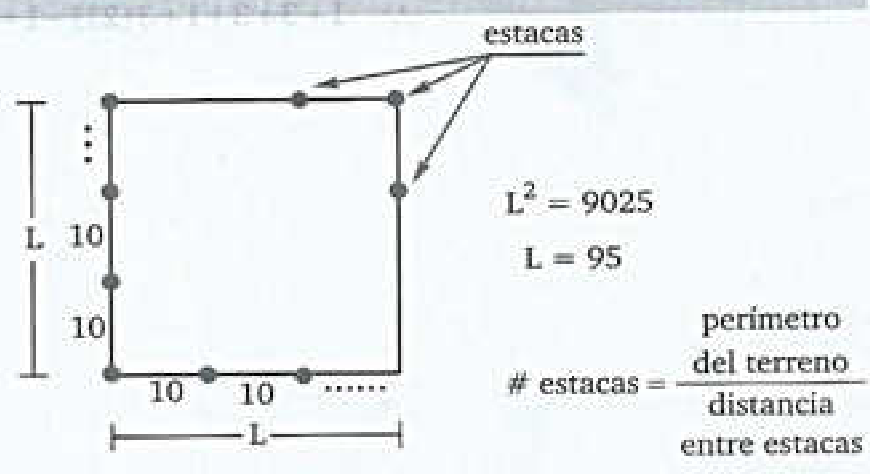
T_T : Tiempo total

T_U : Longitud del intervalo de tiempo.

P: N° pastillas a tomar

PROBLEMA 24 ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada, cuya área es de 9025 m^2, si las estacas se colocan cada 5m y en cada esquina se debe colocar un árbol?

Resolución:



$L^2 = 9025$

$L = 95$

$$\# \text{ estacas} = \frac{\text{perímetro del terreno}}{\text{distancia entre estacas}}$$

$$\therefore \quad \# \text{ estacas} = \frac{4 \times 95}{5} = 76$$

PROBLEMA 25 En una urna se tiene 700 bolos numerados del 200 al 899, cada uno con número entero distinto. Manuel va a extraer de la urna algunos bolos y anotará la suma de las cifras de cada uno. ¿Cuántos bolos como mínimo debe extraer al azar para conseguir cuatro bolos que tengan la misma suma de cifras en su numeración?

ADMISIÓN UNMSM 2017 - I

Resolución: De los datos:

Nos piden cuatro fichas con igual suma de cifras.

$$\therefore \quad \overbrace{1+3+3+1}^{\text{no cumplen}}+\overbrace{3(21)+1}^{\text{si cumplen}}=72$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En un cajón, hay 8 fichas rojas y 8 amarillas. ¿Cuál es el mínimo número de ellas que se han de sacar para tener la seguridad de haber extraído 3 del mismo color?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. En un cartapacio hay 10 borradores, 16 tajadores y 20 lapiceros, ¿cuántos útiles se deben extraer como mínimo para tener la seguridad de haber extraído 2 borradores y 3 tajadores?

A) 38 B) 29 C) 30
D) 37 E) 40

3. En una caja hay 15 lapiceros, de diferentes colores, 1 azul, 2 verdes, 3 celestes, 4 negros y 5 rojos. ¿Cuántos lapiceros se deben extraer al azar y como mínimo para tener la certeza de conseguir uno de cada color?

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 20

4. En una caja hay 10 pares de medias blancas y 12 pares de medias negras:
   I. ¿Cuál es el menor número que se deberá extraer de manera que se obtengan con seguridad 1 par utilizable?
   II. ¿Cuántas debemos extraer como mínimo para obtener 5 pares de medias negras?

A) 1 – 30 B) 2 – 28 C) 4 – 29
D) 3 – 30 E) 5 – 25

5. En una urna hay 10 esferas amarillas, 12 azules y 15 verdes. ¿Cuál es el mínimo número que se debe extraer al azar de manera que se obtengan 10 de un mismo color?

A) 27 B) 28 C) 32
D) 29 E) 30

6. Se tienen 10 monedas de S/.1; 23 de S/.0,50 y 30 de S/.0,20. ¿Cuántos se deben extraer al azar y como mínimo para obtener 10 monedas del mismo valor en 2 de los 3 valores?

A) 29 B) 30 C) 27
D) 25 E) 20

7. Ángela tiene en una urna 10 fichas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es el mínimo número que ha de extraer para tener la seguridad de haber sacado 3 con numeración consecutiva?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

8. Se tiene 3 cajas, en una hay 10 dados negros y 10 blancos, en la otra hay 10 esferas blancas y 10 negras y en la última hay 10 chapas blancas y 10 negras. ¿Cuál es el menor numero de objetos que se deben sacar de las tres cajas para tener necesariamente entre ellos un par de dados, un par de esferas y un par de chapas, todos del mismo color?

A) 40 B) 41 C) 43
D) 45 E) 47

9. A la orilla de un lago se encuentra un campesino con una canoa, una cabra, un lobo hambriento y un paquete de alfalfa. ¿Cuántas veces como mínimo debe cruzar el lago, si en la canoa solo entran 2 elementos?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. Francisco tiene en un cajón 7 casete de "Proyección", 4 de "Wayanay", 8 de "Savia Andina" y 5 de "Jharkas"; saca uno por uno y al azar. ¿Cuántos tendrá que sacar como mínimo para obtener, a lo seguro, 2 casetes de 2 de los grupos folklóricos?
Obs: Las cintas de cada grupo son iguales.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

11. Una caja contiene "x" esferas azules, "y" verdes y "c" negras. Se extrae una por una, ¿cuál es el mínimo número que se debe sacar para tener con certeza entre las extraídas por lo menos 2 de colores diferentes?

A) $x+3$ B) $x+2$ C) $x+4$
D) $x+5$ E) $x+1$

12. Se tienen plumones en "P" colores diferentes. Se escoge uno por uno y al azar. ¿Cuál es el mínimo número que se deben extraer para estar seguro de tener por lo menos "Q" del mismo color? ($P > Q$)

A) $P(Q-1)+1$
B) $P(Q+1)+1$
C) $P(Q+2)+1$
D) $P(Q-2)+1$
E) $P(Q+3)-1$

13. En una caja hay fichas, "a" blancas, "2b" verdes y "3c" rojas. Se realizan extracciones al azar de una en una. ¿Cuántas como mínimo se deben sacar para tener la certeza de obtener por lo menos una de cada color? (Considere: $a > 2b > 3c$)

A) $b+2a+1$
B) $a+3b+2$
C) $a+2b+1$
D) $a+3b-1$
E) $a+3b+1$

14. En una caja hay 12 pares de guantes de color blanco y 5 pares de guantes de color negro:

I. ¿Cuántos guantes se deben extraer como mínimo para tener con seguridad 2 pares se guantes blancos utilizables?
II. ¿Cuántos guantes se deben extraer como mínimo para tener la certeza de obtener 3 pares de guantes negros y 4 pares de guantes blancos todos utilizables?

A) 24 – 32 B) 22 – 30 C) 20 – 36
D) 25 – 30 E) 24 – 30

15. En una urna se tienen $(2n+3)$ esferas amarillas; $(n+4)$ rojas; $(5n+2)$ blancas y $(7n+4)$ verdes. ¿Cuántas esferas como mínimo se deberán extraer al azar para tener la seguridad de obtener "n" del mismo color en 2 de los colores? ($n \geq 2$)

A) $10n+1$
B) $10n+5$
C) $10n+2$
D) $11n+2$
E) $12n+1$

16. En la reunión de padres de familia del colegio "Bertolt Brecht" se encuentran 300 personas. ¿Cuántas personas como mínimo deberán llegar para que en dicha reunión tengamos la seguridad de que estén presentes dos personas con la misma fecha de cumpleaños?

A) 60 B) 62 C) 64
D) 65 E) 67

17. Se tienen bolos numerados del 1 al 20. ¿Cuántos bolos como mínimo se deberán extraer para estar completamente seguro de que la suma de los números de los bolos extraídos sea mayor o igual que 70?

A) 4 B) 11 C) 6
D) 12 E) 16

18. En una urna se tienen (2n + 3) esferas amarillas, (n + 4) rojas, (5n + 2) blancas y (7n + 4) verdes. ¿Cuántas esferas como mínimo se deberán extraer al azar para tener la seguridad de obtener "n" del mismo color en 2 de los colores? ($n \geq 2$)

A) 15n + 9 B) 13n + 5 C) 10n + 2
D) 8n + 11 E) 12n + 8

19. En una caja hay 5 pares de medias azules y 8 pares de medias negras. ¿Cuántas medias como mínimo se deberán extraer para que entre las extraídas se encuentren:

a. Un par de medias del mismo color.
b. Un par de medias utilizable.

A) 3 – 1 B) 2 – 3 C) 1 – 2
D) 3 – 3 E) 2 – 2

20. Se debe colocar una cortina en una ventana amplia, para lo cual la cortina debe tener 9m de largo. Si los ojalillos deben estar separados 1uno de otro, ¿cuántos de éstos se colocarán? (no se colocarán ojalillos en el límite de la tela)

A) 80 B) 84 C) 86
D) 89 E) 72

21. Se quiere pegar en la pared un listón de 1,20m de longitud con clavos cada 15cm, ¿cuántos serán necesarios?

A) 6 B) 9 C) 10
D) 12 E) 8

22. Jorge desea confeccionar una cinta métrica, haciendo marcas cada 5 cm (es decir 0; 5; 10; 15; ...) y dispone de una cinta de 3,5 m. ¿Cuántas marcas tiene que hacer?

A) 70 B) 71 C) 72
D) 73 E) 75

23. Un cuaderno rayado tiene 22 cm de alto y las líneas de una página están separadas cada 4 mm. ¿Cuántas líneas hay en cada página?

A) 54 B) 53 C) 55
D) 56 E) 60

24. Para una exposición de pintura se ha dispuesto una pared de 20 m de largo en la que se colocarán cuadros en fila cada 3 m. ¿Cuál es la mayor cantidad de cuadros que se podrán ubicar?

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

25. Para un compromiso social se deben ubicar a lo largo de una pared una fila de sillas, una a continuación de otra, logrando ubicar 200 sillas en dicha pared que tiene 90 m de largo. Indicar el ancho de una silla.

A) 45 cm B) 44 cm C) 48 cm
D) 49 cm E) 50 cm

26. Carolina está en cama por una enfermedad, por la que el médico le recomendó tomar cada 6 horas una pastilla durante 5 días. ¿Cuántas pastillas tomó si lo hizo desde el inicio del primer día hasta final del último día?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 24 E) 26

27. En la parte exterior de una tienda se han colocado en paralelo, cierta cantidad de bicicletas, separadas 40 cm una de otra. Si la distancia de la primera a la última bicicleta es 4,8 m, calcule la cantidad de éstas.

A) 12 B) 13 C) 11
D) 14 E) 10

28. En una caja hay 15 lapiceros, de diferentes colores, 1 azul, 2 verdes, 3 celestes, 4 negros y 5 rojos. ¿Cuántos lapiceros se deben extraer al azar y como mínimo para tener la certeza de conseguir uno de cada color?

A) 13 B) 15 C) 11
D) 9 E) 10

29. Se quiere ubicar a lo largo de una pared de 30 m una serie de cuadros de 40 cm de largo, uno a continuación de otro. ¿Cuántos se podrán ubicar como máximo?

A) 70 B) 72 C) 73
D) 75 E) 78

30. Un aro metálico de 3 m, de longitud se desea cortar en trozos de 25 cm cada uno. Indicar la cantidad de cortes que se deben dar.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 17

31. alrededor de una mesa circular se ubican sillas cada 2m. Si el perímetro de la mesa es 16 m, ¿cuántas personas se pueden sentar como máximo en la mesa?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

32. Un escolar está parado en una esquina poco transitada y nota que cada 20 min pasa un ómnibus. Si está parado durante 6 horas y apenas llegó pasó uno, ¿Cuántos ómnibus llega a ver?

A) 17 B) 19 C) 18
D) 20 E) 21

33. En una urna hay 10 esferas amarillas, 12 azules y 15 verdes. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se debe extraer al azar de manera que se obtengan 10 de un mismo color?

A) 31 B) 33 C) 29
D) 37 E) 28

34. Se tienen 10 monedas de S/.1; 23 de S/.0,50 y 30 de S/.0,20. ¿Cuántas monedas se deben extraer al azar y como mínimo para obtener 10 monedas de mismo valor en 2 de los 3 valores?

A) 53 B) 29 C) 21
D) 25 E) 49

35. En una urna se tiene esferas: 10 verdes, 8 azules, 6 celestes y 4 blancas.

I. ¿Cuántas debemos extraer como mínimo para obtener con seguridad 3 de cada color.

II. ¿Cuántas debemos extraer como mínimo para obtener con seguridad 5 de cada color, en 3 de los colores dados?

A) 29 – 27 B) 27 – 27 C) 23 – 30
D) 31 – 29 E) 27 – 29

36. En un cartapacio hay 24 plumones rojos, 20 marrones, 25 amarillos, 8 negros, 14 verdes y 10 azules.

I. ¿Cuál es el menor número que se han de sacar para tener la seguridad de haber extraído por lo menos 12 plumones de 3 colores dados?

II. ¿Cuál es el mínimo número que hay que extraer al azar para tener la seguridad de haber extraído uno de los colores por completo?

A) 90 – 86 B) 80 – 96 C) 90 – 95
D) 98 – 90 E) 90 – 96

37. Ángela tiene en una urna 15 fichas numeradas del 1 al 15. ¿Cuál es el mínimo número que ha de extraer para tener la seguridad de haber sacado 3 con numeración consecutiva?

A) 10 B) 14 C) 12
D) 11 E) 7

38. Se tiene una bolsa con 7 caramelos de fresa, 5 caramelos de limón y 9 caramelos de menta. ¿Cuál es el mínimo número de caramelos que hay que sacar para tener la seguridad de haber extraído por lo menos 1 de cada sabor?

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 20

39. En un cajón hay 6 esferas rojas y 6 esferas blancas. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se han de sacar para tener la seguridad de haber extraído 3 del mismo color?

A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 7

40. En una caja hay 10 bolsas blancas, 9 azules y 5 rojas. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que se han de sacar para tener la seguridad de haber extraído por lo menos 1 de cada color?

A) 15 B) 14 C) 18
D) 20 E) 24

41. En una caja hay 25 canicas del mismo tamaño pero de diferentes colores: azules, blancos, celestes, verdes y negras (5 de cada color). ¿Cuántas se deben extraer al azar y como mínimo para tener la certeza de haber extraído 4 de color azul y 4 de color negro?

A) 20 B) 21 C) 23
D) 24 E) 25

42. Se tienen fichas numeradas del 1 al 10. ¿Cuántas se deben extraer como mínimo y al azar para obtener con certeza fichas con los que pueda formarse el número 6543?

A) 9 B) 10 C) 11
D) 8 E) 7

43. En una caja hay 8 pares de calcetines de color blanco, 8 pares de color negro; y en otra caja 8 pares de guantes blancos y otros tantos pares negros:

I. ¿Cuántos calcetines y guantes es necesario sacar de cada caja al azar y como mínimo para conseguir un par de calcetines y un par de guantes del mismo color?

II. ¿Cuánto debe extraerse como mínimo para conseguir un par de guantes y un par de calcetines utilizables?

A) 20 – 21 B) 13 – 20 C) 22 – 22
D) 24 – 19 E) 19 – 20

44. Se tiene una figura hexagonal de lados iguales, cada uno de los cuales mide 20 cm. ¿Cuántos puntos rojos podemos marcar a su alrededor (a lo largo de su perímetro) si entre ellos debe haber una distancia de 4 cm?

A) 36 B) 32 C) 30
D) 28 E) 24

45. El ancho de un terreno es 40 m. Si en todo el perímetro se colocan 80 estacas cada 5 m, calcule el largo de dicho terreno.

A) 160 m B) 150 m C) 140 m
D) 120 m E) 110 m

46. Un aro metálico de 3m, de longitud se desea cortar en trozos de 25 cm c/u. Indicar la cantidad de cortes que se deben dar.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

47. Se tienen fichas numeradas del 1 al 40. Se han extraído 5 fichas las cuales han resultado tener todas números mares. ¿Cuántas fichas como mínimo se deberán extraer adicionalmente para estar seguro que en el total de fichas extraídas se tienen 2 fichas cuya suma sea un número impar mayor que 22?

A) 15 B) 16 C) 18
D) 21 E) 22

48. Para un compromiso social se debe ubicar a lo largo de una pared una fila de sillas, una a continuación de otra, logrando ubicar 200 sillas en dicha pared que tiene 90 m de largo. Indicar el ancho de una silla.

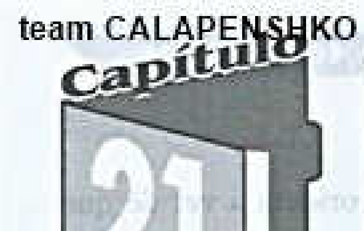
A) 4,5 m B) 40 cm C) 45 cm
D) 46 cm E) 44 cm

49. Carolina está en cama por una enfermedad, por la que el médico le recomendó tomar cada 6 horas una pastilla durante 5 días. ¿Cuántas pastillas tomó si lo hizo desde el inicio del primer día hasta final del último día?

A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

50. Alrededor de una mesa circular se ubican sillas cada 2m. Si el perímetro de la mesa es 16 m, ¿cuántas personas se pueden sentar como máximo en la mesa?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10



Razonamiento Abstracto y Suficiencia de Datos

CAPACIDADES

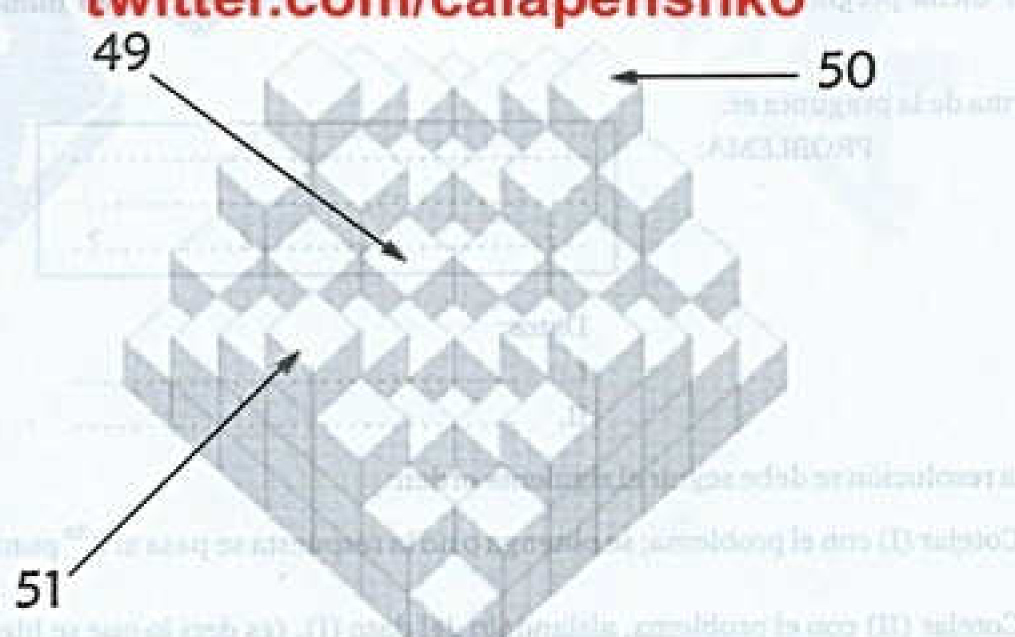
- Deducir y calcular correctamente el área de una región plana.
- Comparar y cuantificar correctamente nuevas regiones planas en base a conceptos básicos.
- Relacionar con situaciones de nuestro entorno en quehaceres cotidianos

TEST DE RAZONAMIENTO ABSTRACTO (RA)

Las pruebas psicotécnicas de razonamiento evalúan la capacidad o aptitud para resolver problemas lógicos, deduciendo ciertas consecuencias de la situación planteada. O sea, intentan descubrir la capacidad de razonamiento y análisis, factores mentales ambos muy vinculados a la inteligencia general.

El razonamiento es una de las aptitudes mentales primarias, es decir, uno de los componentes de la inteligencia en general. El razonamiento abstracto, junto con el razonamiento verbal, son los ingredientes de las habilidades cognitivas.

En los últimos años estos test de razonamiento abstracto están siendo cada vez más utilizados, tanto en selección de personal como en psicología escolar. Los test de razonamiento abstracto pertenecen al grupo de test de series gráficas, cuyos ítemes están colocados de tal manera que el lector ha de descubrir una ley interna que relaciona a los elementos gráficos (fase inductiva) para, después, encontrar el correlato correspondiente (fase deductiva).



INTRODUCCIÓN

Son formas de medir es un estudiante su aprendizaje, principalmente se orienta a ver de qué manera calcula, compara (en el caso de comparación cuantitativa) y en el caso de suficiencia de datos a ver cuán seguro se encuentra de lo que ha aprendido y además cuán minucioso es en la verificación de sus conceptos para ver la factibilidad de una solución.

Estas preguntas generalmente lo toman en universidades como la PUCP (Pontificia Universidad Católica del Perú); UNI (Universidad Nacional de Ingeniería); UNCP (Universidad Nacional del Centro del Perú) ... etc. y también en exámenes de ascensos en empresas privadas, instituciones militares, instituciones públicas del estado.

Para un mejor aprendizaje cada tema lo dividiremos en 3 partes que serán:

- Razonamiento Matemático 1 (lógico – numérico)
- Razonamiento Matemático 2 (algebraico)
- Razonamiento Matemático 2 (geométrico)

En cada una de estas partes se tendrá en cuenta principalmente el factor de habilidad, creatividad e ingeniosidad que el alumno deberá poner para salir airoso de los problemas; no se busca rigurosidad, ni formar grandes matemáticos sino motivar al manejo de los conceptos matemáticos de una manera básica y aplicativa en situaciones de su entorno.

SUFICIENCIA DE DATOS

En ésta modalidad de preguntas nos darán un problema con datos parciales y una interrogantes. Para hallar dicha pregunta debemos cotejarla con los datos que nos darán numerados en romanos (I) y (II).

La forma de la pregunta es:

PROBLEMA:

....
....
..........................¿.........?.

Datos:
I. ....
II. ....

Para la resolución se debe seguir el siguiente orden:

1ro Cotejar (I) con el problema; se obtenga o no la respuesta se pasa al 2do punto.

2do Cotejar (II) con el problema, aislandolo del dato (I). (es deci lo que se hizo en el 1er punto no se considera para nada)

team CALAPENSHKO

3ro Sólo si en ninguno de los pasos anteriores se halló la respuesta, se debe considerar I y II simultáneamente en el problema original.

Si no se encuentra solución se marcará la alternativa correspondiente a faltan datos, si con (I) se halló la respuesta y con (II) no se marca la alternativa que indique ello, Si con (II) se halló y con (I) no se pudo se marca lo correspondiente y si con (I) o (II) independientemente se halla la respuesta se marca la alternativa correspondiente.

DATO (I) ✓ y DATO (II) ✕ .... (A) Sólo I es suficiente

DATO (I) ✕ y DATO (II) ✓ .... (B) Sólo II es suficiente

DATO (I) ✓ y DATO (II) ✓ .... (C) I y II a la vez son suficientes

DATO (I) ✓ o DATO (II) ✓ .... (D) I o II por separado son suficientes

DATO (I) ✕ y DATO (II) ✕ .... (E) Falta información

NOTA

Es importante saber que un dato es suficiente sólo sí con ello se puede hallar un único valor al problema planteado.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Se requiere determinar el número de asistentes a una reunión de padres de familia. Información brindada:

I. El 60% de los asistentes son mujeres

II. El número de mujeres que asistieron excede en 10 al número de hombres

Para resolver el problema

A) La información I es suficiente.
B) La información II es suficiente.
C) Es necesario emplear ambas informaciones a la vez.
D) Cada una de las informaciones, por separado, es suficiente.
E) La información brindada es insuficiente.

2. Si: $P(x+3) - P(x) = 2x + 1$, hallar: $P(4)$.

I. $P(0) = 2$

II. $P(1) = 3$

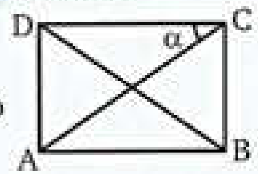
A) I B) II C) I y II
D) I o II E) Faltan datos

3. La pregunta que a continuación se propone está acompañada de las informaciones I y II. Analizar e identificar la información suficiente para responder: la figura ABCD ¿es un cuadrado?

Información:

I. $\alpha = 45°$

II. Medida del ángulo ADC es 90°



A) Solo la información I.
B) Solo la información II.
C) Ambas informaciones a la vez.
D) Cada una de las informaciones por separado.
E) La información brindada es insuficiente.

4. Hallar : $E = m^3 + \dfrac{1}{m^3}$, $m > 0$

I. $m^2 + \dfrac{1}{m^2} = 4$ II. $m + \dfrac{1}{m} = \sqrt{6}$

A) I B) II C) I y II
D) I o II E) Falta Datos

5. Determinar si: $x(3x + 5)$ es par.

I. "x" es par.

II. "x" es impar.

A) I B) II C) I y II
D) I o II E) Falta Datos

6. Si : $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{b}{c}$; "a", "b" y "c" $\in \mathbb{Z}$.

Entonces, para hallar "b" se necesita:

I. $a + c = 20$ II. $ac = 64$

A) I B) II C) I y II
D) I o II E) Falta Datos

7. ¿Cuánto gasté si tenía S/240 para hacer compras?

I. Gasté los 3/5 de lo que no gasté.

II. Lo que no gasté excede en S/60 a lo que gasté.

A) I B) II C) I y II
D) I o II E) Falta Datos

8. ¿Cuál es el radio del círculo de centro O?

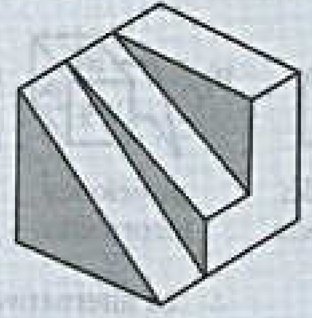
I. El área del circulo es 25π.

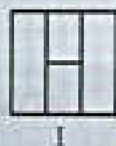
II. El área del círculo dividido entre el diámetro del círculo es igual a π veces la mitad del radio del círculo.

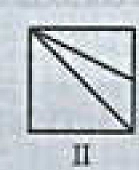
A) I B) II C) I y II
D) I o II E) Falta Datos

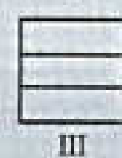
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Señale la alternativa correcta, después de determinar las vistas que corresponden al sólido mostrado. ADMISIÓN UNI 2016 - I

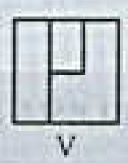



I

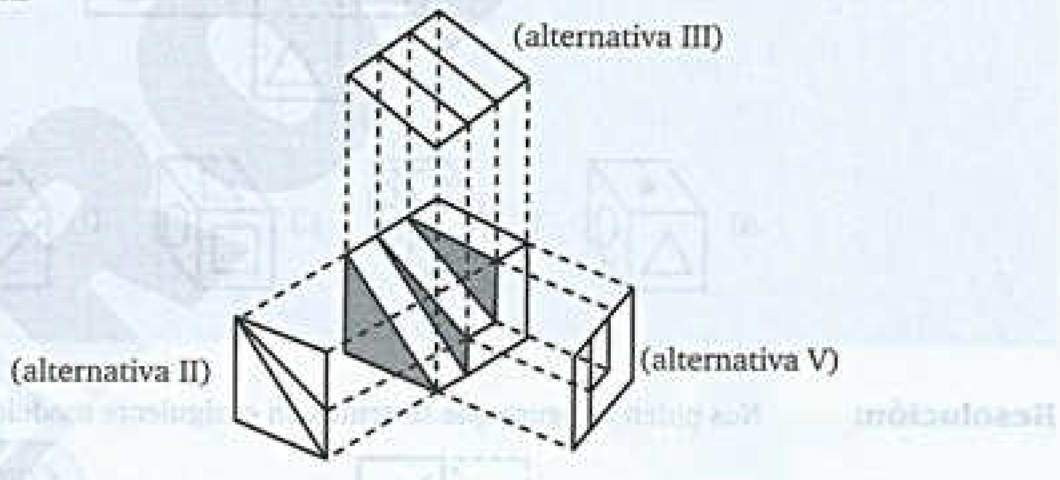

II


III

IV

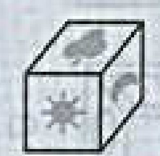

V

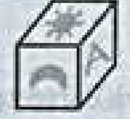
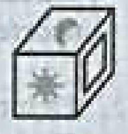
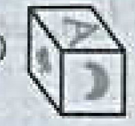
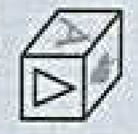
Resolución: Primero obtendremos las vistas y luego determinamos a qué alternativas corresponden



∴ Son las vistas II, III y V

PROBLEMA 2 Si las seis caras tienen figuras distintas. ¿Cuál es la figura que esta en concordancia con ADMISIÓN UNI 2017 - II



A) B)  C)  D)  E) 

Resolución: Nos piden la figura que concuerda con la primera.

Las seis caras tienen figuras distintas.

Nuestra única referencia son las tres caras visibles

A)
posición incorrecta

B)
posiciones incorrectas

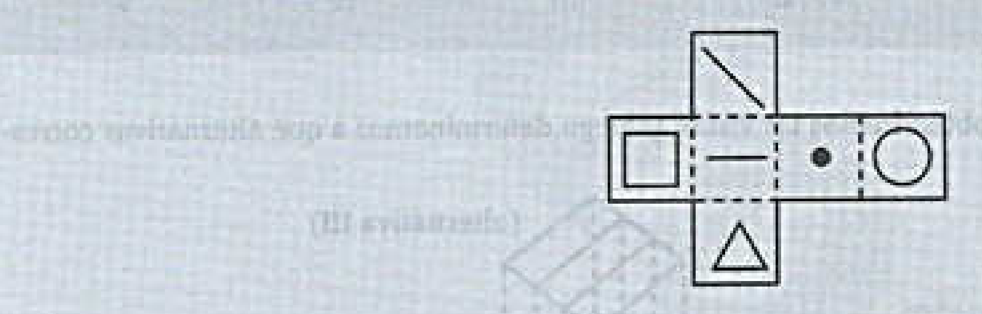
C)
posiciones correctas

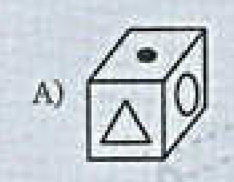
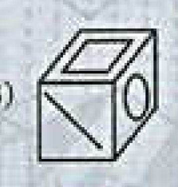
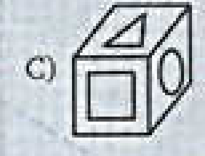
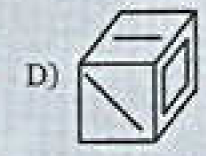
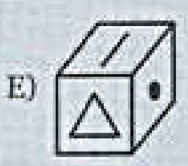
D)
posiciones incorrectas

E)
posición incorrecta

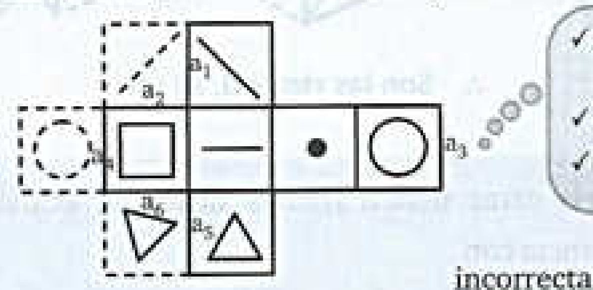
∴ La alternativa correcta es la C.

PROBLEMA 3 ¿Cuál de las figuras se arma con el modelo? ADMISIÓN UNI 2017 - II

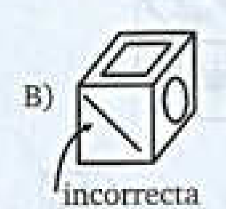


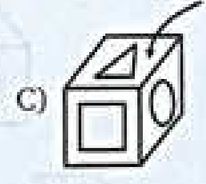
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

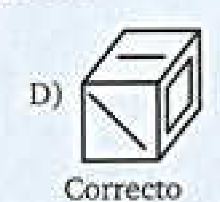
Resolución: Nos piden la figura que se arma con el siguiente modelo.



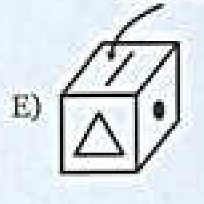
- ✓ Nota que a_1 y a_2 se juntan y forman una de las aristas.
- ✓ De igual manera a_3 y a_4.
- ✓ También a_5 y a_6

A) 
incorrecta

B) 
incorrecta

C) 
incorrecta

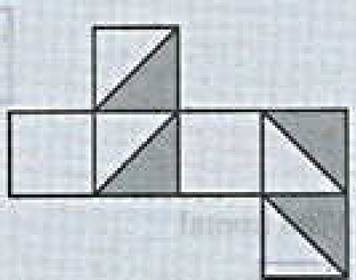
D) Correcto

E) 
incorrecta

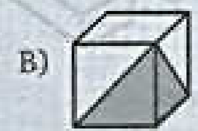
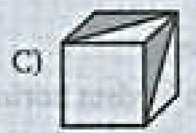
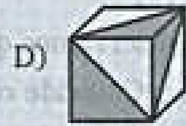
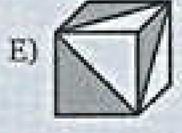
∴ La alternativa correcta es la D.

PROBLEMA 4 En la figura siguiente se muestra el desarrollo de la superficie de un cubo.

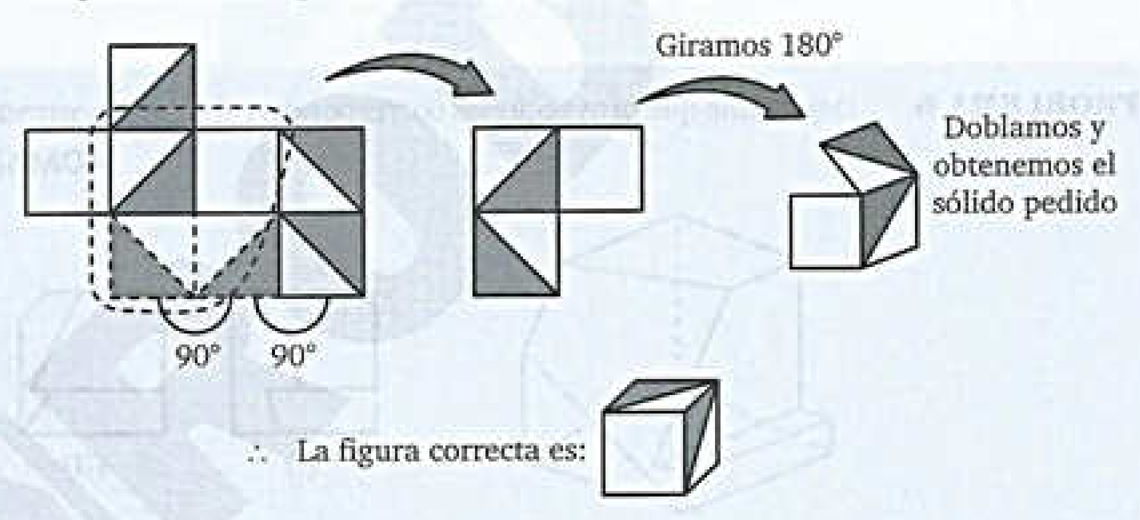
ADMISIÓN UNI 2016 - II



Indique el cubo construido a partir de él

A) B)  C)  D)  E) 

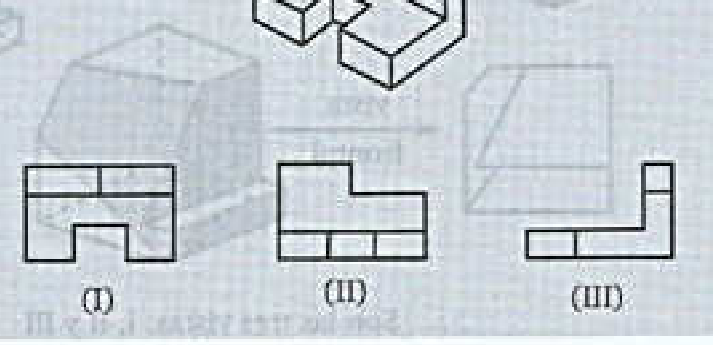
Resolución: Nos piden el solido que se construye a partir del gráfico



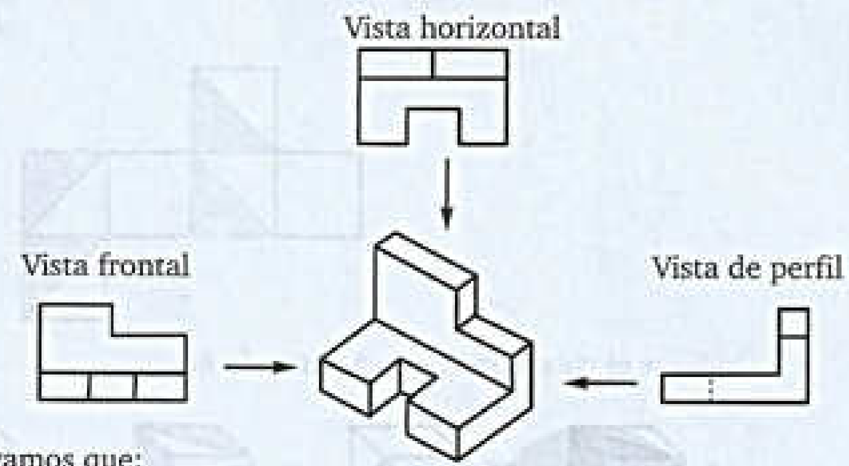
∴ La figura correcta es:

PROBLEMA 5 Indique cuáles son las posibles vistas bidimensionales de la figura tridimensional

ADMISIÓN UNI 2016 - II



Resolución: Visualicemos las 3 vistas del sólido



Observamos que:

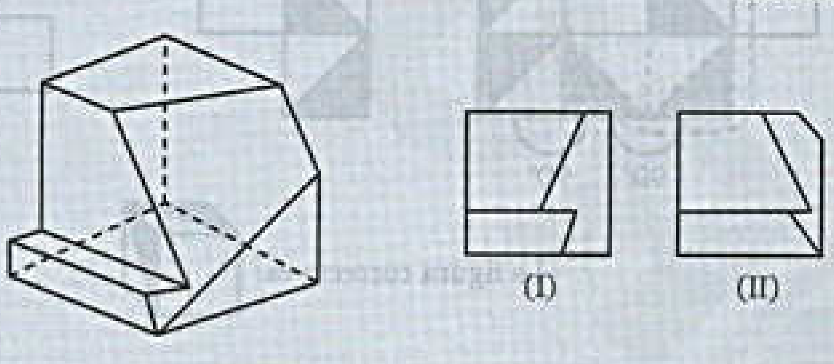
I. Coincide con la vista horizontal.

II. Coincide con la vista frontal.

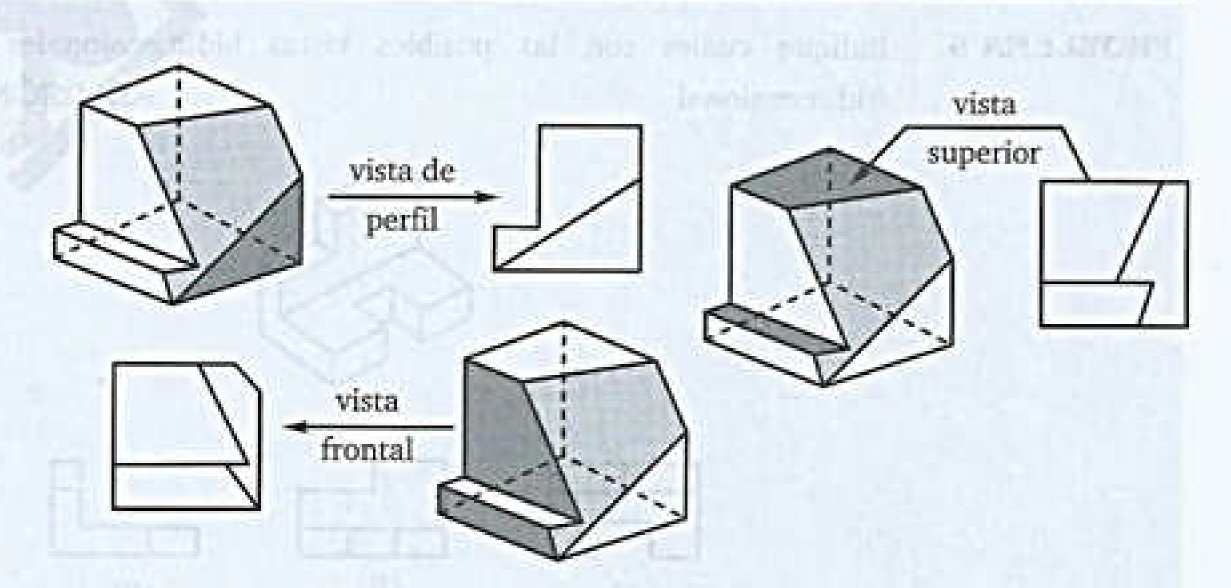
III. No coincide con ninguna vista.

Por lo tanto, coincide solo I y II

PROBLEMA 6 Determine qué proyecciones corresponden al sólido mostrado.

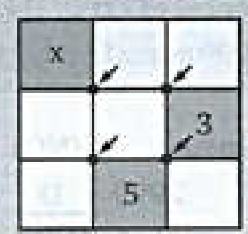


Resolución:



∴ Son las tres vistas: I, II y III

PROBLEMA 7 Hallar el valor de x sabiendo que los números que se deben colocar son todos diferentes del 1 al 9 y ya se colocaron al 3 y 5.



DATOS:

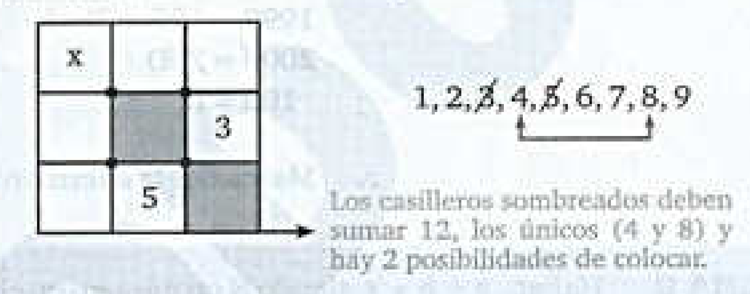
I. Los 4 casilleros que son adyacentes al punto que indica la flecha suman 20.

II. El casillero de la esquina inferior derecha contiene un número cuadrado perfecto.

Resolución:

- Analizando con (I) solamente: .... (NO)

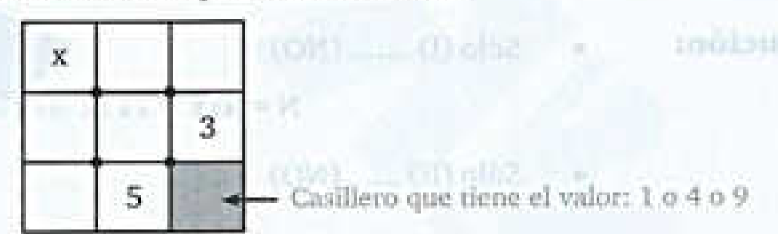
  La suma de 4 casilleros alrededor de cada punto es 20.



Por tanto van a haber 2 posibilidades para x.

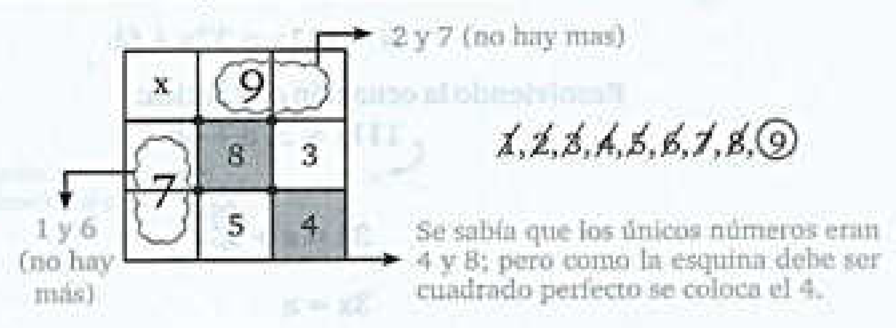
- Analizando con (II) solamente: .... (NO)

  No consideremos la suma 20 pues es del dato (I)



Hay muchas posibilidades de distribución. Por tanto no se puede hallar: x

- Ahora analizamos (I) y (II) simultáneamente:



El único número para x es 9

$\therefore$ Marcamos la alternativa (C)

PROBLEMA 8 En una división inexacta hallar D.
DATOS:
I. Al dividir 2999 entre D se obtiene 19 de cociente
II. Al dividir 1999 entre D se obtiene 19 de cociente y el residuo es máximo.

Resolución:

- Con (I) solamente .... (NO)

$$\begin{array}{r|l} 2999 & D \\ \hline r & 19 \end{array} \Rightarrow 2999 = 19D + r$$

(Ecuación con 2 variables, tiene varias soluciones)

- Con (II) solamente ...... (SI)

$$\begin{array}{r|l} 1999 & D \\ \hline (D-1) & 19 \end{array}$$

Residuo máximo es uno menos que el divisor

$$1999 = 19D + D - 1$$
$$200\not{0} = 2\not{0}D$$
$$100 = D$$

∴ Marcamos la alternativa (B)

PROBLEMA 9 Hallar: a + b + x siendo N un número en el sistema decimal.
DATOS:
I. $N = \overline{xxx}$
II. $N = \overline{aba}_{(6)}$

Resolución:

- Sólo (I) .... (NO)

$N = \overline{xxx} = 111x$ (Hay varias opciones para x desde 1 al 9)

- Sólo (II) ...... (NO)

$N = \overline{aba}_{(6)} = a \times 62 + b \times 6 + a$
$N = 37a + 6b$ (Tenemos una ecuación diofántica y hay varias soluciones)

- (I) y (II) simultáneamente ...... ( )

$$N = 111x = 37a + 6b$$

Resolviendo la ecuación diofántica:

$$111x = 37a + 6b$$
$\div 37$

$$3x = a + \frac{6b}{37}$$

Como b es cifra el único valor será: 0

$$3x = a$$

x	a
↓	↓
1	3 ✓
2	6
3	9

(2 y 6; 3 y 9): No puede ser pues en el numeral a debe ser menor que la base 6

$a = 3 ; x = 1 ; b = 0$

Entonces: $a + b + x = 3 + 0 + 1 = 4$

$\therefore$ Marcamos la alternativa (C)

PROBLEMA 10 ¿Es x un número de 2 cifras?

DATOS:

I. $x = \sqrt{\overline{abc}}$; siendo x entero

II. $\overline{abc}$ y $\overline{mnp}$ son números triangulares consecutivos. $\sqrt{\overline{abc} + \overline{mnp}} = x$

Resolución:

- Sólo (I) .... (SI)

$x = \sqrt{\overline{abc}}$; como x es entero $\overline{abc}$ debe tener raíz exacta

$x = \sqrt{\overline{abc}}$ → 100; 121; 144; ...; 961

↓ 10, 11, 12, ⋮, 31 } Siempre resulta de 2 cifras

- Sólo (II) ...... (SI)

Números triangulares:

1, 3, 6, 10, 15, ..., 105, 120, 136, ..., 946, 990

Como $\overline{abc}$ y $\overline{mnp}$ son triangulares consecutivos tomaremos:

$\overline{abc}$ $\overline{mnp}$

$105 + 120 = 225$; $\sqrt{225} = 15 = x$ (2 cifras)

$120 + 136 = 256$; $\sqrt{256} = 16 = x$ (2 cifras)

⋮ ⋮

$946 + 990 = 1936$; $\sqrt{1936} = 44 = x$ (2 cifras)

Se observa que x siempre es de 2 cifras tomando los menores y mayores valores para $\overline{abc}$ y $\overline{mnp}$.

$\therefore$ Marcamos la alternativa (D)

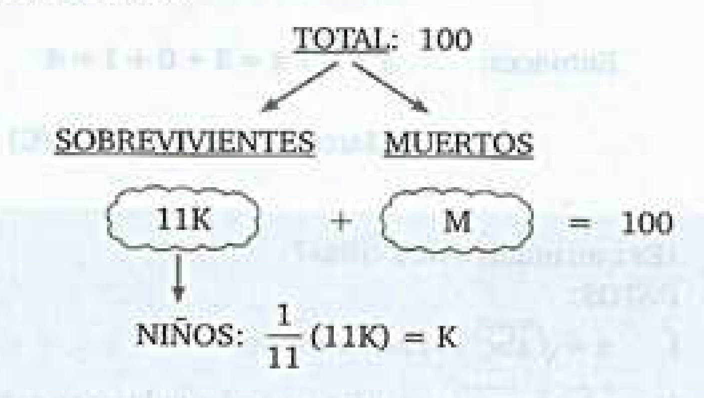
PROBLEMA 11 En un barco viajaban 100 personas ocurrido un naufragio se observó que la onceava parte de los sobrevivientes eran niños. ¿Cuántas personas murieron?

DATOS:

I. Sobrevivieron tantos niños como la suma de los 2 primeros números primos.

II. La quinta parte de los muertos eran solteros.

Resolución: Del dato principal se tiene:



NIÑOS: $\frac{1}{11}(11K) = K$

Se tiene varios valores para K y M

- Sólo (I) ...... (SI)

NIÑOS SOBREVIV: $\overbrace{2+3}^{\text{2 primeros num. primos}} = 5 = (K)$

SOBREVIV		MUERTOS		
11(5)	+	M	=	100
		M	=	45 ✓

- Sólo (II) ...... (SI)

SOBREVIV		MUERTOS		
11(K)	+	M	=	100

M → $\frac{1}{5}$(M) son solteros

11(K) → También deben ser 5 puesto que el otro sumando lo es y el resultado también

M = 5; 10; 15; 20; 25; 30; ...

Analizando valores:

$11K + M = 100$

K → (5), M → (45)

No hay más, por lo tanto los muertos serán en este caso 45 ✓

∴ Marcamos la alternativa (D)

PROBLEMA 12 Hallar el valor de x + y

DATOS:

I. $x^2 + y^2 = 25$

II. $xy = 12$

Resolución:

- Sólo (I) .... (NO)

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 25 + 2xy$$
$$\underline{(x+y)^2} = 25 + \underbrace{2xy}_{\text{No se conoce}}$$

- Sólo (II) .... (NO)

$xy = 12$; (se tienen infinitos valores para x e y por tanto no se puede hallar x + y)

- (I) y (II) conjuntamente .... (NO)

$$(x+y)^2 = 25 + 2xy$$
$$xy = 12$$

Resolviendo: $(x+y)^2 = 25 + 2(12)$

$$(x+y)^2 = 49$$
$$x + y = \pm\sqrt{49}$$

$x + y = \pm 7$; (tiene 2 valores por tanto no hay un único valor para x + y)

$\therefore$ Falta información; marcamos la alternativa (E)

PROBLEMA 13 Hallar el menor valor de: A

$$A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + x^2 + \frac{1}{x^2} + 2007$$

DATOS:

I. $a, b, x \in \mathbb{R}^+$

II. $a + b > ab$

Resolución:

- Sólo (I) .... (SI)

Por el criterio de la MA ≥ MG para $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ tenemos :

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \leq \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2}$$

Pero esto sólo esválido si a y $b \in \mathbb{R}^+$.

En forma análoga para x^2 y $\frac{1}{x^2}$ se tiene :

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2}$$

Como se busca el menor valor de A:

$$A = \underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{2} + \underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{2} + 2007$$

$$A = 2011$$

- Sólo (II) .... (NO)

Nos dan una relación para a y b y no para x lo cual hace imposible el cálculo de A

$\therefore$ Marcamos la alternativa (A)

PROBLEMA 14 Hallar: $n^3 + 2n$

DATOS:

I. $n^2 - 5n = -4$

II. $n^2 + \dfrac{1}{n} = -2$

Resolución:

- Sólo (I) .... (NO)

$$n^2 - 5n + 4 = 0$$

$$\begin{matrix} n & -4 \\ n & -1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{matrix} n = 4 \\ n = 1 \end{matrix}$$

Hay 2 valores y no un único

- Sólo (II) .... (SI)

$$n^2 + \frac{1}{n} = -2$$

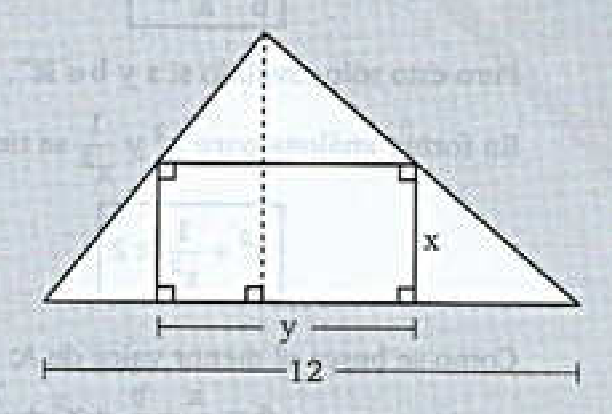
$$\frac{n^3 + 1}{n} = -2$$

$$n^3 + 1 = -2n$$

$$n^3 + 2n = -1 \text{ ; lo que nos piden calcular}$$

$\therefore$ Marcamos la alternativa (B)

PROBLEMA 15 El triángulo mostrado tiene base 12 y altura 24. Hallar x

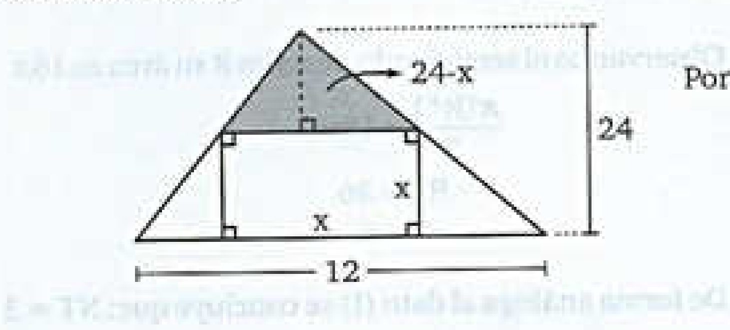


DATOS:

I. $x = y$

II. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$

Resolución: • Sólo (I) .... (SI)



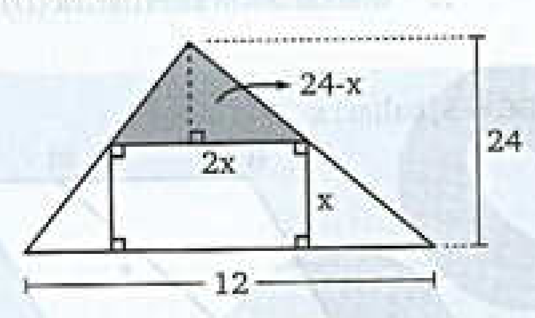
Por semejanza:

$$\frac{24-x}{24}=\frac{x}{12}$$

$$24-x=2x$$

$$x=8$$

• Sólo (II) .... (SI)



$$\frac{24-x}{24}=\frac{2x}{12}$$

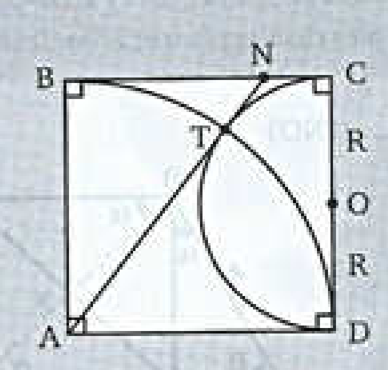
$$24-x=4x$$

$$24=5x$$

$$4{,}8=x$$

∴ Marcamos la alternativa (D)

PROBLEMA 16 Hallar: NT

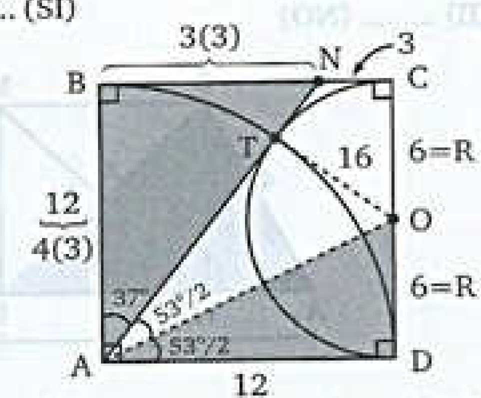


DATOS:

I. A y D son centros del cuadrante y semicírculo respectivamente. AD = 12

II. El área del semicírculo es 18π

Resolución: • Sólo (I) .... (SI)



NC y NT son tangentes a una misma circunferencia por tanto: NT = NC = 3

- Sólo (II) .... ( )

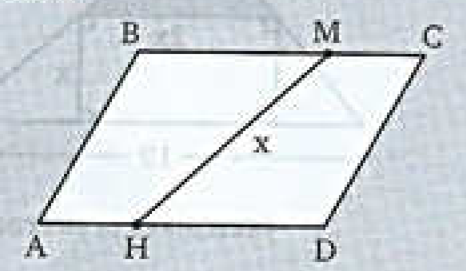
Observando el semicírculo de radio R su área es 18π

$$\frac{\pi(R^2)}{2} = 18\pi$$
$$R^2 = 36$$
$$R = 6$$

De forma análoga al dato (I) se concluye que: NT = 3

∴ Marcamos la alternativa (D)

PROBLEMA 17 AB = 4 y BC = 5, hallar: x

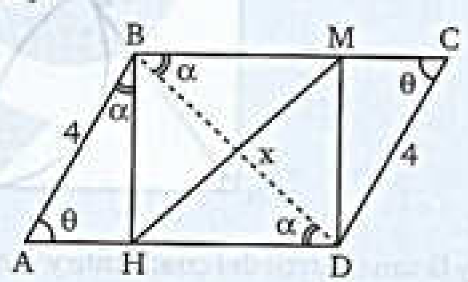


DATOS:

I. ABCD paralelogramo, ∠ABH y ∠DBC son iguales.
II. H y M son pies de alturas trazadas desde B y D respectivamente.

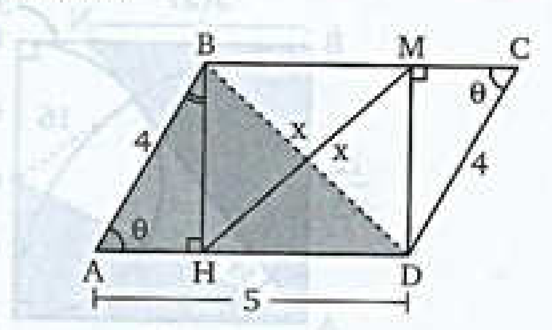
Resolución:

- Sólo (I) .... (NO)



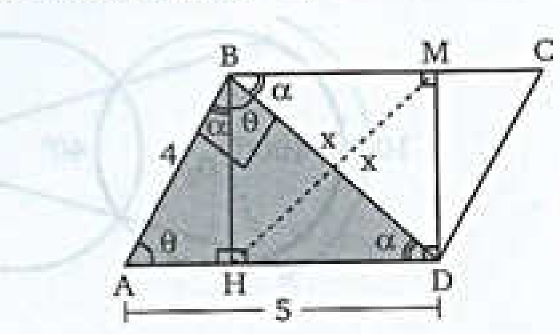
Se observa que para hallar x no hay relación alguna, pues no hay triángulos congruentes ni semejantes que involucren a x.

- Sólo (II) .... (NO)



El triángulo sombreado no es conocido por tanto no hay relación alguna

- I y II conjuntamente .... (   )



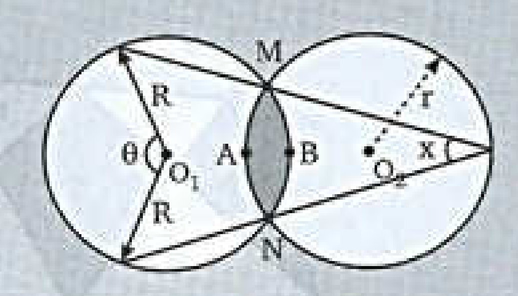
Observamos que HBMD es un rectángulo cuyas diagonales son iguales.

ABD es recto, por lo tantos ABD es notable de 3, 4 y 5

$x = 3$

$\therefore$ Marcamos la alternativa (C)

PROBLEMA 18 Hallar: x



DATOS:

I. $\theta = 120°$; $\dfrac{R}{r} = 1$; O_1 y O_2 son centros

II. $\theta = 100°$; $\overset{\frown}{MBN} = 40°$; O_1 y O_2 son centros

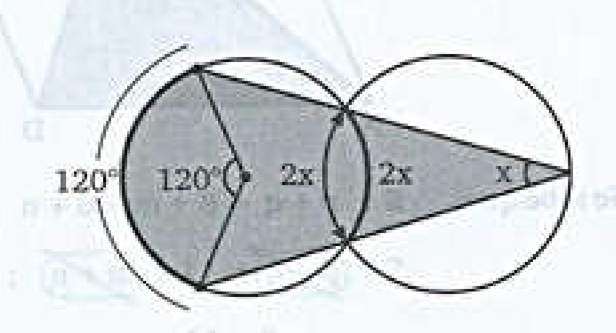
Resolución:

- Sólo (I) .... (SI)

$$\frac{R}{r} = 1 \rightarrow R = r$$

Las 2 circunferencias son iguales, por tanto:

$$\overset{\frown}{NAM} = \overset{\frown}{NBM}$$



$$x = \frac{120 - 2x}{2}$$

$$x = 30°$$

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del
Team Calapenshko,
el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

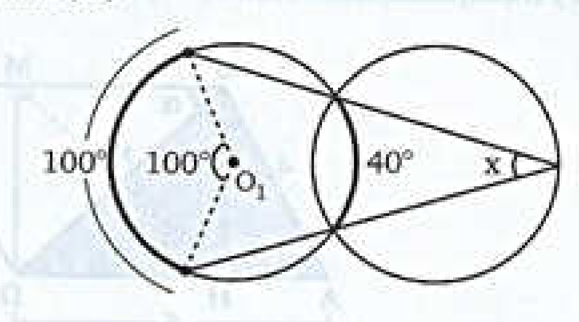
Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

03 de setiembre del 2020

- Sólo (II) .... (SI)

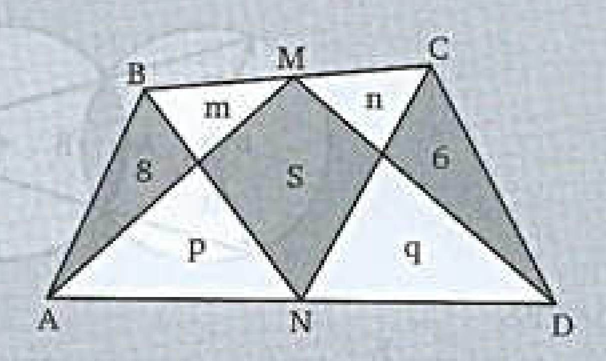


$$x = \frac{100° - 40°}{2}$$

$$x = 30°$$

∴ Marcamos la alternativa (D)

PROBLEMA 19 Hallar: S



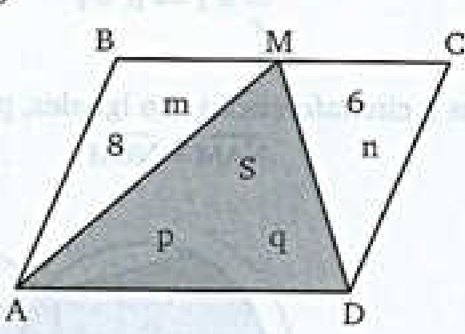
DATOS:

I. ABCD es un paralelogramo; m + n = p + q

II. ABCD es un cuadrilátero cualquiera con M y N puntos medios.

Resolución:

- Sólo (I) .... (SI)

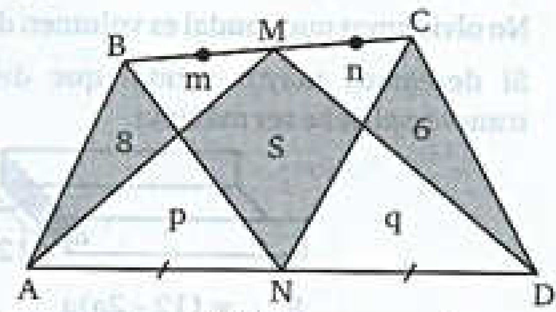


Se sabe que: $S + p + q = 8 + m + 6 + n$

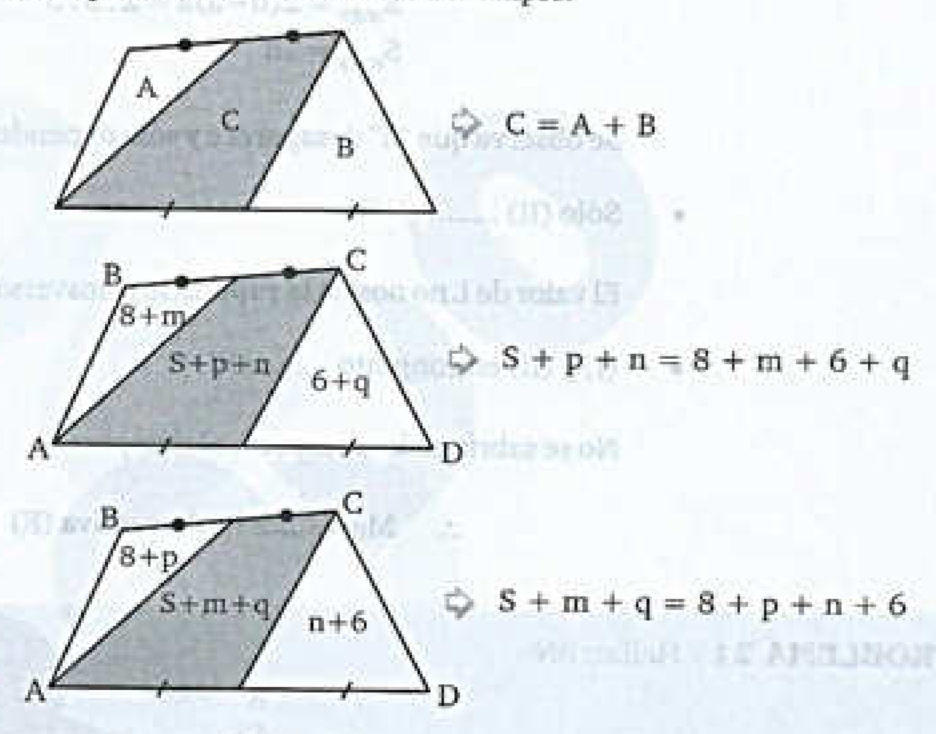
$$S + (p+q) = 14 + (m+n) \quad ; \quad (p+q) = (m+n)$$

$$S = 14$$

- Sólo (II) .... (SI)



Recordemos que en todo cuadrilátero se cumple:



Sumando las 2 últimas relaciones tenemos:

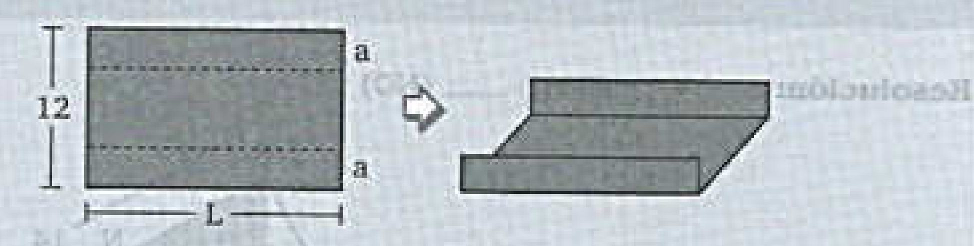
$$2S + \not{p} + \not{n} + \not{m} + \not{q} = 16 + 12 + \not{m} + \not{q} + \not{n} + \not{p}$$

$$2S = 28$$

$$S = 14$$

∴ Marcamos la alternativa (D)

PROBLEMA 20 Se tiene una placa metálica que se dobla adecuadamente para formar una canaleta



Para hallar el mayor caudal posible que discurra por la canaleta es necesario:

I. El valor de a

II. El valor de L.

Resolución:

- Sólo (I) .... (NO)

No olvidemos que caudal es volumen de líquido en una cantidad de tiempo.

Si deseamos mayor caudal que discurra por la canaleta la superficie transversal debe ser máxima.

$$S_{máx} = (12-2a)a$$
$$S_{máx} = 2(6-a)a = 2.3.3$$
$$S_{máx} = 18$$

Se observa que "a" desaparece y sólo dependerá del tiempo.

- Sólo (II) .... (NO)

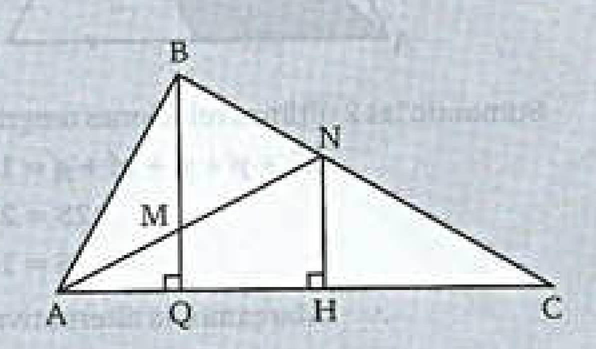
El valor de L no nos da la superficie transversal de la canaleta.

- (I) y (II) en conjunto .... (NO)

No se sabría el dato respecto al tiempo.

$\therefore$ Marcamos la alternativa (E)

PROBLEMA 21 Hallar: BN



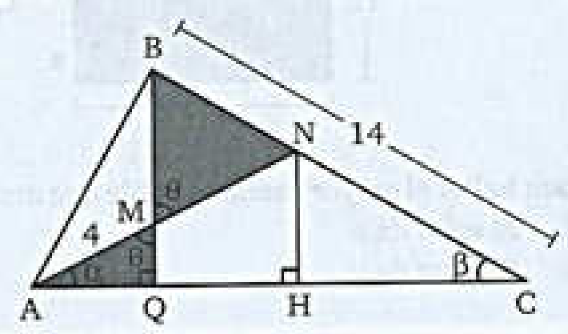
DATOS:

I. AM = 4; BC = 14

II. HC = AH

Resolución:

- Sólo (I) .... (NO)

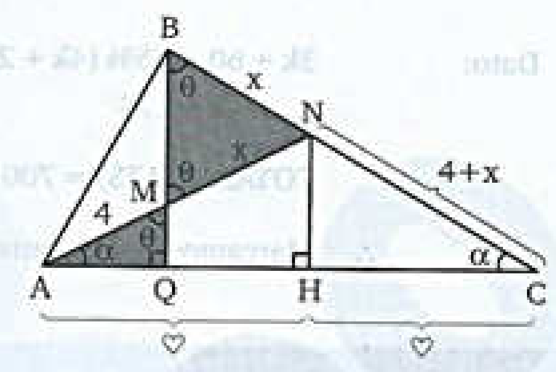


No se puede hallar BN

- Sólo (II) .... (NO)

En este caso de nada serviría HC = AH pues no habría valor para hallar BN

- (I) y (I) conjuntamente .... (SI)



- Este dato hace que el triángulo ANC sea isósceles (AN = NC)

Como BC = 4: x + 4 + x = 14 → x = 5

∴ Marcamos la alternativa (C)

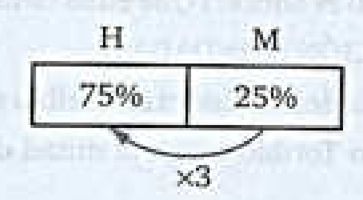
PROBLEMA 22 Al inicial una reunión el 75% eran varones y el resto mujeres. Para saber el número de personas que hay en la reunión es necesario:

DATOS:

I. El número de mujeres es el décimo número de Fibonacci

II. Al llegar 60 hombres y 140 mujeres los hombres son el 65% de los asistentes.

Resolución: Del dato inicial se sabe que los hombres son el 75% y las mujeres el resto: 25%



- Sólo (I) .... (SI)

Sucesión de Fibonacci:

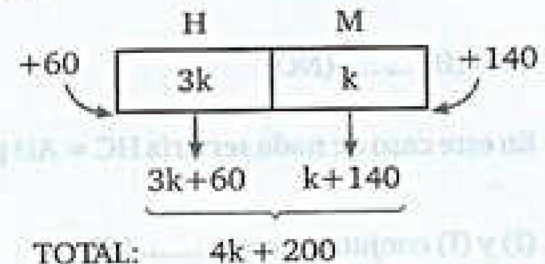
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

↑ Mujeres

H = 3(55) = 165

Total personas: 55 + 165 = 220

- Sólo (II) .... (SI)



TOTAL: 4k + 200

Dato: $3k + 60 = 65\% \, (4k + 200)$

$k = 175$

TOTAL: $4(175) = 700$

∴ Marcamos la alternativa (D)

PROBLEMA 23 ¿Cuál es el valor del menor de 3 números naturales a, b, c?

INFORMACIÓN BRINDADA:

I. La suma del menor y el mayor es 24 y los tres suman 36.

II. Son números consecutivos y suman 36.

Resolución: Según la información II, los números son consecutivos y suman 36

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 36$$

$$x = 11$$

∴ La información II es suficiente.

PROBLEMA 24 Si Mateo es dos veces tan viejo como Toribio lo será, cuando Pepe sea tan viejo como Mateo es ahora. ¿Qué edad tiene Mateo?

INFORMACIÓN BRINDADA:

I. La suma de las edades de Toribio y Pepe es 70 años.

II. Cuando Toribio tenga la mitad de la edad que tiene Mateo, Pepe tendrá 40 años.

Resolución:

	PRESENTE	FUTURO
M	2X	
T	Y	X
P		2X

Según la información II:

$$2x = 40$$

$\rightarrow$ Mateo tiene 40 años

$\therefore$ La información II es suficiente.

PROBLEMA 25 ¿Cuál es el valor de x?

INFORMACIÓN BRINDADA:

I. $x^2 - 2x = 8$

II. $x < 2$

Resolución: Se debe utilizar I y II

$$x^2 - 2x = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\begin{array}{ll} x & -4 \\ x & 2 \end{array}$$

$$x = 4 \text{ ó } x = -2$$

Pero $x < 2$:

$\rightarrow x = -2$

$\therefore$ Es necesario utilizar ambas informaciones.

PROBLEMAS PROPUESTOS

SUFICIENCIA DE DATOS

Se propones un problema y se ofrece dos datos, o dos series de datos, para resolverlo. Usted tiene que identificar qué datos son necesarios para resolver el problema y marcar:

> A. Cuando el dato I es suficiente y el dato II no lo es
> B. Cuando el dato II es suficiente y el dato I no lo es
> C. Cuando es necesario utilizar I y II conjuntamente
> D. Cuando cada uno de los datos, por separado, es suficiente
> E. Cuando se necesitan más datos.

1. Hallar el 2do término negativo

$(a + r); (a + 2r); (a + 3r); (a + 4r); ....$

I. $a^2 = 100$

II. $r^2 = 4$

2. Hallar la suma de todos los números de 2 cifras en la siguiente progresión:

$x \; ; \; 10 \; ; \; 4x \; ; \; ....$

I. La progresión es aritmética

II. La progresión es geométrica

3. La suma de 2 valores es 6. Hallar el mayor de ellos.

I. El mayor excede al menor en 2.

II. La diferencia de los dos es tanto como el primer número primo

4. Gasto 2/3 de lo que no gasto ¿cuánto gasté?

I. Tenía 200 soles, inicialmente

II. No gasté 120 soles

5. Si: $\triangle\!\left(\frac{x}{y}\right) = \triangle x - \triangle y$

Hallar: $\dfrac{\triangle a}{\triangle b}$

I. $a = 16$

II. $b = 4$

6. Cuántos cubos perfectos hay entre a y b.

I. a: mayor cuadrado perfecto de 2 cifras
b: 99

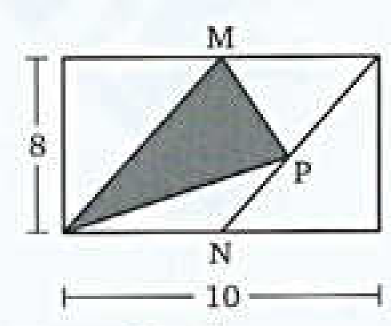
II. a: mayor número capicúa de 2 cifras
b: vigésimo número triangular

7. Se divide 60 en "a" partes, tal que 3 veces la parte mayor excede a "n" tanto como 8 veces la parte menor es excedido por 200. Hallar la parte menor.

I. $n = 100$

II. $a = 2$

8. Hallar el área de la región sombreada:



I. M y N son colineales

II. M y N son puntos medios

9. $\overline{abcd}$ es un año del siglo XVIII. Para que el año sea bisiesto:

I. $\overline{cd} = 48$

II. $c = 0; \; d = 0$

10. p y q son 2 fracciones. Halle el máximo valor de $p \times q$.

I. p y q son impropias
II. p: fracción enfermos de TBC
q: fracción de los que no son enfermos de TBC en el mismo pueblo

11. En un sorteo se quiso averiguar el precio de cada rifa en función de datos literales.

I. Si venden "A" rifas se gana "a" soles
II. Si venden "B" rifas se pierden "b" soles

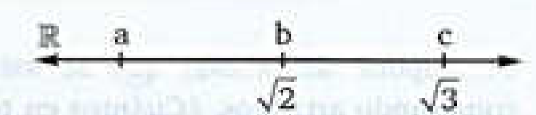
12. Don pregunta a Donna por el número de fichas que tiene y ella responde:

I. Con mis fichas puede formar un cuadrado compacto y sobran 16
II. Mi número de fichas es menor en 9 que el cuadrado del sexto número primo

13. Siendo Juanito hermano de Anna Belén. ¿Cuántos hermanos hay en cada sexo?

I. Juanito dice: "Tengo tantas hermanas como hermanos"
II. Anna Belén dice: "Tengo el doble del número de hermanos que de hermanas"

14. En la recta de los números $\mathbb{R}$.



Hallar "a".

I. La distancia de "a" a "b" es el doble de la distancia de "b" a "c"
II. $c - a = 3(c - b)$

15. Para hallar ¿qué porcentaje de A es B?, necesito saber:

I. Si A aumenta en su 200% se iguala a B
II. $A = 300$

16. El 78% de los que ingresan tienen sus padres vivos, esta cantidad el 26% de los que postulan, para saber el número de postulantes se necesita:

I. Número de ingresantes que tienen sus padres vivos
II. Número de postulantes sin padres vivos

17. Hallar A.

I. El x% de A es x
II. $x = 40$

18. La diferencia del 60% del triple de un número con el 3% del número al cuadrado es 15. Hallar el número.

I. El número es positivo
II. El número es mayor que 40

19. Una fracción es equivalente a 30/45. Hallar le numerador de la fracción.

I. El MCD de sus términos es 49
II. El denominador es 147

20. Hallar el mayor peso que puede contener una docena de huevos.

I. Un kilogramo contiene de 16 a 18 huevos
II. Cada huevo pesa aproximadamente 62,5g

21. Dos atletas dan vuelta a un circuito. Si empiezan juntos y en el mismo sentido, ¿qué tiempo necesita uno de ellos para sacar 68 metros de ventaja al otro?

I. Longitud del circuito 500m
II. El primer atleta de 12 vueltas en 7 minutos y el segundo 13 vueltas en 9 minutos.

22. En la figura hallar "B + C"

	E	F	
A	B	C	D
	G	H	

I. Cada letra representa a un # del 1 al 8 sin repetición
II. En ningún caso un dígito cualquiera debe ser vecino adyacente de su consecutivo

23. Si: $\overline{LUZ}-\overline{ZUL}=\overline{MIA}$; Hallar $(L\times Z)^2$

I. $A=3$
II. $M-A=5$

24. En un código ¿cómo se escribe "ALIANZA"?

I. Según el código VALFER se escribe TEKDIQ
II. Cada consonante da origen a la otra inmediata anterior y cada vocal a la otra inmediata posterior.

25. Si: $\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline r & 10 \end{array}$; hallar: $B-R$

I. $A=109$ y "r" es máximo
II. $r=B-1$ y $A+B=120$

26. ¿Cuántos hijos tiene Juank?

I. Entre Juank y Manuel tienen menos de 6 hijos
II. Manuel tiene más hijos que Alfredo y aunque Juank tuviera un hijo menos, seguiría teniendo más hijos que Alfredo

27. Una deuda se ha pagado con billetes de S/.100 y S/.25. ¿Cuántos son los billetes de S/.25?

I. La deuda asciende a S/.650
II. # billetes de S/.25 son 6 más que los de S/.100

28. Se compran artículos X_1 y X_2. Hallar la suma de una unidad de X_1 con una unidad de X_2.

I. El dinero alcanza exactamente para comprar 2 de X_1 y 4 de X_2
II. Si se compran 5 de X_1 y 2 de X_2 sobra el 10% del dinero

29. Una persona estuvo caminando durante media hora; unas veces avanzando y otras retrocediendo. ¿Cuántos metros anduvo retrocediendo?

I. Camino 1000 m
II. Sólo avanzó 350 m

30. Se dispone de S/.888 que se los gastó comprando artículos. ¿Cuántos en total se adquirieron?

I. Los precios dos clases: S/.21 y S/.37
II. Se adquirió la máxima cantidad de artículos

31. Si:

$$f_{(n-1)} + f_{(n)} + f_{(n+1)} = 20$$

Calcule: $f[f_{(11)}]$

I. $f_{(7)} = 7$
II. $f_{(8)} = 8$

32. Si:

$$abc - mn4 = cba$$

Calcule: $\dfrac{c}{a-b}$

I. $a > b > 7$
II. $m = 5$; $n = 9$

33. Una tortuga recorre un espacio AB en 20 horas. ¿Cuántos kilómetros mide el tramo AB?

I. Si quisiera hacerlo en 25 horas, debe disminuir su rapidez en 8 km/h
II. Su velocidad es de 40 km/h

34. Calcular la suma de 30 números impares consecutivos.

I. La suma de los 20 números pares anteriores a estos es 1200
II. El último número impar de estos 30 es 139

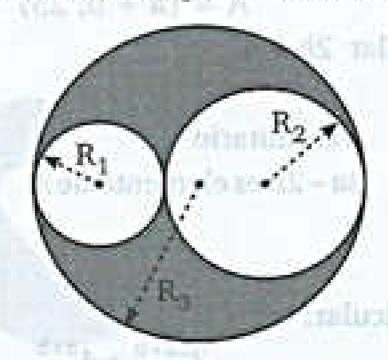
35. Se compraron artículos X_1 y X_2. Hallar la suma de una unidad de X_1 con una unidad de X_2.

I. El dinero alcanza exactamente para comprar 3 de X_1 y 5 de X_2
II. Si se compra 5 de X_1 y 3 de X_2 sobre el 10% del dinero

36. Calcule la diferencia entre los términos de lugar 42 y 37.

I. La progresión aritmética es; $(m + n)$; $(2m - n)$; $(2m + 3n)$; ....
II. La razón es $m - 2$

37. Hallar el área de la región sombreada:



I. $R_1/R_2 = 1/2$
II. $R_3 = 5$ cm

38. Con las cifras:

$$\{3, 5, 6, 8, a, b\}$$

¿Cuántos números se pueden formar que sean múltiplos de 4?

I. $a = 4$
II. $b = \#$ Par

39. ¿Cuántos números de la forma $\overline{a(a+1)(b+2)}$ existen?

I. $a \neq 0$
II. a y $b \in \mathbb{Z}$

40. Compré 40 lapiceros iguales. ¿Cuántos cuesta cada uno?

I. En total pagué \$120
II. La docena cuesta \$36

41. Dados los conjuntos A y B, hallar:

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

I. $n(A \cup B) = 10$
II. $n[(A - B) \cup (B - A)] = 3$

42. Dado el conjunto:

$$A = \{a + b; 25\}$$

hallar $2b + a$.

I. A es unitario
II. $3a - 2b$ es elemento de A

43. Calcular:

$$\frac{2^{2a+b} + 4^{a+b}}{4^{a-b} - 2^{2a+b}}$$

I. $a = 1$
II. $b = 1$

44. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y d tales que AB = 2 m y CD = 3 m. Hallar la longitud de BC.

I. $5AC = 4BD$
II. $BC < AB$

45. Dado el polinomio en x:

$$P(x) = (x - 1)^n + x^m + (n + m)x - n$$

hallar: $2n - m$

I. La suma de coeficientes de P(x) es igual a 4
II. $P(2) = 27$

46. Si A es el origen de coordenadas, hallar las coordenadas de B.

I. La distancia de A a B es 5 centímetros
II. B está en el primer cuadrante

47. Dados los ángulos consecutivos ∠AOM, ∠MOB y ∠BOC. Si ∠AOB = 30°, hallar ∠MOB.

I. ∠AOB y ∠BOC son adyacentes
II. OM es bisectriz de ∠AOB

48. Determinar si un triángulo es un triángulo rectángulo.

I. La mediana relativa al lado mayor es la mitad de dicho lado.
II. Dos lados del triángulo son proporcionales a 1 y $\sqrt{2}$

49. De un grupo de mujeres, 5 mujeres tienen 17 años y 16 mujeres no tienen 17 años. ¿Cuántas mujeres tienen 17 ó 18 años?

I. 14 mujeres no tienen 18 años
II. 9 mujeres no tienen 17 ni 18 años

50. Los triángulos A y B, ¿son semejantes?

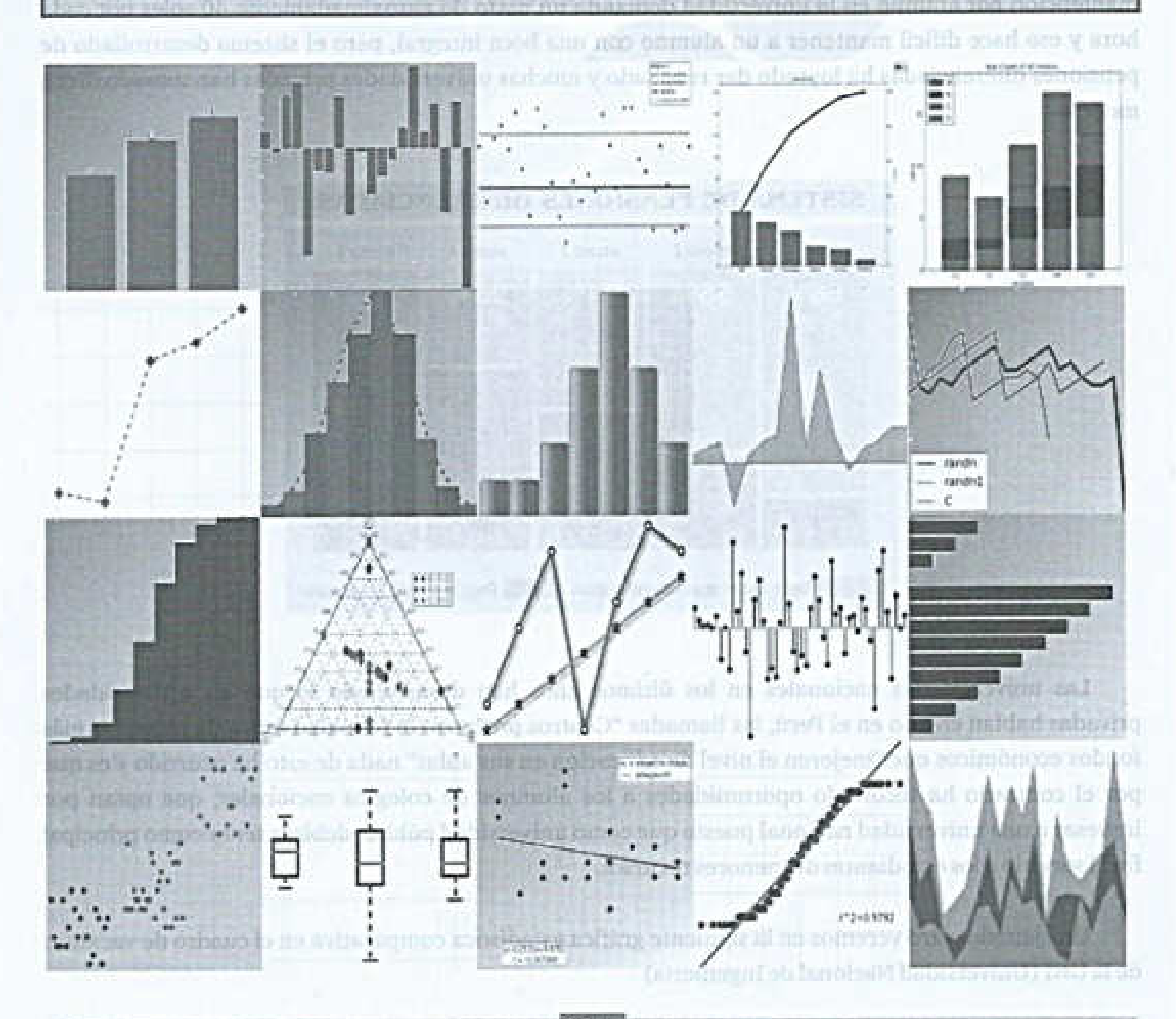
I. A y B son triángulos congruentes.
II. A y B son triángulos rectángulos que comparten un mismo cateto y juntos forman otro triángulo rectángulo.

Capítulo 22

Interpretación de Tablas y Gráficos Estadísticos

CAPACIDADES

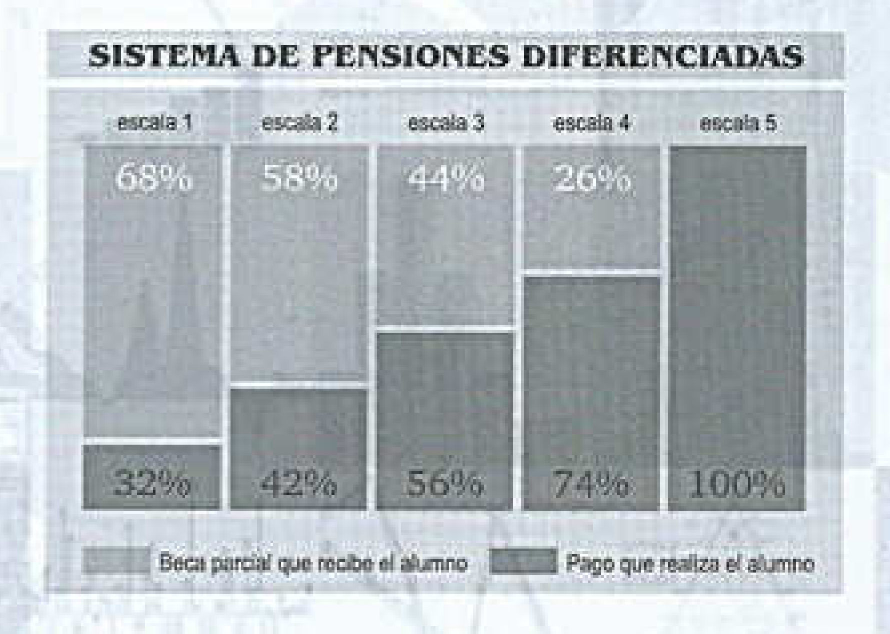
- Desarrollar la capacidad analítica del estudiante.
- Interpretación de nuestra situación real en comparación con otras, en base a gráficas estadísticas de producción, educación, etc.
- Formar opinión a partir de tablas comparativas u otras gráficas.
- Incentivar al orden y colección de datos que nos sean útiles en una investigación.
- Desarrollar en el estudiante la correcta toma de decisiones bajo una buena información recopilada y graficada adecuadamente.



INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo nos involucraremos más en la interpretación de las tablas y las gráficas estadísticas, pero es oportuno hacer una breve síntesis de como se inició esta importante rama de la ciencia que vuela con sus propias alas, orientando a través del tiempo a líderes, estrategas, científicos etc. en sus grandes proyectos.

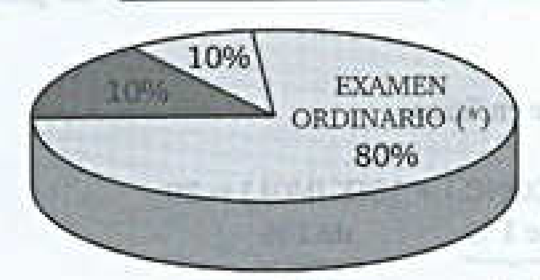
La calidad demostrada en los servicios educativos a través de la historia conllevado que la inversión que se hace al estudiar en la Universidad Católica es en términos generales muy cara lejana para muchos estudiantes de recursos económicos paupérrimos, sin embargo la universidad ha diseñado en su sistema de pensiones una forma de compensación mutua entre sus alumnos ya que hay alumnos con alto nivel académico pero que no poseen medios económicos sin embargo, estos alumnos muchas veces dejan muy en alto el prestigio de la universidad en competencias nacionales e internacionales, así como en sus labores profesionales una vez culminado sus estudios, actualmente (2007) se estima que el costo de mantención por alumno en la universidad demanda un gasto de aproximadamente 40 soles por cada hora y eso hace difícil mantener a un alumno con una beca integral, pero el sistema desarrollado de pensiones diferenciadas ha logrado dar resultado y muchas universidades privadas han tomado dicho modelo.



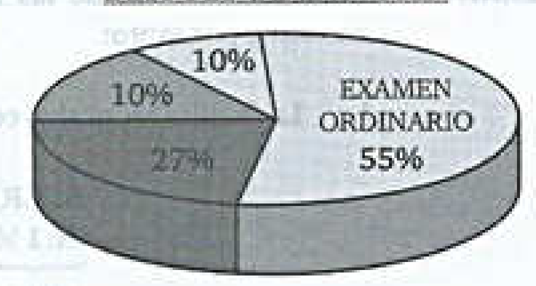
Las universidades nacionales en los últimos años han desarrollado lo que las universidades privadas habían creado en el Perú, las llamadas "Centros pre"; con la finalidad única de recaudar más fondos económicos que "mejoren el nivel de educación en sus aulas" nada de esto ha ocurrido y es que por el contrario ha recortado oportunidades a los alumnos de colegios nacionales, que optan por ingresar a una universidad nacional puesto que como universidad pública debiera tener como principal fin el servicio a los estudiantes de menores recursos.

Un ejemplo claro veremos en la siguiente gráfica estadística comparativa en el cuadro de vacantes de la UNI (Universidad Nacional de Ingeniería)

ANTES DE LAS "PRE"



DESPUÉS DE LAS "PRE"



(*) En ésta modalidad la mayoría son de recursos económicos bajos y por ende de colegios nacionales

FUENTE: Universidad Peruana, Origen Desarrollo y Perspectivas (Pedro Pariona)

A continuación interpretaremos las principales tablas y gráficas que se presentan en las estadística:

I. TABLAS DE DOBLE ENTRADA

ENTRADA VERTICAL

ENTRADA HORIZONTAL

	P	Q	R
A			
B			
C			

PROBLEMA 1 La tabla muestra el consumo de gaseosas de litro y medio de las arcas Kola Real, Concordia y Kola Inglesa por las familias Ventura y Montalvo durante una semana invernal.

	KOLA REAL	CONCOR DIA	KOLA INGLESA
VENTURA			
MOLTALVO			

i. ¿Cuál es el número de litros consumidos por la familia Montalvo en dicho período?

ii. Si el consumo de gaseosas se incrementa durante el verano en 80% ¿cuántos litros consume la familia Ventura por semana?

Resolución: Cada intersección de las 2 entradas indica la familia y el tipo de gaseosa que consume por tanto:

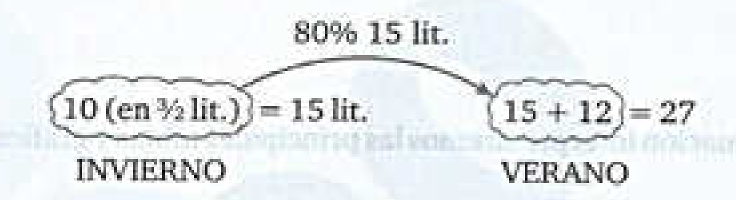
I. La familia Montalvo consume en litros:

$$\underbrace{6(\text{K.R})}_{9\text{ lit.}} + \underbrace{4(\text{CONC.})}_{6\text{ lit.}} + \underbrace{10(\text{K.INGL})}_{15\text{ lit.}} = 30$$

de 1 ½   de 1 ½   de 1 ½

9 lit.   6 lit.   15 lit.

ii. Analizando sólo la familia Ventura en litros. No olvidemos que el consumo se incrementa en 80% en verano.



PROBLEMA 2 La siguiente gráfica muestra el desempeño de un grupo de alumnos en pruebas que requieran trabajo cooperativo y trabajo individual, obteniéndose los siguientes resultados:

		TRABAJO INDIVIDUAL			
	PUNTAJES	1	2	3	4
TRABAJO COOPERATIVO	1	2	3	4	2
	2	3	2	2	1
	3	2	1	6	2
	4	3	4	5	8

i. ¿Cuántos alumnos participaron en las pruebas?

ii. ¿Qué porcentaje del total obtuvo 3 en trabajo individual pero 2 ó menos en trabajo cooperativo?

iii. ¿Cuál fue el puntaje promedio en trabajo cooperativo?

Resolución: La cantidad total de alumnos se encuentra en la región sombreada del cual obtendremos las respuestas correspondientes.

i. Los alumnos participantes es la suma de todos los valores que se encuentran en el cuerpo de la tabla (reg. sombreada) sumando por columnas:

$$\therefore \quad 10 + 10 + 17 + 13 = 50$$

ii. Los que obtuvieron 3 en trabajo individual:

		3	
1 →		4	
2 →		2	
3 →		6	
4 →		5	

Pero a su vez que hayan obtenido 2 ó menos en trabajo cooperativo se encuentra en el recuadro sombreado 2 veces. (4 + 2) = 6

$$\therefore \quad \frac{6}{\text{TOTAL}} = \frac{6}{50} \times 100\% = 12\%$$

iii. Para hallar el puntaje promedio en el trabajo cooperativo:

$$\boxed{\frac{\#\ \text{Alumnos (puntaje)}}{\text{Total Alumnos}}}$$

De puntaje (1) son: $2 + 3 + 4 + 2 = 11$
De puntaje (2) son: $3 + 2 + 2 + 1 = 8$
De puntaje (3) son: $2 + 1 + 6 + 2 = 11$
De puntaje (4) son: $3 + 4 + 5 + 8 = 20$

$$\therefore \quad P = \frac{11(1) + 8(2) + 11(3) + 20(4)}{\underset{\text{(TOTAL ALUMNOS)}}{50}} = \frac{140}{50} = 2{,}8$$

PROBLEMA 3 La siguiente tabla muestra los ingresos percibidos por la empresa COVEPA S.A. en 5 meses consecutivos:

MES	INGRESOS ($)	INGRESO ACUMULADO ($)	PORCENTAJE DEL INGRESO
1°		12 000	15 %
2°			30 %
3°	16 000		
4°			
5°		60 000	

i. ¿Cuál fue el ingreso en el 4to mes?

ii. ¿Cuál fue el ingreso total en los 5 meses?

iii. ¿Cual es el porcentaje acumulado hasta el 3er mes?

iv. ¿Cuál es el mayor aumento porcentual entre 2 meses consecutivos?

Resolución:

MES	INGRESOS ($)	INGRESO ACUMULADO ($)	PORCENTAJE DEL INGRESO
1°	12 000	12 000	15 %
2°	24 000	36 000	30 %
3°	16 000	52 000	a %
4°	x	60 000	b %
5°	y	TOTAL 80 000	c %

100%

- El total acumulado el 1er mes es lo que se percibió en el 1er mes (igual)

- Si el 2do mes se percibió un ingreso doble del 1ro entonces:

$$2(12\,000) = 24\,000$$

- Lo acumulado el 3er mes es la suma de lo acumulado hasta el 2do mes más lo percibido el 3er mes:

$$36\,000 + 16\,000 = 52\,000$$

- Si hasta el 4to mes el acumulado es 60 000 entonces lo percibido el 4to será:

$$52\,000 + x = 60\,000$$
$$x = 8\,000$$

- Para hallar el total en los 5 meses:

12 000 —— 15%
TOTAL —— 100%

$$\text{TOTAL} = \frac{\overset{20}{\cancel{100}}\,\% \times \overset{4}{\cancel{12}}\,000}{\underset{3}{\cancel{15}}\,\%} = 80\,000$$

- Lo percibido el 5to mes:

$$60\,000 + y = 80\,000$$
$$y = 20\,000$$

- 12 000 — 15%
  16 000 — a% a% = 20%

- 12 000 — 15%
  (x): 8 000 — b% b% = 10%

- 12 000 — 15%
  (y): 20 000 — c% c% = 25%

i. En el 4to mes el ingreso fue:

$$x = 8\,000$$

ii. El ingreso acumulado en los 5 meses fue:

TOTAL: 80 000

iii. Porcentaje acumulado hasta el 3er mes:

$$15\% + 30\% + a\% = 15\% + 30\% + 20\% = 65\%$$

iv. Los únicos aumentos entre 2 meses consecutivos se dan del 1er al 2do y del 4to al 5to:

– En el primer caso el aumento es de:

12 000 a 24 000 (aumenta 12 000)

Es decir: $\dfrac{12\,000}{12\,000} \times 100\% = 100\%$

– En el 2do caso:

Aum: 12 000

8 000 → 20 000

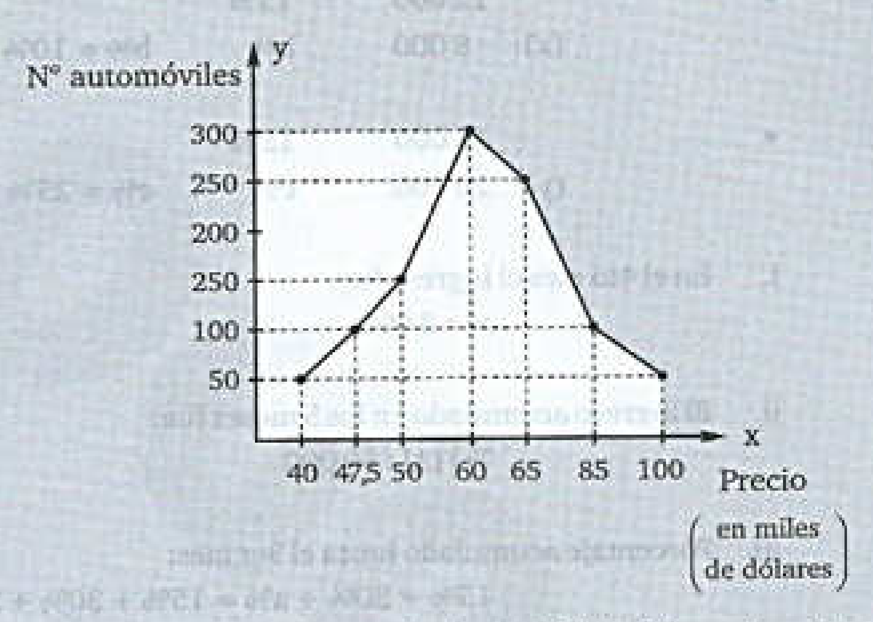
Es decir: $\dfrac{\overset{3}{\cancel{12\,000}}}{\underset{2}{\cancel{8\,000}}} \times \overset{50}{\cancel{100}}\,\% = 150\%$

∴ El mayor aumento porcentual es 150%

II. POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Se utiliza un sistema de ejes coordenados donde en el eje x o de las abscisas se señalan los valores de la variable estadística y en el eje y o de las ordenadas se señala las frecuencias.

PROBLEMA 4 Una fábrica de automóviles produce x automóviles diarios. el precio por unidad se observa en el siguiente gráfico:



i. Cuántos automóviles tienen el valor de 65 000 dólares la unidad.

ii. Hallar el valor de x.

Resolución:

i. Se observa al valor 85 en el eje x le corresponde 100 en el eje y por tanto la respuesta es 100.

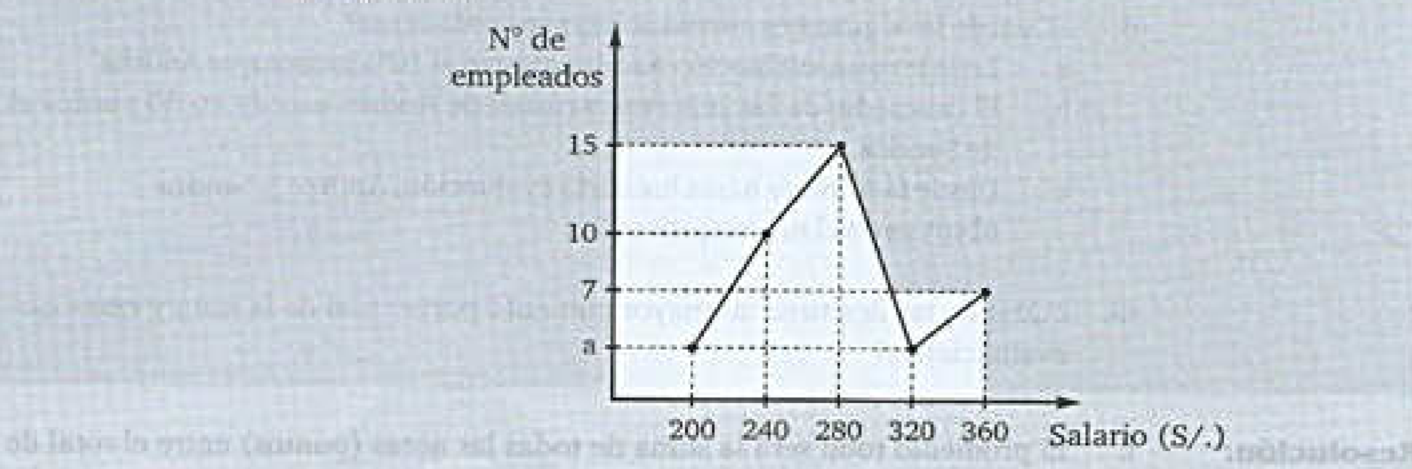
ii. Los puntos marcados son los que debemos considerar para hallar el total de autos que se produce en un día:

50 de \$ 40 000
100 de \$ 475 000
150 de \$ 50 000
300 de \$ 60 000
250 de \$ 65 000
100 de \$ 85 000
50 de \$ 10 000

Total de autos: $x = 50 + 100 + 150 + 300 + 250 + 100 + 50$

$\therefore \quad x = 1000$

PROBLEMA 5 En el gráfico se muestra la distribución de salarios mensuales en una empresa de 40 empleados:



i. Hallar a

ii. Qué porcentaje del número de empleados que ganan 320 soles y 360 soles representan los empleados que ganan 200 soles.

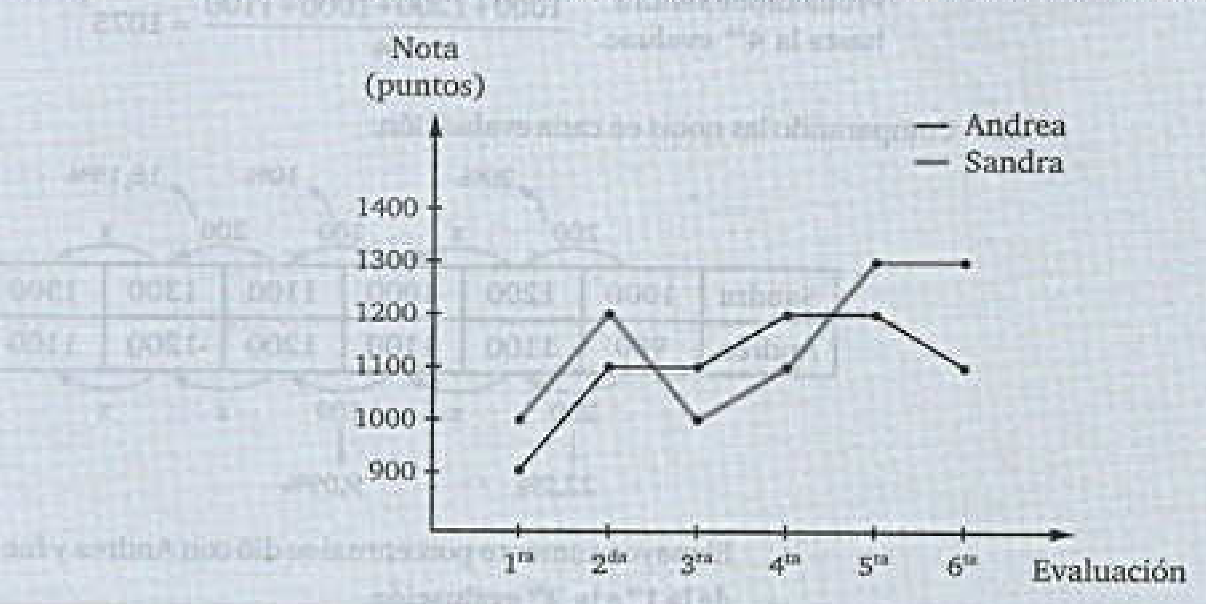
Resolución: i. Como el total de empleados es 40 la suma de los vértices deben sumar 40:

$$a + 10 + 15 + a + 7 = 40$$
$$2a + 32 = 40$$
$$a = 4$$

ii. Piden: $\dfrac{G_{(200)}}{G_{(320;360)}} \times 100\%$

$$\frac{4}{4+7} \times 100\% = \frac{400}{11}\% = 36,\overset{\frown}{36}\%$$

PROBLEMA 6 Según el gráfico se muestra las notas de Andrea y Sandra en seis evaluaciones:



i. ¿Cuál es el promedio de todas las notas obtenidas por ambas?

ii. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 a. En la tercera evaluación Sandra obtuvo el 10% menos que Andrea
 b. El promedio de las seis evaluaciones de Andres excede en 50 puntos al de Sandra
 c. Desde la primera hasta la cuarta evaluación, Andrea y Sandra obtuvieron el mismo promedio.

iii. ¿Cuál de las dos tuvo un mayor aumento porcentual de la nota y entre que evaluaciones?

Resolución: i. El promedio total será la suma de todas las notas (puntos) entre el total de evaluaciones (12)

$$P=\frac{\overbrace{900+1100+1100+1200+1200+1100}^{\text{Andrea}}+\overbrace{1000+1200+1000+1100+1300+1300}^{\text{Sandra}}}{12}$$

$P=125$

ii. a. Tercera evaluación:

Sandra : $\boxed{1000}$ → Sandra obtuvo el 90%(1100) = 990 (F)

Andrea : 1100

b. Promedio de Andrea : $\dfrac{6600}{6}=1100$

Promedio de Sandra : $\dfrac{6900}{6}=1150$

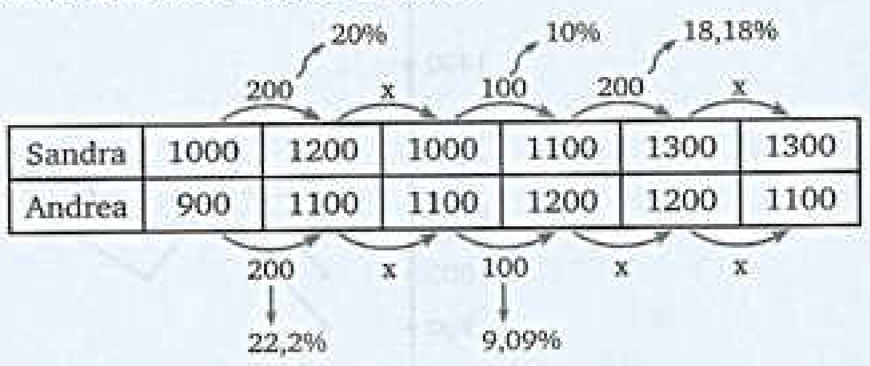
Sandra excede a Andrea en 50 (F)

c. PromediodeAndrea hasta la 4^{ta} evaluac. : $\dfrac{990+1100+1100+1200}{4}=1075$

PromediodeSandra hasta la 4^{ta} evaluac. : $\dfrac{1000+1200+1000+1100}{4}=1075$

Iguales (V)

iii. Comparando las notas en cada evaluación:



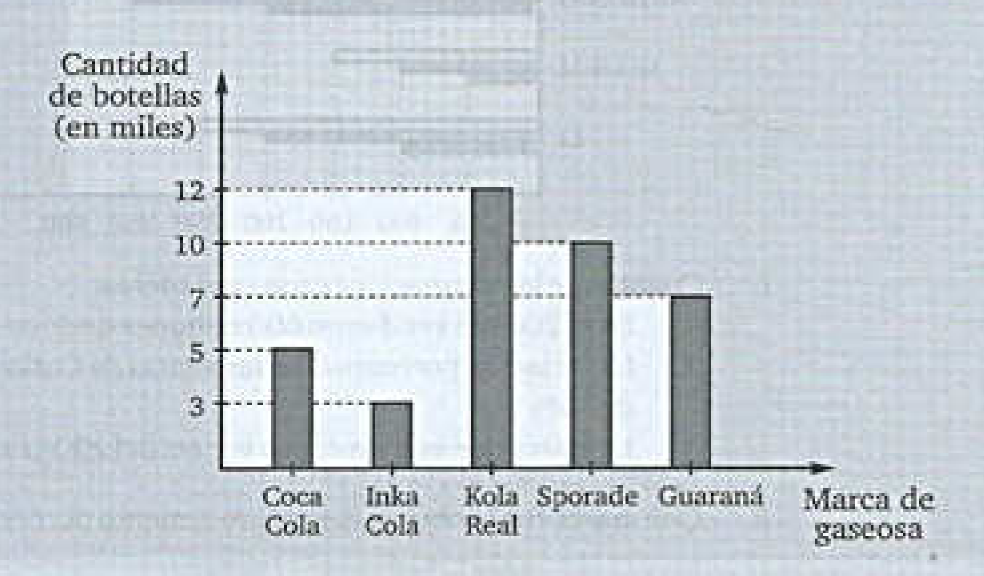
Sandra	1000	1200	1000	1100	1300	1300
Andrea	900	1100	1100	1200	1200	1100

∴ El mayor aumento porcentual se dió con Andrea y fue de la 1^{ra} a la 2^{da} evaluación.

III. DIAGRAMA DE BARRAS SEPARADAS

En este diagrama se puede distinguir 2 tipos, horizontales o verticales; siendo la longitud de la barra de frecuencia correspondiente a cada característica.

PROBLEMA 7 La gráfica muestra la distribución del volumen de ventas de bebidas gaseosas en Puente Piedra en el mes de enero.



i. A cuánto asciende el volumen total de ventas en enero.

ii. Qué porcentaje de las ventas de enero representa la venta de Guaraná.

iii. En promedio, cuántas gaseosas se vendió en cada tipo sólo en enero.

Resolución: i. Volumen total de ventas en enero:

$$\underbrace{5000}_{\text{Coca C.}} + \underbrace{3000}_{\text{Inka K.}} + \underbrace{12000}_{\text{Kola R.}} + \underbrace{10000}_{\text{Sporade}} + \underbrace{7000}_{\text{Guaraná}} = 37000$$

ii. Guaraná:

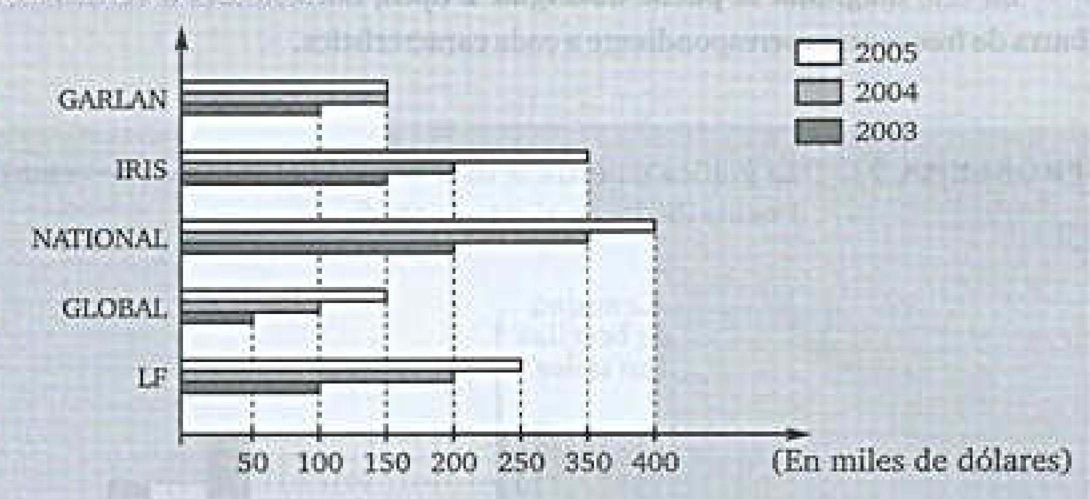
$$\frac{7000}{37000} \times 100\% = \frac{700}{37}\%$$

$$= 18{,}9\%$$

ii. Promedio:

$$\frac{5000 + 3000 + 12000 + 10000 + 7000}{5} = 7400$$

PROBLEMA 8 El gráfico muestra las ventas de una empresa importadora en las siguientes marcas en miles de dólares:



i. Cuántas de las afirmaciones son verdaderas:
   a. En el 2003 se vendieron 600 millones de dólares
   b. La variación porcentual en las ventas de Garlan del 2003 al 2004 fue de 50%
   c. La marca que más creció en ventas del 2004 fue National

ii. Qué marca fue la obtuvo menor crecimiento porcentual del 2003 al 2004.

Resolución: i. a. Para analizar en el 2003 nos fijaremos en la región ▬ :

Garlan:	100 000 +
Iris:	150 000
National:	200 000
Global:	50 000
LF:	100 000
	600 000

(F)

b. La variación porcentual de Garlan del 2003 al 2004:

100 000 → 150 000 ⇨ $\frac{50000}{100000} \times 100\%$

50 000 ⇨ 50%

(V)

c. Para saber quién creció más en ventas observemos quién tiene la mayor diferencia y ello sucede con Iris.

150 000

200 000 (2004) → 350 000 (2005)

(F)

∴ FVF

ii. Importante: El crecimiento porcentual es diferente al crecimiento cuantitativo (Cantidad) y no confundir ello.

Ejem:

INICIO	FINAL	INICIO	FINAL
20	30	100	130

Crece: 10 ↓ En %

$$\frac{10}{20}\times 100\% = 50\%$$

Crece: 30 ↓ En %

$$\frac{30}{100}\times 100\% = 30\%$$

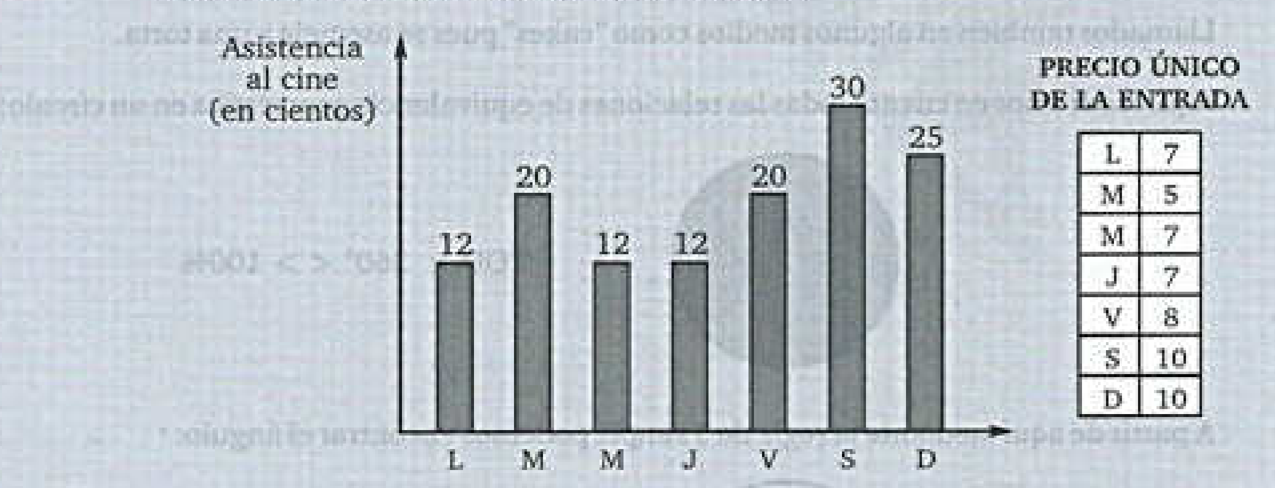
* No siempre mayor valor para el crecimiento refleja mayor valor porcentual, mejor es calcular el porcentaje.

* Sin considerar los miles para todas las marcas el porcentaje no se altera:

	2003	2004	
Garlan:	No hay crecimiento		
Iris:	200	350 (150)	$\frac{150}{200}\times 100\% = 75\%$
National:	350	400 (50)	$\frac{50}{350}\times 100\% = 14,2\%$
Global:	100	150 (50)	$\frac{50}{100}\times 100\% = 50\%$
LF:	200	250 (50)	$\frac{50}{200}\times 100\% = 25\%$

∴ Por lo tanto el menor crecimiento porcentual lo tiene NATIONAL con 14,2%

PROBLEMA 9 Las siguientes gráficas muestran la asistencia al cine en un centro comercial así como el precio de las entradas en cierta semana.



L	7
M	5
M	7
J	7
V	8
S	10
D	10

I. Los días viernes y sábado cuál es el precio promedio de la entrada.

ii. Cuál es la asistencia diaria promedio en dicha semana.

iii. Del martes al miércoles en cuánto disminuyó la asistencia al cine.

Resolución: i. N° de entradas vendidas el vienes y sábado:

$$\underbrace{20\times100}_{V}+\underbrace{30\times100}_{S}=5000$$

Recaudación total:

$$\underbrace{2000\times S/.8}_{V}+\underbrace{3000\times S/.10}_{S}=S/.46000$$

$$\therefore \begin{matrix}\text{Costo promedio}\\ \text{de cada entrada}\end{matrix}=\frac{46\,000}{5\,000}=S/.9,2$$

ii. Los asistentes en promedio por cada día será:

$$\frac{1200+2000+1200+1200+2000+3000+2500}{7}=1871,4$$

∴ Dicho valor se encontrará entre 1870 y 1880

iii. MARTES MIÉRCOLES

2000 → 1200

Disminuye: 800

$$\therefore \quad \text{En \%: } \frac{80\not{0}}{2\not{0}\,00}\times 100\% = 40\%$$

NOTA: La variación siempre se compara de lo que era inicialmente

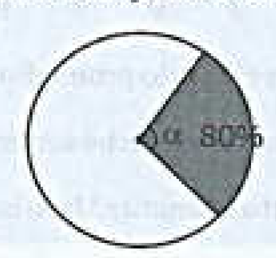
IV. SECTORES CIRCULARES

Llamados también en algunos medios como "cakes" pues se asemeja a una torta.

Aquí tendremos en cuenta todas las relaciones de equivalencia geométrica en un círculo:

TODO: 360° < > 100%

A partir de aquí mediante la regla de 3 simple podemos encontrar el ángulo:



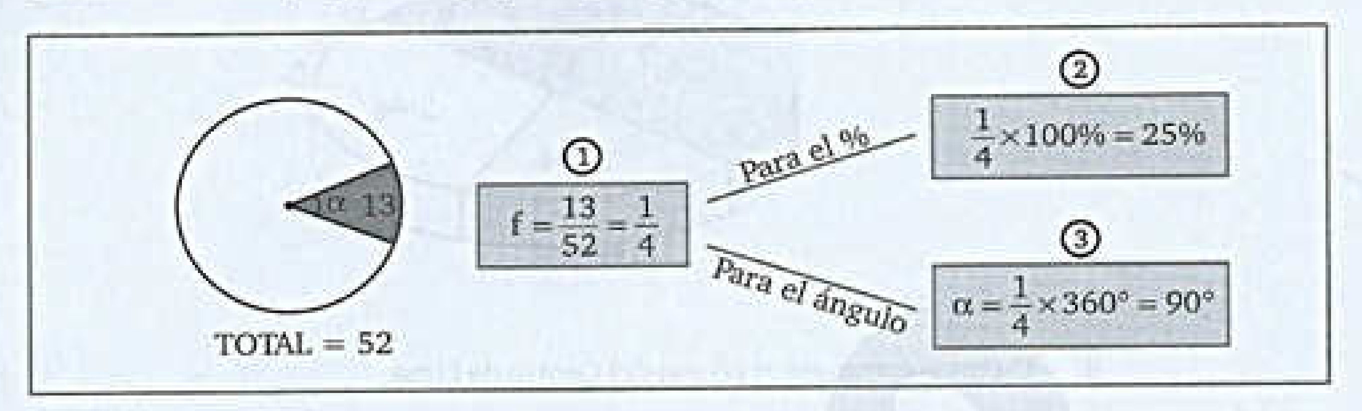
360° —— 100%

α° —— 80%

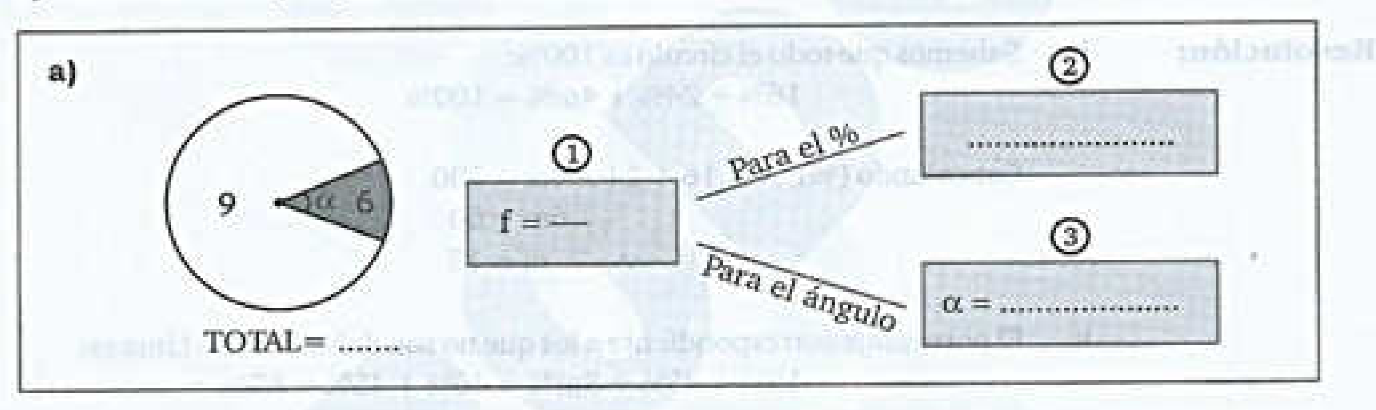
$$\alpha=\frac{8\not{0}\,\%\times 36\not{0}^\circ}{10\not{0}\,\%}=288^\circ$$

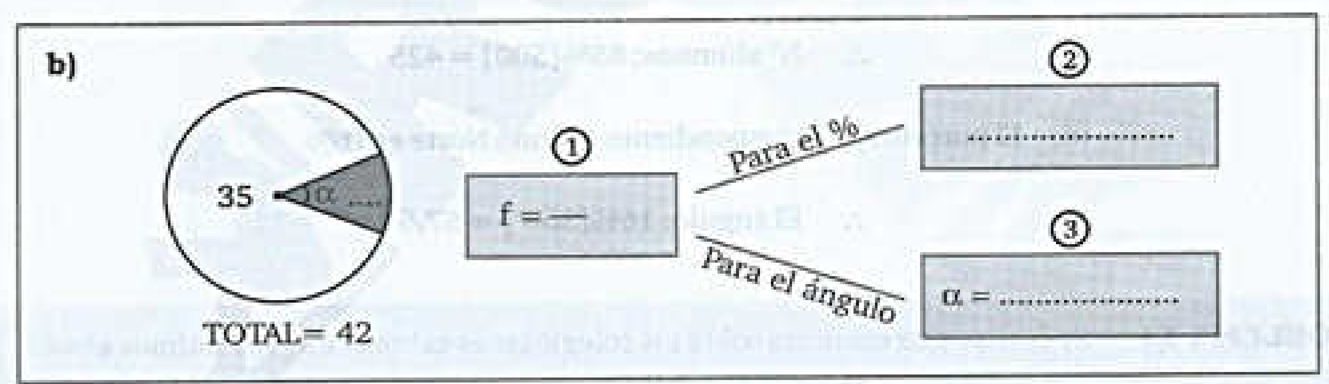
ALGUNAS REGLAS PARA DETERMINAR EL ÁNGULO Y EL % CONOCIENDO LA FRACCIÓN DEL SECTOR

Calcular la fracción, el porcentaje y el ángulo que corresponde en cada caso:



Ejercítese en los 2 ejemplos mostrados a continuación:

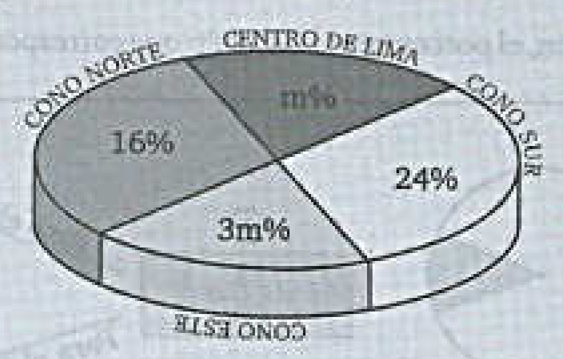




Es importante saber de memoria algunas equivalencias importantes:

100%	< >	360°
75%	< >	270°
50%	< >	180°
25%	< >	90°
20%	< >	72°
10%	< >	36°
5%	< >	18°

PROBLEMA 10 De 500 estudiantes ingresantes a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos se obtuvo que algunos provenían del Cono Norte, Cono Sur, Cono Este y Centro de Lima



i. Hallar: M

ii. Cuántos estudiantes no son del Centro de Lima.

iii. Cuántos grados corresponden al sector de alumnos del Cono Norte.

Resolución:

i. Sabemos que todo el círculo es 100%:

$$16\% + 24\% + 4m\% = 100\%$$

Cancelando (%): $16 + 24 + 4m = 100$

$$6m = 60$$

$$\therefore \quad m = 15$$

ii. El porcentaje correspondiente a los que no son del Centro de Lima es:

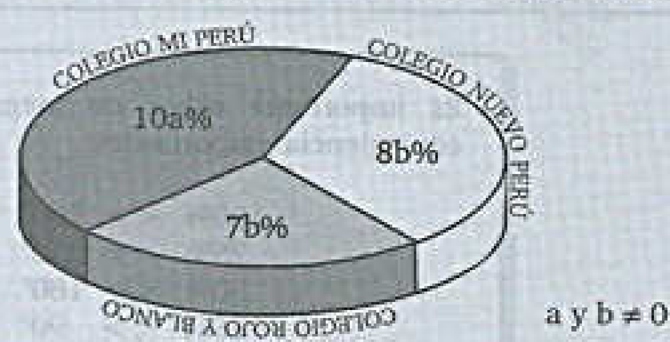
$$16\% + 25\% + 3m\% = 40\% + 45\% = 85\%$$

$\therefore$ N° alumnos: 85%[500] = 425

iii. El porcentaje correspondiente al Cono Norte es 16%.

$\therefore$ El ángulo: 16%[360°] = 57,6°

PROBLEMA 11 Se realizó una encuesta sobre los colegios más exitosos en los 5 últimos años.



a y $b \neq 0$

i. Hallar el ángulo correspondiente a un sector cuyo porcentaje es (2a + 3b)%

ii. Hallar el mayor valor de a + b

Resolución: i. Sabemos que toda la región es 100%

$$10a\% + 15b\% = 100\%$$

Simplificando: $\boxed{2a + 2b = 20}$

Pero nos piden el ángulo para (2a + 3b)%

$$\alpha = \underbrace{(2a + 3b)\%}[360°]$$

$$\alpha = \quad 20\%[360°]$$

$$\therefore \quad \alpha = 72°$$

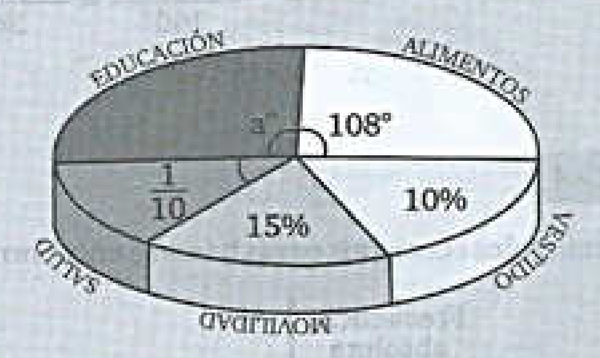
ii. Como ya sabemos que:

$$\overset{PAR}{2a} + \overset{PAR}{3b} = \overset{PAR}{20}$$

$2a$	$3b$	
↓	↓	
7	2	$\rightarrow a + b = 9$ ✓
4	4	$\rightarrow a + b = 8$
1	6	$\rightarrow a + b = 7$

$\therefore$ El máximo valor de a + b será 9

PROBLEMA 12 En el gráfico que se muestra se indican los gastos mensuales de un padre de familia de clase media baja.



i. Hallar: a

ii. Cuánto de porcentaje corresponde al sector alimentos.

iii. Cuánto más gasta en movilidad que en salud.

iv. A cuánto asciende los gastos en educación.

Resolución: i. Toda la región debe ser de 360°, pasando todo a (°)

$$a° + 108° + 10°(360°) + 15\%(360°) + \frac{1}{10}(360°) = 360°$$

$$a° + 108° + 36° + 54° + 36° = 360°$$

Cancelando (°): $a + 234 = 360$

$$\therefore \quad a = 126$$

ii. Alimentos: 108° —— x%
360° —— 100%

$$x\% = \frac{100\% \times 108}{360}$$

∴ x% = 30%

iii. Gasto en movilidad:

15%[1200] = S/.180

Gasto en salud:

$$\frac{1}{10}[1200] = S/.120$$

∴ La diferencia: 60 soles más

iv. Gasto en educación:

Como a se encuentra en (°) se puede hacer una regla de 3 simple

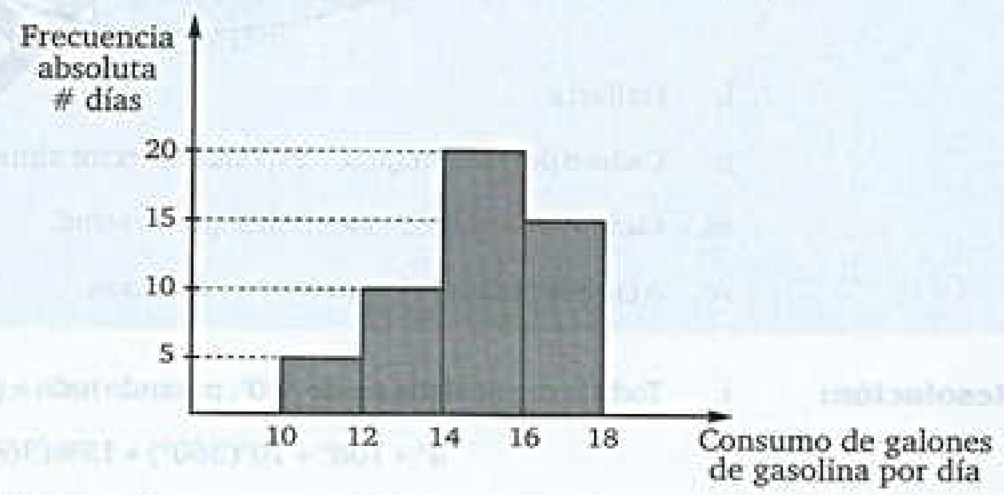
Se sabe: 360° —— S/.1200
a° —— x

$$x = \frac{a°\times 1200}{360°} = \frac{126 \times 1200}{360}$$ (como ya sabemos a = 126)

∴ x = S/.42'

V. HISTOGRAMAS

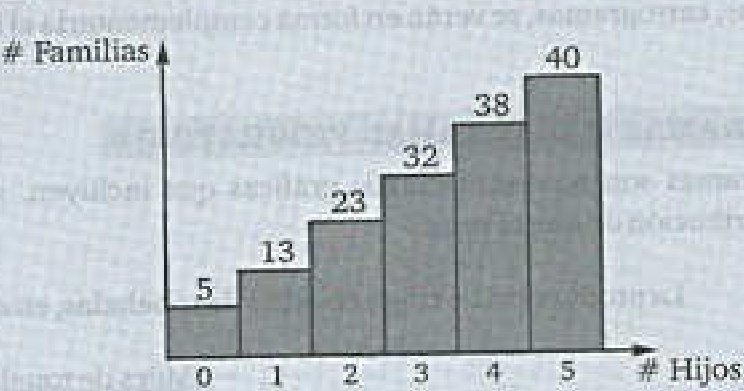
Son barras o rectángulos contiguos cuyas bases se encuentran en el eje horizontal.



– 5 días se consume 10 a más galones pero no 12 galones.

– El total de días de consumo:
5 + 10 + 15 + 20 = 50

PROBLEMA 13 La gráfica muestra la cantidad de familias que tienen a lo más cierto número de hijos.



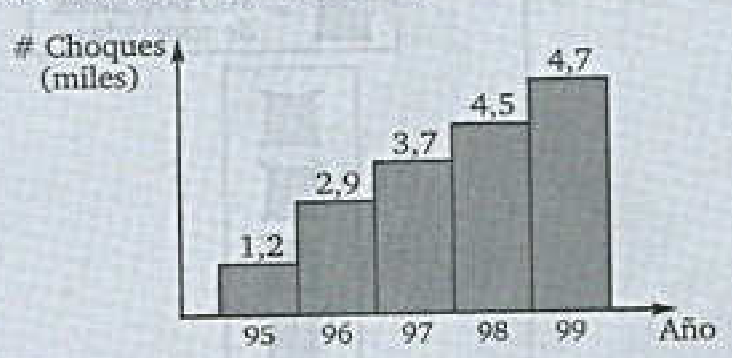
i. ¿Cuántas familias hay en total?

ii. Cuántas familias tienen a o más 2 hijos.

Resolución: i. Total de familias: 5 + 13 + 23 + 32 + 38 + 40 = 151

ii. De la gráfica a lo más 2 hijos: 23

PROBLEMA 14 En el gráfico se muestra el número de choques ocurridos en 5 años.



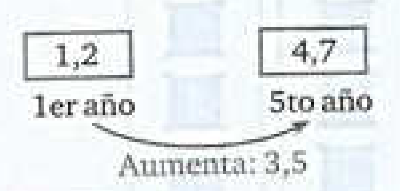
i. Promedio de choques en los 5 años

ii. Variación porcentual entre el 1er y 5to año

iii. Número total de choques.

Resolución: i. $P = \dfrac{1{,}2\times1000 + 2{,}9\times1000 + 3{,}7\times1000 + 4{,}5\times1000 + 4{,}7\times1000}{5} = 3400$

ii.



En %: $\dfrac{3{,}5}{1{,}2} \times 100\% \approx 292\%$

iii. Total: $12000 + 2900 + 37000 + 45000 + 47000 = 17000$

VI. OTROS TIPOS DE GRÁFICAS

Pictogramas, cartogramas, se verán en forma complementaria al igual que las gráficas de funciones lineales, etc.

LOS PICTOGRAMAS O DIAGRAMAS FIGURATIVOS

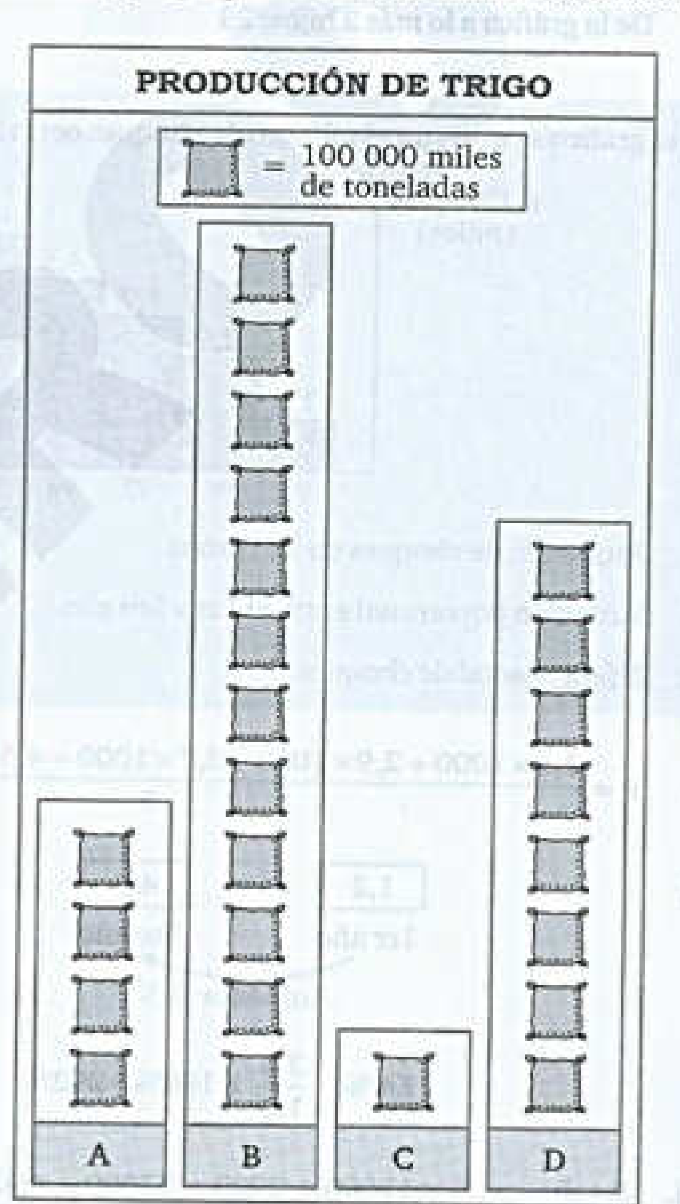
Los pictogramas son representaciones gráficas que incluyen, generalmente, figuras o motivos alusivos a la distribución de que se trata.

Ejemplo: La producción de trigo, en miles de toneladas, en cuatro países es la siguiente:

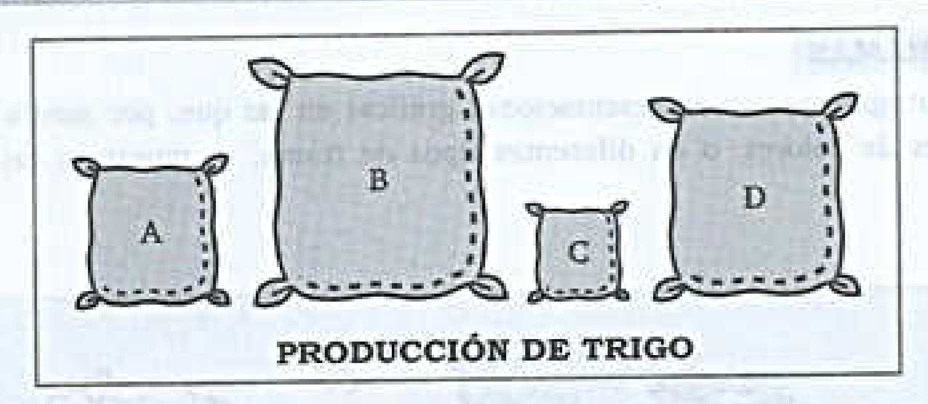
		Miles de toneladas
País A	....	400 000
País B	....	1 200 000
País C	....	100 000
País D	....	800 000

Los pictogramas sen representaciones gráficas que, aunque no muy exactas, son útiles para resaltar determinados hechos o comparaciones, ya que por su carácter llamativo son fácilmente comprendidos.

FORMA (I)



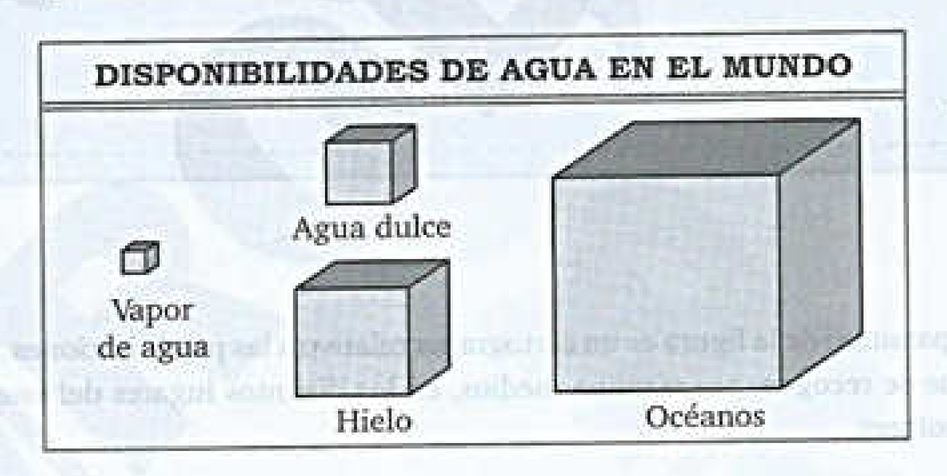
FORMA (II)



Ejemplo: El pictograma de la figura representa gráficamente las disponibilidades de agua del mundo.

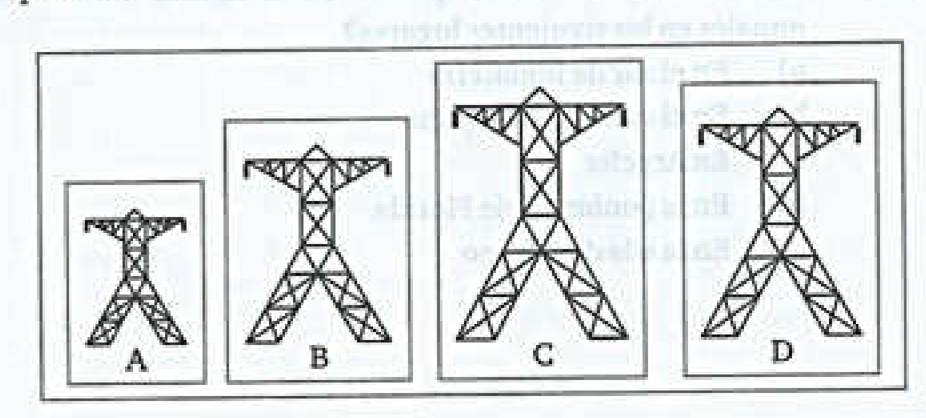
En esta representación gráfica son patentes:

a) La mayor parte del agua del mundo es agua salada.
b) El valor del agua que se encuentra en la atmósfera, y que tiene, como es conocido, importantes repercusiones atmosféricas, representa un pequeñísimo porcentaje del total.
c) La fracción de agua que se encuentra en estado sólido es relativamente superior a la cantidad existente de agua dulce.



Ejemplo: El pictograma de la figura representa gráficamente la producción de energía eléctrica en cuatro países: A, B, C y D.

a) ¿Qué orden guardan los países A, B, C y D respecto a su producción eléctrica?
b) ¿Se puede afirmar que el país C produce más del doble de lo que produce el país A?



CARTOGRAMAS

Los cartogramas son representaciones gráficas en las que, por medio de diferentes colores o intensidades de colores, o en diferentes tipos de trama, se muestran los distintos valores de la variable.

El mapamundi de la figura es un cartograma relativo a las precipitaciones. Las distintas cantidades de agua que se recogen, por término medios, en los distintos lugares del mundo están especificadas mediante colores.

En este caso, estas cantidades de agua están medidas en milímetros. Una precipitación anual de 250 mm significa que acumulada toda el agua caída en un cierto lugar durante un año, alcanzaría una altura de 250 mm sobre el nivel del suelo.

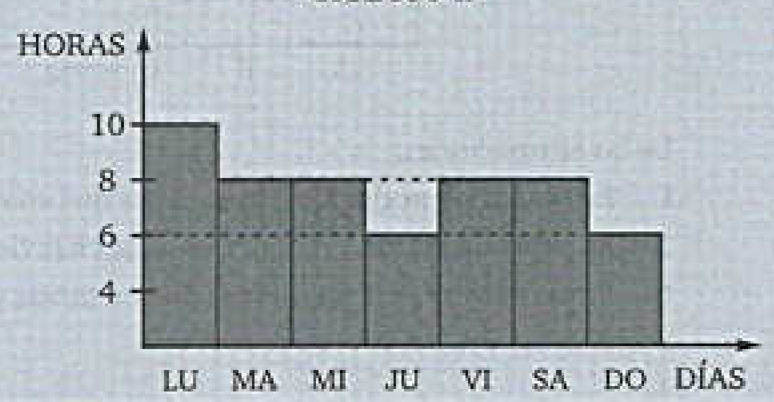
Ejemplo: De acuerdo con el cartograma de la figura, ¿cuáles serán las precipitaciones anuales en los siguientes lugares?

a) En el sur de Inglaterra
b) En el sudeste de España
c) En Argelia
d) En la península de Florida
e) En la isla de Borneo

PROBLEMA 15 El gráfico I muestra lo que gana por hora un operario y el gráfico II la cantidad de horas que labora por cada día

GRÁFICO I

GRÁFICO II



Indique la alternativa correcta:

A) El día Jueves gana el 42% de lo que percibe el día Martes.

B) El día Viernes gana el 50% de lo que percibe el día Domingo.

C) Lo que gana los días Sábado y Domingo, supera a lo que percibe los días Martes y Viernes.

D) Los días Lunes, Miércoles y Viernes gana más que los días Martes, Jueves y Sábado.

E) El ingreso que percibe trabajando los días Miércoles, Jueves y Domingo es menor al que percibe trabajando los días Martes, Sábado y Lunes.

Resolución:

El Lunes gana: $10\times10=S/.\,100$

El Martes gana: $8\times40=S/.\,320$

El Miércoles gana: $8\times30=S/.\,240$

El Jueves gana: $6\times20=S/.\,120$

El Viernes gana: $8\times20=S/.\,160$

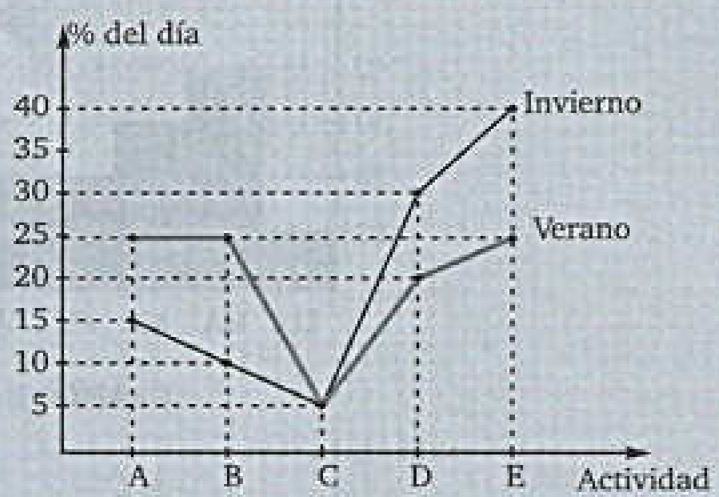
El Sábado gana: $8\times30=S/.\,240$

El Domingo gana: $6\times40=S/.\,240$

Analizando las alternativas:

$\therefore$ Marcamos la alternativa E

PROBLEMA 16 Un alumno universitario reparte (porcentualmente) su tiempo diario, tanto en invierno como en verano, en las siguientes actividades: Asistir a clases (A), Estudiar (B), Tomar sus alimentos (C), Dormir (D) y Recrearse (E) según el gráfico que sigue:



De las afirmaciones:

I. En invierno estudia 3,6 horas menos que en verano.

II. En verano duerme 2,4 horas más que en invierno.

III. En verano emplea más horas en alimentarse y dormir que en estudiar.

Son ciertas:

Resolución:

I. Estudiar (B):

En invierno: 10% (24 h) = 2,4 h.

En verano: 25% (24 h) = 6 h.

Entonces en verano estudia 6 – 2,4 = 3,6 h más que en invierno.

∴ (Verdadero)

II. Duerme (D):

En verano: 20% (24 h) = 4,8 h.

En invierno: 30% (24 h) = 7,2 h.

Entonces en verano duerme 7,2 – 4,8 = 2,4 h menos que en invierno.

∴ (Falso)

III. En verano:

Se alimenta (C): 5% (24 h) = 1,2 h. +

Duerme (D): 20% (24 h) = 4,8 h.

6 h

Estudia (B): 25%(24 h) = 6 h

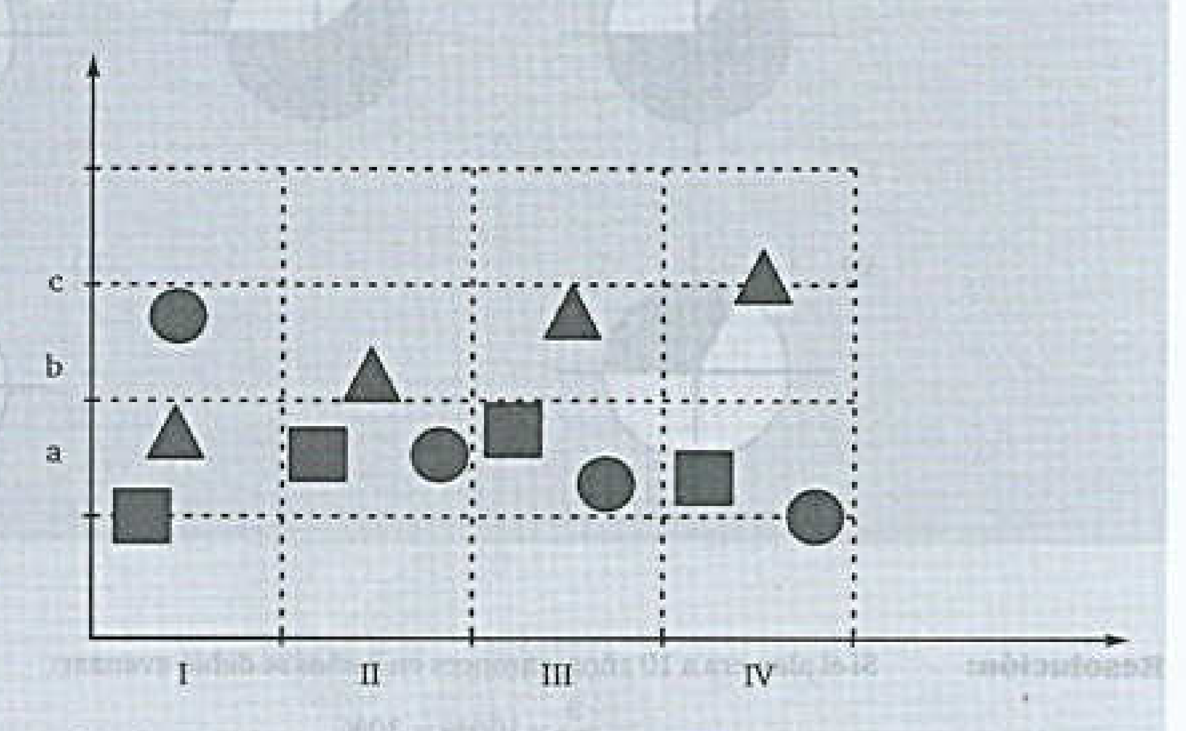
Entonces emplea igual tiempo.

∴ (Falso)

∴ Sólo II es verdadera.

PROBLEMA 17 Gráfico: Presión – Velocidad – Temperatura

▲ : Presión
■ : Temperatura
● : Velocidad



De la información brindada por el gráfico, indique las alternativas verdaderas o falsas:

I. La temperatura tiene una tendencia creciente en el tiempo.
II. La presión y la temperatura tienen la misma tendencia.
III. La presión y la velocidad tienen la misma tendencia.
IV. La presión y la velocidad tienen tendencias opuestas.

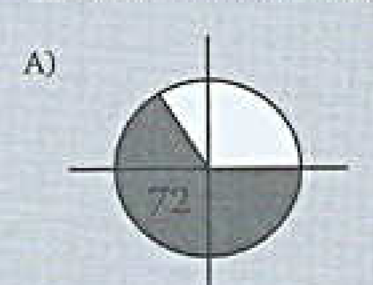
Resolución: La presión (fa): tiene tendencia creciente.
La temperatura (fa): crece y decrece.
La velocidad (fa): tiene tendencia decreciente.
Luego:

I. FALSO
II. FALSO
III. FALSO
IV. VERDADERO

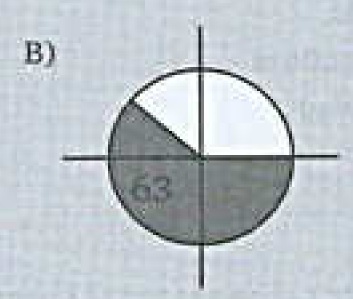
PROBLEMA 18 Un plan constante de construcción de viviendas para 10 años, se inicio en enero del 2006. ¿Cuáles de las siguientes figuras representaría el avance de 3 años en los cuáles se retrasan la décima parte de lo planificado?

■ : % de viviendas construidas.

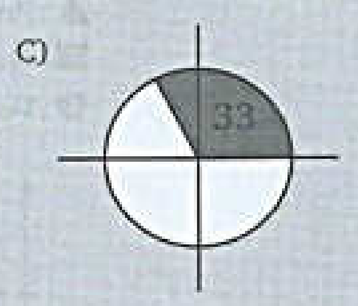
A)



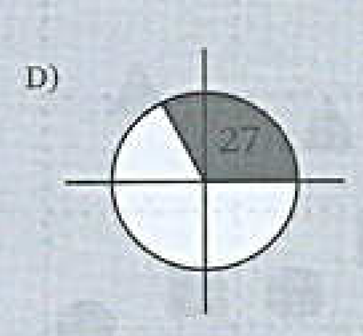
B)



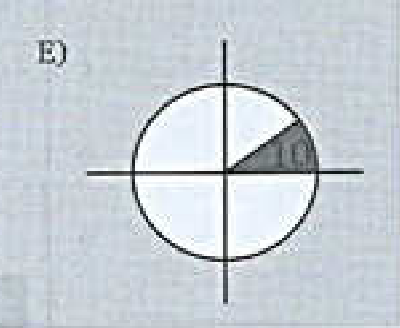
C)



D)



E)



Resolución: Si el plan era a 10 años, entonces en 3 años se debió avanzar:

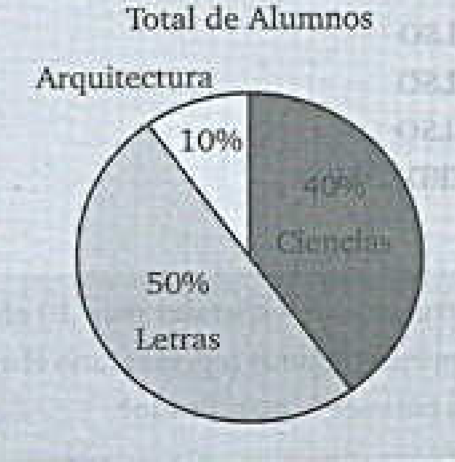
$$\frac{3}{10}\times 100\% = 30\%$$

Pero se ha retrasado $\frac{1}{10}$, con lo cual sólo avanzó:

$$\frac{9}{10}(30\%) = 27\%$$

$\therefore$ La figura D representaría lo pedido.

PROBLEMA 19 El gráfico muestra las carreras preferidas por los alumnos de un centro preuniversitario:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Los alumnos que prefieren estudiar Economía son más que los que prefieren Arquitectura.

II. Los alumnos que prefieren estudiar Arquitectura son los $\frac{2}{3}$ de los que prefieren estudiar Derecho.

III. La relación entre los que prefieren Administración y los que prefieren Ciencias es $\frac{5}{8}$.

Resolución:

I. Economía: 20% (50%) = 10%
Arquitectura: 10%
$\therefore$ (FALSO)

II. Arquitectura: 10%
Derecho: 30% (50%) = 15%

$$\frac{10\%}{15\%} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ (VERDADERO)

III. Administración: 25% (50%) = 12,5%
Ciencias: 40%

$$\frac{12,5\%}{40\%} = \frac{5}{16}$$

$\therefore$ (Falso)

$\therefore$ Sólo II es verdadera.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

El siguiente gráfico muestra las preferencias sobre ciertas profesiones de un grupo de 200 alumnos.

1. ¿Qué porcentaje prefiere Contabilidad ?

Rpta.: ....

2. ¿Qué porcentaje prefiere Ingeniería?

Rpta.: ....

3. ¿Cuántos alumnos prefieren derecho?

Rpta.: ....

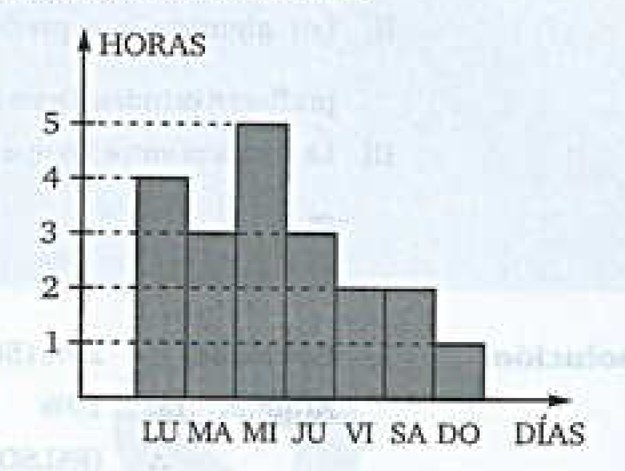
4. ¿Cuántos alumnos más prefieren Ingeniería que Medicina?

Rpta.: ....

5. ¿Cuántos alumnos menos prefieren Ingeniería que el resto de profesiones?

Rpta.: ....

El siguiente gráfico muestra cuántas horas diarias estudia un alumno.



6. ¿Cuántas horas estudia en total los Lunes, Miércoles y Viernes?

Rpta.: ....

7. ¿Cuántas horas en total estudia los Martes, Jueves y Sábados?

Rpta.: ....

8. ¿Qué porcentaje representa las horas que estudia los Lunes?

Rpta.: ....

9. ¿Qué porcentaje representa las horas que estudia los Miércoles y Jueves?

Rpta.: ....

10. ¿Qué día de la semana las horas que estudia representa el 25%?

Rpta.: ....

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRÁFICO 1:

La siguiente tabla muestra los ingresos percibidos por una empresa en cinco meses consecutivos:

MES	INGRESOS ($)	INGRESO ACUMULADO ($)	PORCENTAJE DE INGRESO ($)
1		12 000	15%
2			30%
3	16 000		
4		60 000	
5			

1. ¿Cuál fue el ingreso en el cuarto mes?

A) $ 12 000 B) $ 8 000
C) $ 16 000
D) $ 20 000 E) $ 10 000

2. ¿Cuál fue el ingreso total en los cinco meses?

A) $ 72 000 B) $ 68 000
C) $ 64 000
D) $ 70 000 E) $ 80 000

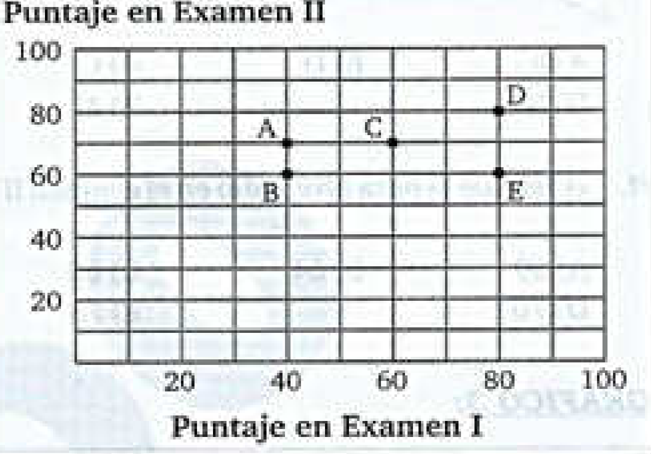
3. ¿Cuál sería el porcentaje acumulado hasta el tercer mes?

A) 60% C) 70% C) 75%
D) 65% E) 64%

4. ¿Cuál es el mayor aumento porcentual en el ingreso entre dos meses?

A) 50% B) 80% C) 100%
D) 120% E) 150%

GRÁFICO 2:



5. ¿Qué estudiante experimentó la mayor variación en su nota, entre el examen I y II?

A) B B) D C) A
D) E E) C

6. ¿Cuál es el promedio de los 5 estudiantes en el examen I?

A) 60 B) 68 C) 65
D) 70 E) 72

7. ¿Quién resultó con mayor promedio en los dos exámenes?

A) B B) C C) A
D) E E) D

8. Hallar el porcentaje de la variación entre el examen I y el examen II del alumno E.

A) Disminuye en 25%
B) Aumenta en 20%
C) Aumenta en 33.3%
D) Aumenta en 30%
E) Disminuye en 40%

9. ¿Cuántos alumnos disminuyen su nota del examen II al examen I?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

10. ¿Qué alumno disminuye su nota del examen II al examen I en 100/7%?

A) E B) D C) C
D) B E) A

11. ¿Cuál fue la nota promedio en el examen II?

A) 69 B) 64 C) 62
D) 70 E) 78

GRÁFICO 3:

La siguiente gráfica muestra las notas alcanzadas por un grupo de estudiantes en 2 cursos de la especialidad de Psicología.

		Psicología del Aprendizaje				
		0 – 4	5 – 10	11 – 15	16 – 18	19 – 20
Psicología Social	0 – 4	1	1	0	0	0
	5 – 10	2	2	1	1	1
	11 – 15	1	3	3	3	2
	16 – 18	1	3	5	8	4
	19 – 20	1	1	3	2	1

12. ¿Cuántos alumnos son?

A) 100 B) 50 C) 63
D) No se puede determinar E) 45

13. ¿Qué porcentaje aprobó Psicología social?

A) 60% B) 70% C) 82%
D) 80% E) 63%

14. ¿Qué porcentaje aprobó ambos cursos?

A) 62% B) 60% C) 64%
D) 58% E) 42%

15. ¿Qué porcentaje aprobó Psicología del Aprendizaje?

A) 72% B) 70% C) 63%
D) 68% E) 58%

16. ¿Qué porcentaje aprobó Psicología Social y Psicología del Aprendizaje pero no ambos cursos?

A) 22% B) 24% C) 26%
D) 28% E) 30%

GRÁFICO 4:

La siguiente gráfica muestra los puntajes obtenidos por n alumnos de una universidad, en matemática y en sociología. Los puntajes asignados van de 18 a 20.

		Matemática		
	Puntos	18	19	20
Sociología	18	3	0	2
	19	2	4	5
	20	2	1	1

17. ¿Cuál fue la nota promedio en Matemática?

A) 17,35 B) 19,05 C) 19,85
D) 19,95 E) N.A.

18. ¿Cuál fue la nota promedio en Sociología?

A) 18,25 B) 18.45 C) 18,65
D) 18,95 E) N.A.

19. ¿Cuántos alumnos obtuvieron por lo menos nota 19 en cualquiera de las dos materias?

A) 8 B) 11 C) 17
D) 19 E) 22

20. ¿Cuántos alumnos obtuvieron por lo menos 19 en sociología?

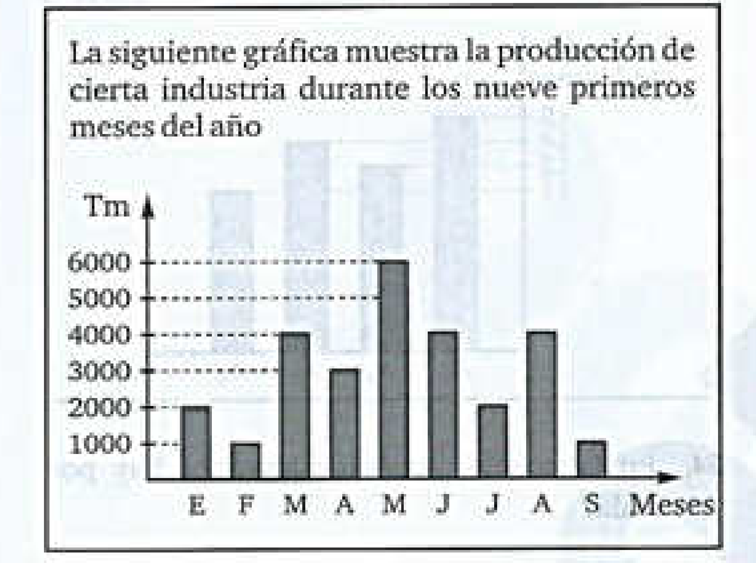
A) 11 B) 13 C) 15
D) 17 E) 19

21. ¿Cuántos alumnos obtuvieron la nota máxima en matemática y a la vez no obtuvieron el puntaje máximo en sociología?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

GRÁFICO 5:

La siguiente gráfica muestra la producción de cierta industria durante los nueve primeros meses del año



22. ¿Entre qué meses se produjo el mayor decremento en la producción?

A) Entre Febrero y Marzo
B) Entre Mayor y Junio
C) Entre Agosto y Setiembre
D) No hay decremento
E) Entre Febrero y Marzo

23. La suma de la producción de dos meses consecutivos representan el 33 1/3% de la producción total en los nueve meses; esos meses son:

A) Febrero y Marzo B) Abril y Mayo
C) Junio y Julio
D) Mayo y Junio E) N.A.

24. La producción del mes de abril representa el 50% de la producción del mes de:

A) Setiembre B) Marzo C) Agosto
D) Mayo E) Enero

25. ¿En cuál de los tres trimestres hay una mayor producción?

A) 1° y 2° B) 3° C) 1°
D) 2° E) 1° y 3°

GRÁFICO 6:

La tabla nos muestra el consumo de gaseosas de litro y medio de las marcas P, Q y R por las familias Maldonado y Noriega durante una semana invernal.

	P	Q	R
Maldonado	7	2	1
Noriega	6	4	10

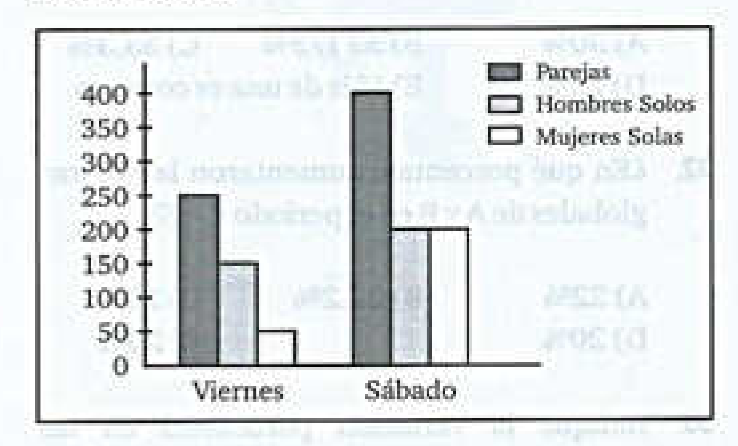
26. El número de litros de gaseosa R consumidos por la familia Noriega en el periodo mostrado es:

A) 10 B) 25 C) 25
D) Menos de 5 E) 15

27. Si el consumo de gaseosas se incrementa durante el verano en un 80%, entonces el N° total de litros consumidos semanalmente por la familia Maldonado es:

A) 80 B) 52 C) 50
D) 40 E) 27

GRÁFICO 7:

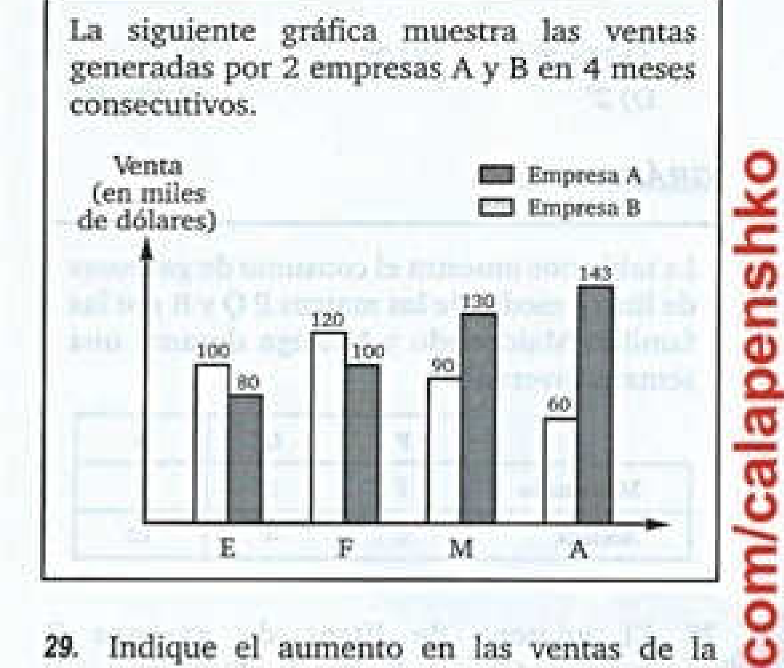


28. el total de asistencia del día Sábado es:

A) 600 B) 800 C) 1000
D) 1200 E) 1400

GRÁFICO 8:

La siguiente gráfica muestra las ventas generadas por 2 empresas A y B en 4 meses consecutivos.



29. Indique el aumento en las ventas de la empresa B en el periodo E . F:

A) 20 B) 25 C) 10
D) 15 E) 30

30. Indique el aumento porcentual en las ventas de la empresa B en el periodo E – F:

A) 20% B) 25% C) 10%
D) 15% E) 30%

31. Indique la variación porcentual para la empresa A en el período M – A:

A) 30% B) 33 1/3% C) $33,\widehat{3}\%$
D) 35% E) Más de una es correcta

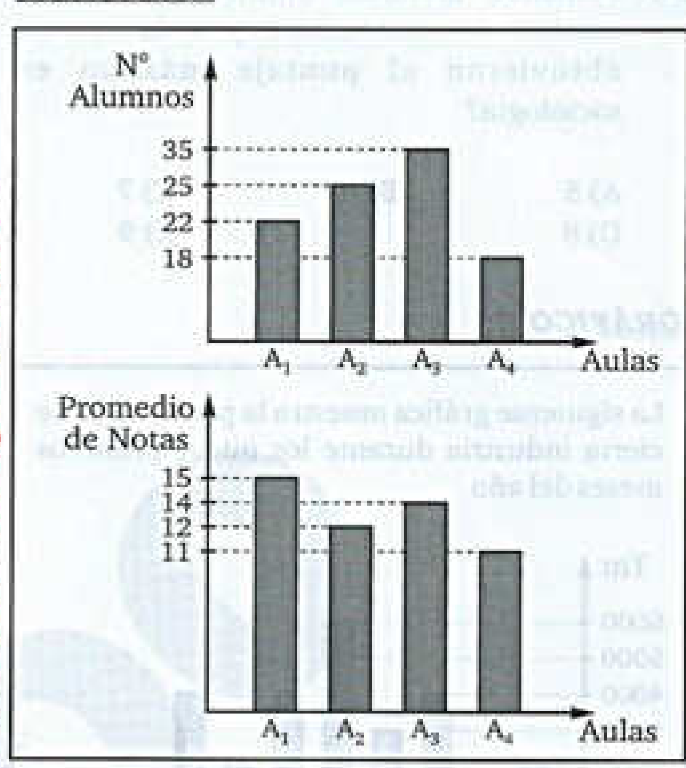
32. ¿En qué porcentaje aumentaron las ventas globales de A y B en el período E – F?

A) 22% B) $22,\widehat{2}\%$ C) 25%
D) 20% E) 23%

33. Indique la variación porcentual en las ventas de la empresa B en el periodo M – A:

A) 10% B) 9% C) 5%
D) 12% E) 20%

GRÁFICO 9:



34. En promedio, ¿cuántos alumnos hay por aula?

A) 24 B) 25 C) 26,5
D) 30 E) 24,5

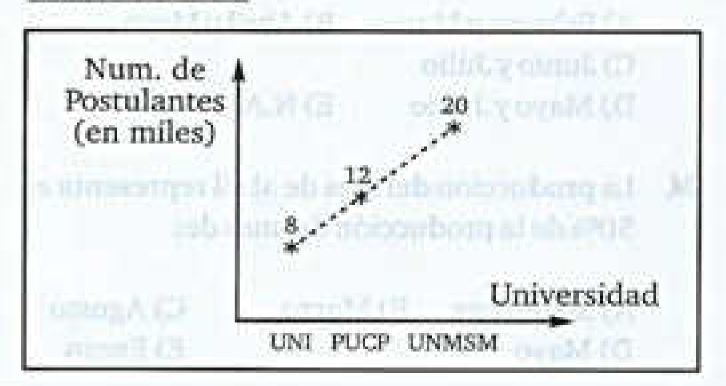
35. ¿Cuál es la nota promedio por aula?

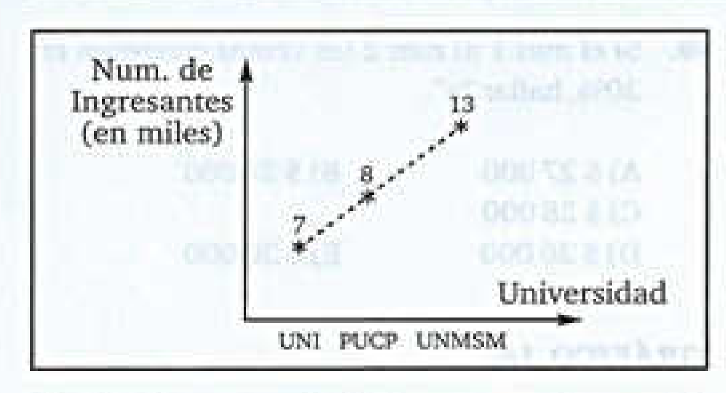
A) 12 B) 13 C) 13,18
D) 13,5 E) 12,8

36. ¿Cuál es la nota promedio de todos los alumnos?

A) 12 B) 12,88 C) 13,18
D) 13,5 E) 12,8

GRÁFICO 10:





37. ¿Qué porcentaje de los que postularon a la UNI ingresaron?

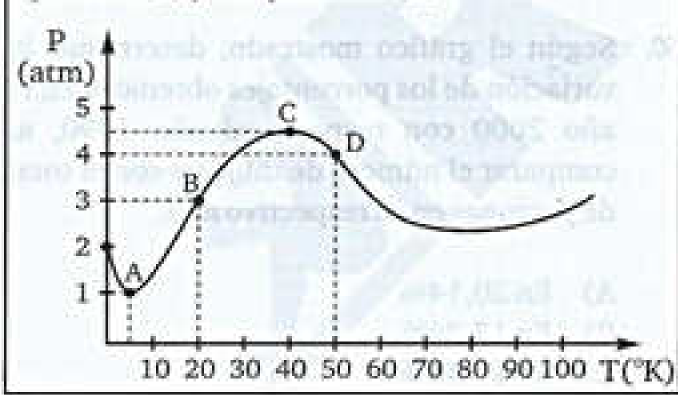
A) 87% B) 86% C) 87,5%
D) 86,5% E) 88%

38. ¿Qué porcentaje e los postulantes a la UNMSM no ingresaron?

A) 65% B) 60% C) 30%
D) 35% E) 40%

GRÁFICO 11:

A continuación se muestra la gráfica que describe el comportamiento de una sustancia química expuesta a distintos valores de presión (P) y temperatura (T).



39. Determine cuántos valores de T generan una presión de 4 atm.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

40. Para qué valor de T la presión se hace máxima

A) 4,5 B) 4 C) 40
D) 45 E) 20

41. Determine los valores de P y T para el punto B.

A) P = 3; T = 10 B) P = 3; T = 20
C) P = 2; T = 15
D) P = 4; T = 10 E) P = 3; T = 15

42. ¿Qué presión debe someterse a la sustancia para que alcance una temperatura de 5°K?

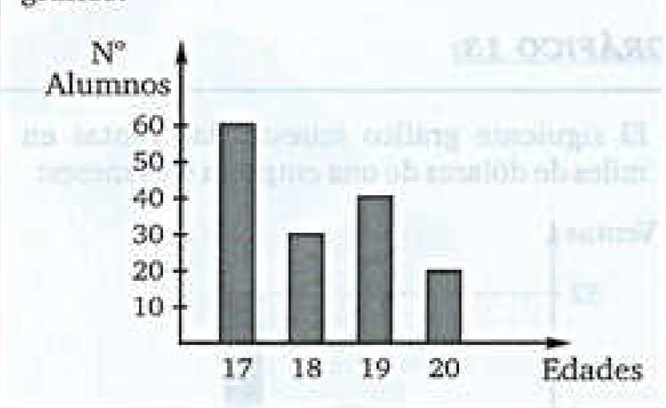
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 4,5

43. ¿Para qué intervalo de temperatura la presión siempre aumenta?

A) ⟨0, 10⟩ B) ⟨0, 20⟩ C) ⟨30; 50⟩

GRÁFICO 12:

La cantidad de alumnos de un instituto según, sus edades se muestran en el siguiente gráfico.



44. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

I. La cantidad de alumnos de 19 años es menor al promedio de la cantidad de alumnos de 17 años y 18 años.
II. Los alumnos de 18 o 19 años son tantos como los de 20 o 17 años.
III. Los alumnos que a lo más tienen 18 años representan el 40% del total.

A) Sólo I B) Sólo III C) Sólo II
D) I y III E) Todas

45. ¿Cuántos alumnos hay en el instituto?

A) 150 B) 110 C) 120
D) 130 E) 140

46. ¿Cuántos alumnos de 19 años deben llegar para que dupliquen la cantidad de alumnos de 17 años?

A) 50 B) 60 C) 70
D) 80 E) 20

47. ¿Qué porcentaje de los alumnos que tienen 19 años son los que tienen 18 años?

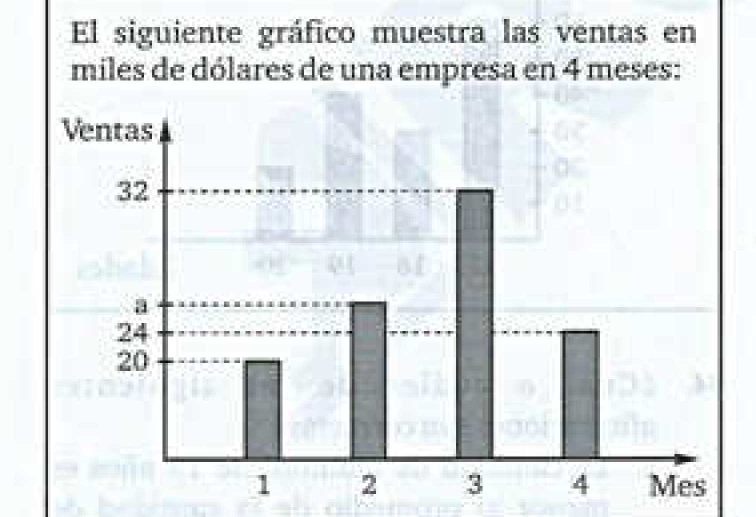
A) 70% B) 72% C) 75%
D) 80% E) 85%

48. ¿Qué porcentaje del total representan los alumnos que tienen 18 ó 19 años?

A) 45% B) 50% C) 65%
D) 40% E) 46 2/3%

GRÁFICO 13:

El siguiente gráfico muestra las ventas en miles de dólares de una empresa en 4 meses:

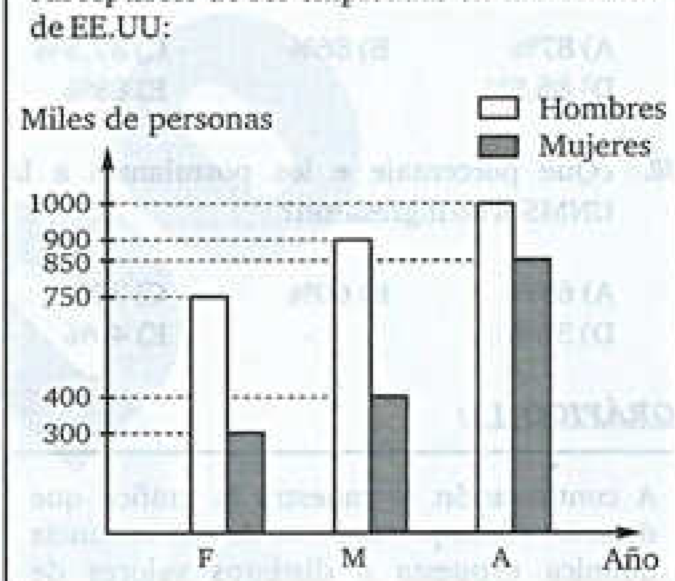


49. Si el mes 1 al mes 2 las ventas crecieron en 30%, hallar "a".

A) $ 27 000 B) $ 25 000
C) $ 28 000
D) $ 26 000 E) $ 30 000

GRÁFICO 14:

El gráfico muestra la cantidad de personas susceptibles de ser empleadas en una ciudad de EE.UU:



50. Según el gráfico mostrado, determinar la variación de los porcentajes obtenidos en el año 2000 con respecto al año 1990, al comparar el número de mujeres con el total de personas en su respectivo año.

A) En 20,14%
B) En 17,34%
C) En 16,45%
D) En 15,18%
E) En 24,47%

Secuencias Numéricas, Literales y Psicotécnico

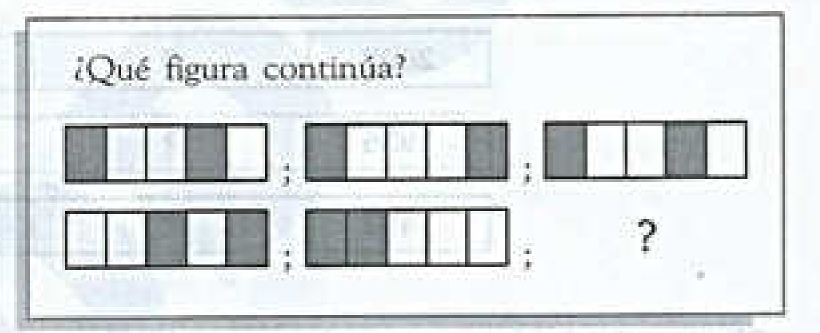
CAPACIDADES

- Desarrollar nuevas estrategias de solución frente a un problema novedoso.
- Estimular y potenciar la inteligencia en sus diversos aspectos.
- Desarrollar la creatividad y mejorar la adaptación a un medio laboral nuevo.
- Superar satisfactoriamente los exámenes de psicotécnico tomado en universidades e institutos de formación militar.

¿Qué número continúa?

1; 2; 3; 4; 5; 100; ?

¿Qué figura continúa?



Vamos con una curiosa serie numérica que espera explicación por vuestra parte:

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211

¿Cuáles son los dos siguientes términos? ¿Por qué son así?

INTRODUCCIÓN

Enfrentarse a problemas que nunca hemos visto es todo un reto, y que no en todos provoca una emoción excitante por hallar la respuesta; algunos optan por dejarlo simplemente al no entender muchas veces de que trata con exactitud dicho problema, lo mira unos segundos o minutos se toma la cabeza, mira desorientadamente su alrededor, da un suspiro de cansancio o confusión, mueve la cabeza y ... ¡Exclama! ... ¡Esto no lo entiendo! ... ¡Ni idea tengo! ... y termina haciendo a un lado el problema.

Esta es una actitud que se quiere mejorar en éste capítulo dando al lector ejercicios que por la simplicidad en sus enunciados resultan atrayentes y cautivadores, motivando la búsqueda de la solución ... aunque tengamos que invertir a veces un poco de tiempo más de lo necesario.

¿Qué número corresponde al espacio donde está UNI?

2007	0	?
1936	?	UNI
1492	?	14

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 24

Observando rápidamente nos damos con la sorpresa que 2007, 1936 y 1492 son años y que no tienen al parecer relación con 0, u 14 pero si nos ponemos a analizar con cuidado: $2\times0\times0\times7=0$ ¿Hay relación entonces?

... ¡Claro que si!. El producto de cifras del número, es el número siguiente en cada fila.

2007	$2\times0\times0\times7=0$	?
1936	$1\times9\times3\times6=162$	$1\times6\times2=12$
1492	$1\times4\times9\times2=72$	$7\times2=14$

Este tipo de problemas se toma en los exámenes de asensos para funcionarios del Estado y para el ingreso a diversas empresas del sector privado, así como también en evaluaciones de institutos armados, etc.

Los temas a desarrollar serán principalmente:

- Secuencias y distribuciones numéricas.
- Secuencias literales
- Secuencias y analogía gráficas.

I. SECUENCIAS Y DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS

En éstos problemas se debe buscar una ley de formación o criterio de orden entre dichos elementos.

Aplicación 1: Hallar: x

$$7;\ -7;\ -6;\ 12;\ 14;\ -42;\ x$$

Resolución:

$$7;\ -7;\ -6;\ 12;\ 14;\ -42;\ x$$

×(−1) +1 ×(−2) +2 ×(−3) +3

$$\therefore\quad x = -42 + 3 = -39$$

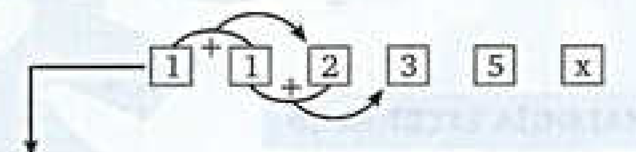
Aplicación 2: Hallar: x + y

$$\frac{2}{1};\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{2};\ \frac{3}{7};\ \frac{11}{5};\ \frac{x}{y}$$

Resolución:

(2) (3) (5) (7) (11) (y)

Núneros primos → y = 13



Números de Fibonacci → x = 3 + 5 = 8

$$\therefore\quad 8 + 13 = 21$$

Aplicación 3: Qué número falta:

$$2;\ 4;\ 1;\ 6;\ 4;\ 4;\ -1;\ 10;\ 7;\ ?$$

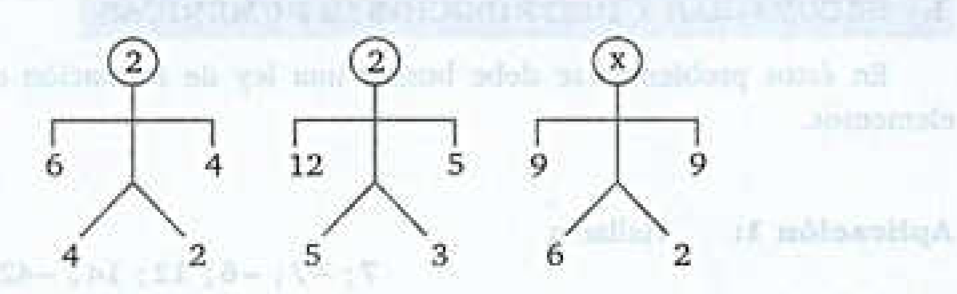
Resolución: Aunque la solución sea muy especial y particular, para llegar a ella basta observar en la secuencia una ausencia de orden.

Por tanto buscamos agrupar de 2 en 2.

$$\underbrace{2;\ 4}_{6};\ \underbrace{1;\ 6}_{7};\ \underbrace{4;\ 4}_{8};\ \underbrace{-1;\ 10}_{9};\ \underbrace{7;\ ?}_{10}$$

$$\therefore\quad ? = 3$$

Aplicación 4: Hallar: x



Resolución: x = Suma de brazos – Producto de pies

$\therefore \quad x = (9+9) - (6\times 2) = 6$

Aplicación 5: Hallar: x

24 (8) 21
36 (20) 24
44 (9) 50
21 (x) 33

Resolución:

24 (8) 21 ⇨ $2\times 1 + (4+2) = 8$

$\therefore$ 21 (x) 33 ⇨ $2\times 3 + 1 + 3 = x$

$9 = x$

II. SECUENCIAS Y ANALOGÍA LITERALES

Tener en cuenta que las letras CH y LL no intervendrán salvo aclaración en el enunciado del problema.

Aplicación 6: Qué letra continúa?

U ; T ; C ; S ; N ; ?

Resolución: Si buscamos la razón no hallaremos orden alguno:

U	T	C	S	N	? = O
N	R	I	I	U	N
O	E	N	E	E	C
	S	C	T	V	E
		O	E	E	

$\therefore \quad ? = O$

Aplicación 7: Qué letra continúa?

A ; D ; I ; O ; ?

Resolución: Aquí hay 2 criterios y el que prevalece en caso de estar las 2 claves en las alternativas, es el criterio de la razón. (el primero).

1er Criterio:

2do Criterio: Se forma la palabra que dice: ADIOS

A ; D ; I ; O ; ? = S

Aplicación 8: Hallar la letra que falta:

B ; F ; L ; ?

Resolución: Nos damos cuenta que si relacionamos con la posición en que se encuentran en el abecedario, hay una relación

B ;	F ;	L ;	? = S
↓	↓	↓	↓
2	6	12	20
↓	↓	↓	↓
1×2	2×3	3×4	4×5

Aplicación 9: Qué letra falta:

$$(U + U)^{\square} = O$$
$$(D + ?)^{\square} = V$$

Resolución:

$$(1 + 1)^3 = 8$$
$$(2 + x)^2 = 25$$
$$\therefore \quad x = 3$$

Aplicación 10: Hallar la letra que falta:

$$\frac{T + C}{C} = \frac{U + ?}{D}$$

Resolución: Cada letra representa la inicial de un número adecuado en dond ela igualdad se cumpla:

$$\frac{3+5}{4}=\frac{1+\textcircled{3}}{2} \quad (\textcircled{3} \rightarrow T)$$

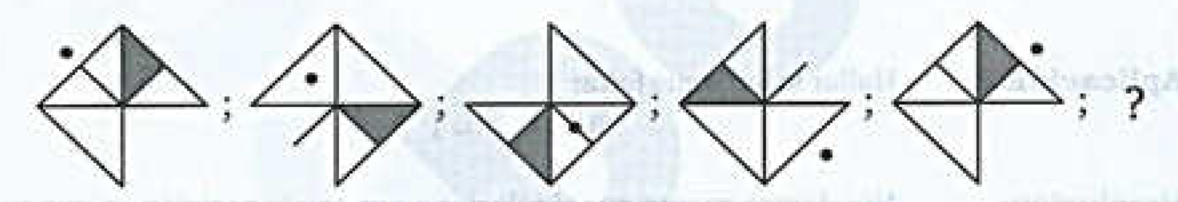
$$2=2$$

$$\therefore \quad T=3$$

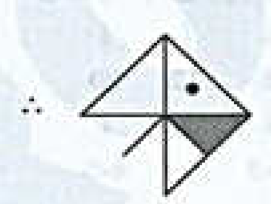
III. SECUENCIAS Y ANALOGÍAS GRÁFICAS

Aquí nos darán figuras que se originan por alguna regla común a todas, el cual se deducirá a partir de la observación cuidadosa.

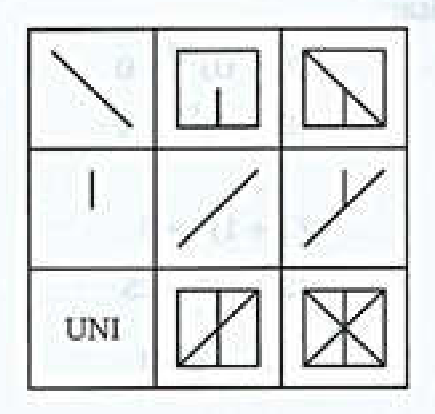
Aplicación 11: Qué gráfico continúa:



Resolución: El polígono gira 90° en sentido horario y el segmento interior sale, ingresa, sale, ... etc.

∴ 

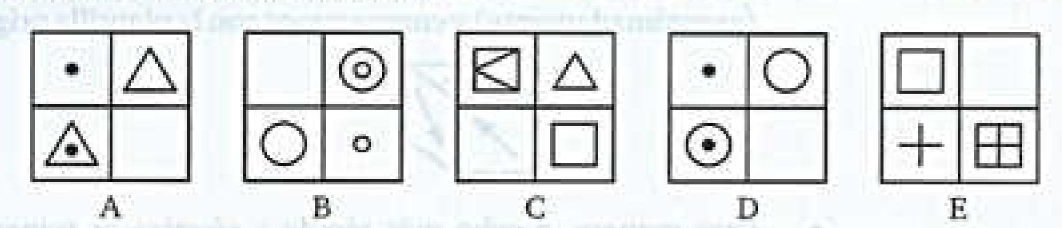
Aplicación 12: Qué figura completa UNI



Resolución: Al superponer la figura de la primera columna en la 2da columna, resulta la tercera.

∴ UNI debe ser:

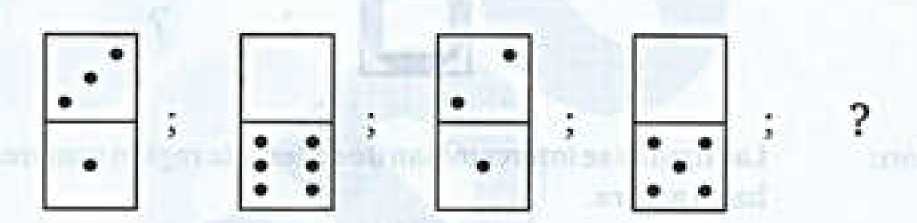
Aplicación 13: Qué alternativa no tiene relación:



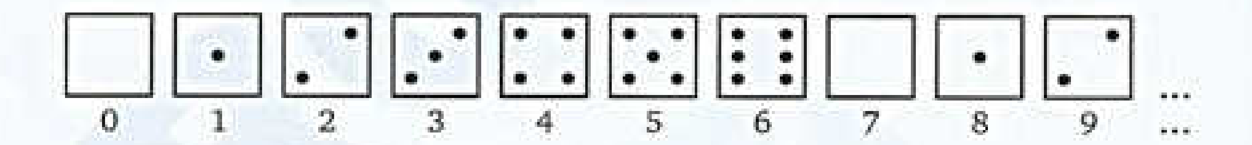
Resolución: 2 casilla se superponen y forman la tercera, todas cumplen con dicho criterio, la única diferencia lo da la casilla vacía y él gira en sentido horario de uno en uno.

∴ (A) no encaja en dicha relación.

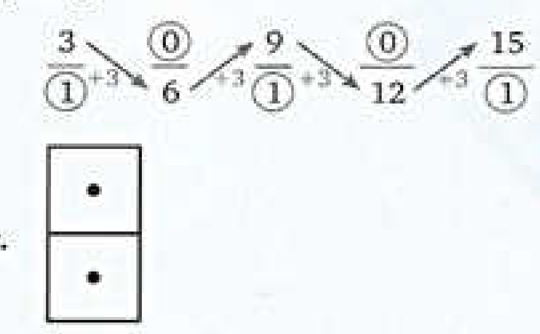
Aplicación 14: Qué figura continúa:



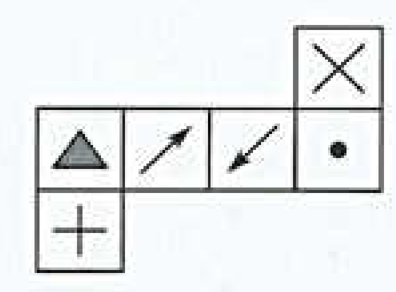
Resolución: Ordenando las fichas de dominó:



Observando en zig – zag:

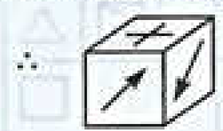


Aplicación 15: Qué figura corresponde a la gráfica mostrada; luego de ser plegada para formar un cubo:



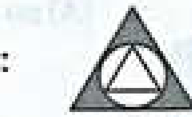
Resolución:

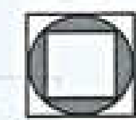
- En éstos casos buscamos el desdoblamiento de cada alternativa (aproximadamente) y comparamos con la plantilla original.

$\therefore$ 

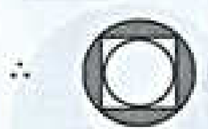
- Otra manera, mucho más rápida y efectiva es tomar el gráfico como una plantilla, sacarlo y plegarlo formando el cubo, luego con el cubo en mano

Aplicación 16: Si:

: 

 : ?

Resolución: Las figuras se intercambian de orden y la región sombreada va saliendo de adentro hacia afuera.

$\therefore$ 

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Hallar el término que continua:

1, 2, 5, 10, 17, ...

Rpta.: ....

2. Hallar el término que continua:

1, 1, 2, 6, 24, ...

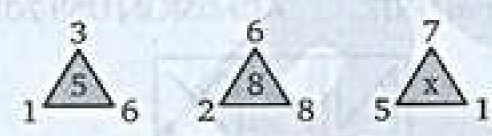
Rpta.: ....

3. Hallar el término que continua:

3, 5, 9, 17, ...

Rpta.: ....

4. Hallar x:



Rpta.: ....

5. ¿Qué letra continua?

A, C, F, J, ...

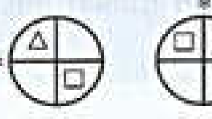
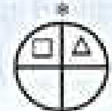
Rpta.: ....

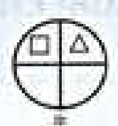
6. ¿Qué letra continua?

A, B, D, F, G, J, ...

Rpta.: ....

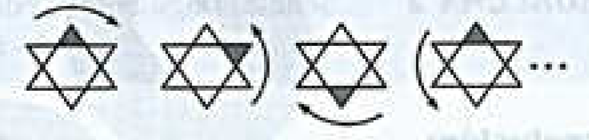
7. Indica la figura que continua:



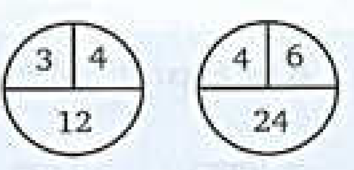
Rpta.: ....

8. Indicar la figura que continua



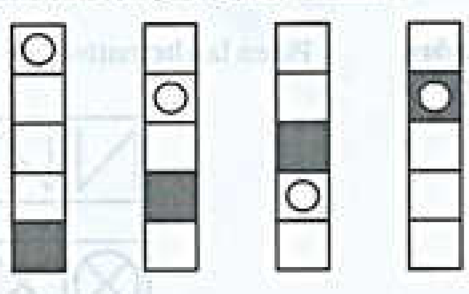
Rpta.: ....

9. Hallar x



Rpta.: ....

10. Indicar la figura que continua.



Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 Indique el número que continua la serie:

12; 26; 81; 328; ?

Resolución:

12 ; 26 ; 81 ; 328 ; ?

×2 +2 ×3 +3 ×4 +4 ×5 +5

∴ ? = 1645

PROBLEMA 2 Señale el siguiente par de la serie:

3–6; 9–12; 21–24; ?

Resolución:

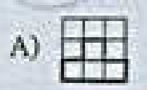
+3 +3 +3 +3

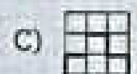
3 – 6 ; 9 – 12 ; 21 – 24 ; 45 – 48

×2 +3 ×2 +3 ×2 +3

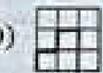
∴ ? = 45 – 48

PROBLEMA 3 ¿Que alternativa debe ocupar el casillero UNI? **ADMISIÓN UNI 2013 - I**

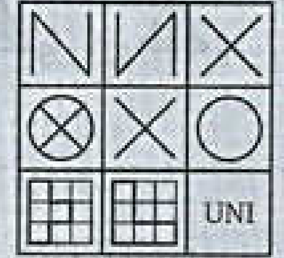




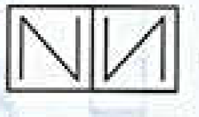
A) B) C)



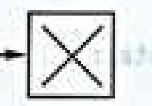
D) E)

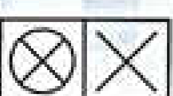


Resolución: Piden la alternativa que debe ocupar el casillero UNI. Analicemos cada fila del recuadro.

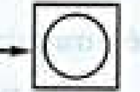


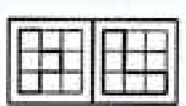
Las figuras se superponen
las líneas repetidas se borran



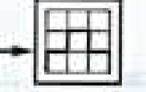


Las figuras se superponen
las líneas repetidas se borran





Las figuras se superponen
las líneas repetidas se borran

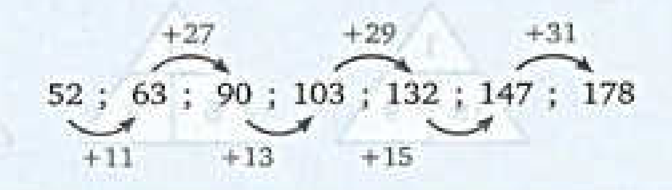


∴ La figura que corresponde es B

PROBLEMA 4 Cuál es el número que sigue en la serie:

52 ; 63 ; 90 ; 103 ; 132 ; 147 ; ?

Resolución:



∴ ? = 178

PROBLEMA 5 Calcule: x + y

1	4
2	8

1/2	8
2	32

1/3	12
2	72

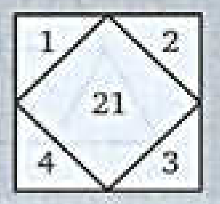
1/4	16
2	128

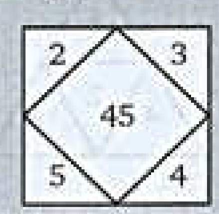
1/5	x
2	y

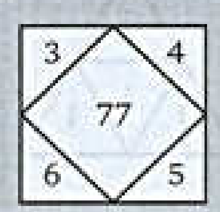
Resolución:

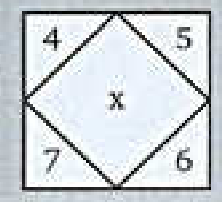
∴ x + y = 20 + 200 = 220

PROBLEMA 6 Indique el valor de x en la siguiente analogía.

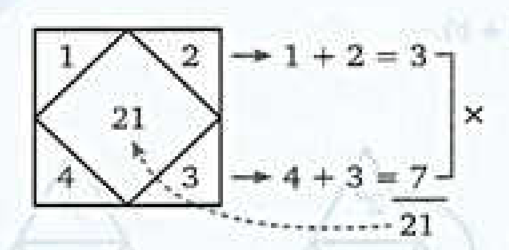


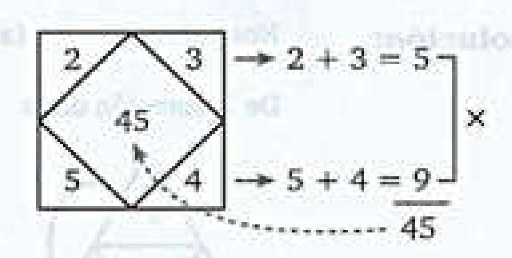


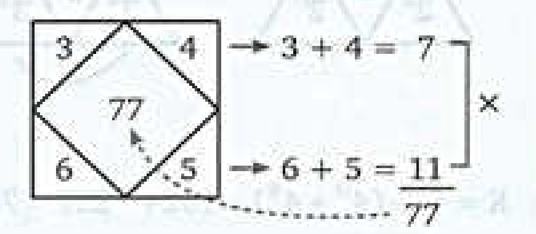


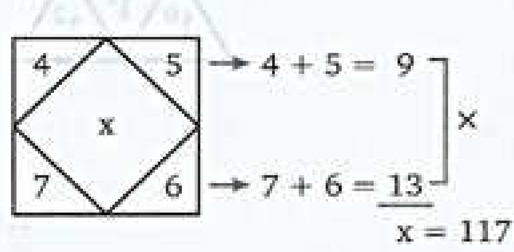


Resolución:

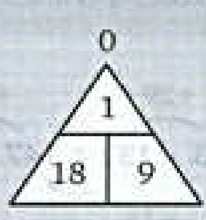
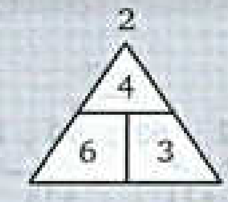
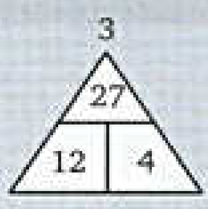
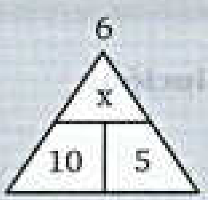




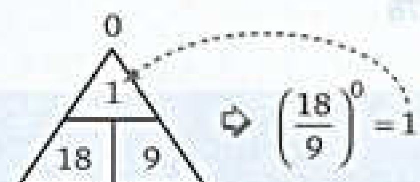




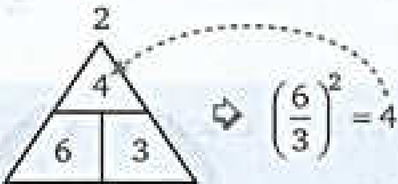
PROBLEMA 7 Indique la suma de cifras de x en la siguiente analogía:

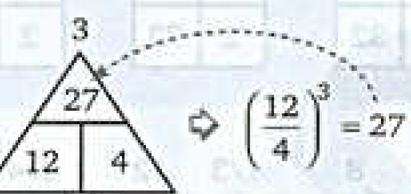
Resolución:



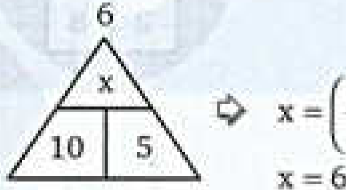
$$\Rightarrow \left(\frac{18}{9}\right)^0 = 1$$



$$\Rightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 4$$



$$\Rightarrow \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 27$$

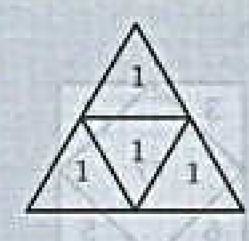
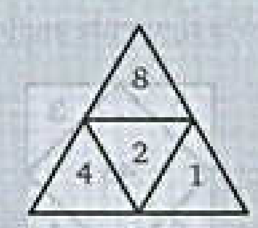
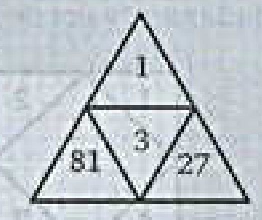
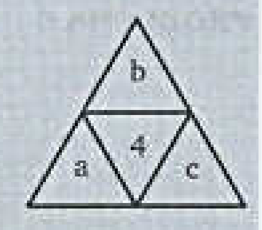


$$\Rightarrow x = \left(\frac{10}{5}\right)^6$$

$$x = 64$$

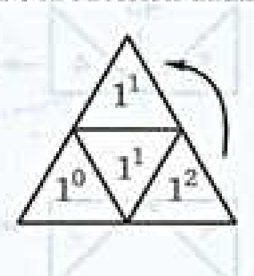
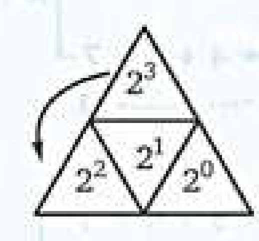
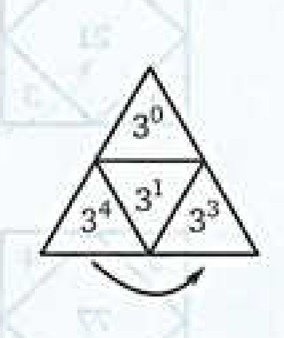
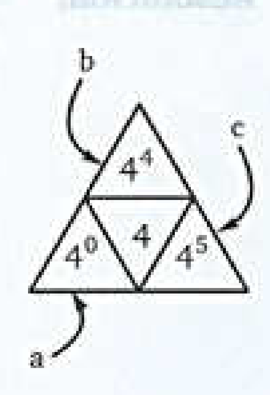
$\therefore$ Suma de cifras: $6 + 4 = 10$

PROBLEMA 8 En la siguiente sucesión determine: $K = c - (a + b)$ ADMISIÓN UNI 2013 - I

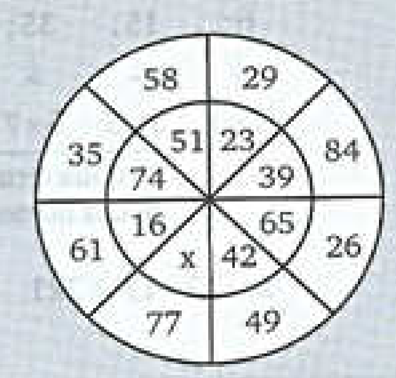
Resolución: Nos piden: $K = c - (a + b)$.

De la sucesión dada

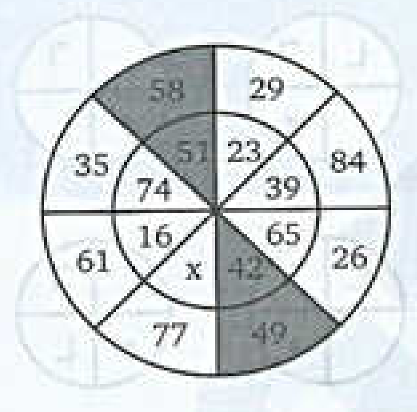





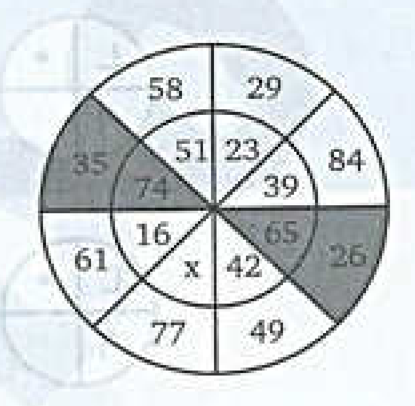
$$\therefore \quad K = 4^5 - (4^0 + 4^4) = 1024 - 257 = 767$$

PROBLEMA 9 Indique el número que debe sustituir al signo de interrogación



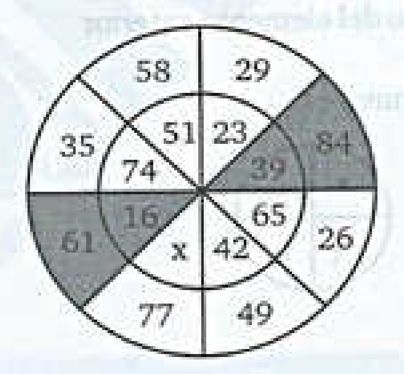
Resolución:

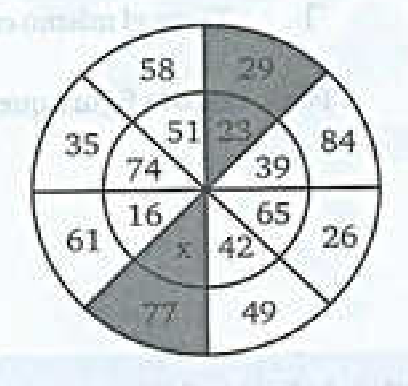




$58 - 51 = 49 - 42$
$7 = 7$

$74 - 35 = 65 - 26$
$39 = 39$





$61 - 16 = 84 - 39$
$45 = 45$

$77 - x = 29 - 23$
$x = 71$

PROBLEMA 10 Indique el número que continua en la sucesión: 6; 15; 35; 77; 143; ....

ADMISIÓN UNI 2013 - I

Resolución: Piden x.

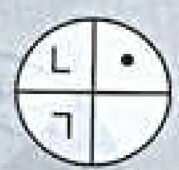
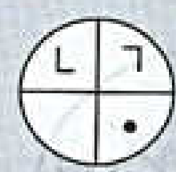
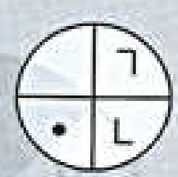
Se tiene

$$\begin{array}{cccccc} 6; & 15; & 35; & 77; & 143; & x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2\times3 & 3\times5 & 5\times7 & 7\times11 & 11\times13 & 13\times17 \end{array}$$

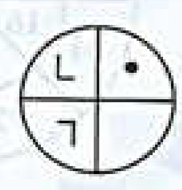
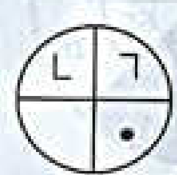
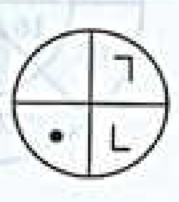
Cada término es el producto de dos números primos consecutivos

$\therefore \quad x = 13\times17 = 221$

PROBLEMA 11 Indique la figura que continua:




?

Resolución:

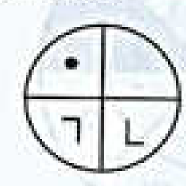



?

• : Este elemento avanza de cuadrante en cuadrante en sentido horario.

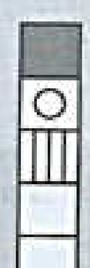
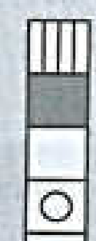
L : Este elemento avanza de cuadrante en cuadrante en sentido horario y al mismo tiempo gira 180° también en sentido horario.

˥ : Tiene el mismo criterio del elemento anterior

Por lo tanto la figura que continua es:



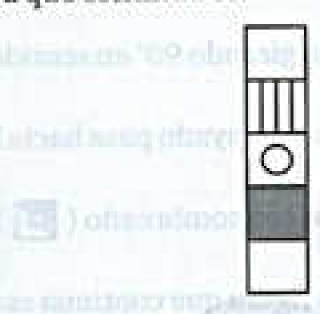
PROBLEMA 12 Indicar la figura que continua la siguiente serie:

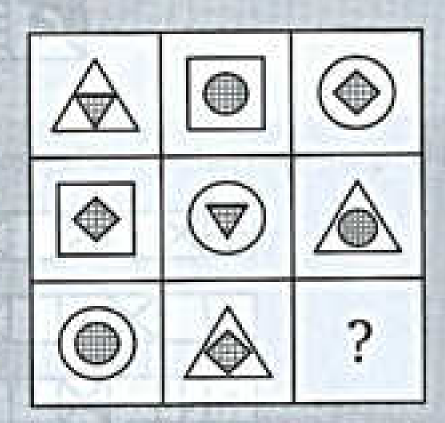
Resolución:

- El cuadrado sombreado (■) se desplaza hacia abajo de 1 en 1
- El círculo (○) se desplaza hacia abajo de 2 en 2. Si falta espacio se continua en el extremo superior
- El cuadrado rayado (▥) se desplaza hacia abajo de 3 en 3. Si falta espacio se continua en el extremo superior.

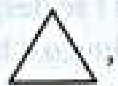
Por lo tanto la figura que continua es:

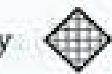


PROBLEMA 13 Indicar la figura que continua la siguiente serie:



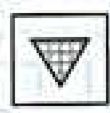
Resolución: Todo el gráfico está formado por 2 grupos de figuras: las grandes y las pequeñas

Las grandes son:  ,

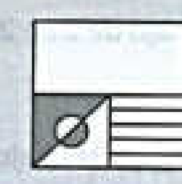
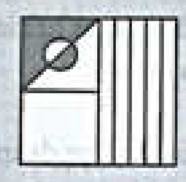
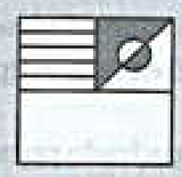
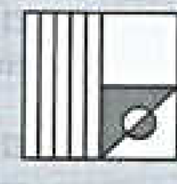
Las pequeñas son: , 

Las 6 figuras aparecen en cada una de las 2 primeras filas (las pequeñas dentro de las grandes), lo mismo debe ocurrir en la tercera fila .

Por lo tanto la figura que completa el gráfico es:



PROBLEMA 14 Indicar que figura continua en la siguiente serie:

    ?

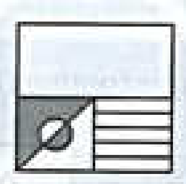
Resolución: Para encontrar la figura que continua debemos tener en cuenta 3 aspectos:

1ro : La figura esta girando 90° en sentido horario

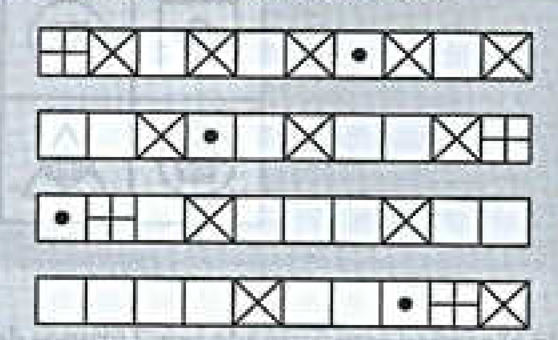
2do : Luego del giro el rayado pasa hacia la zona blanca

3ro : El cuadradito con sombreado ( ) mantiene la misma orientación.

De acuerdo a esto la figura que continua es:



PROBLEMA 15 Indicar la figura que continua en la siguiente serie:



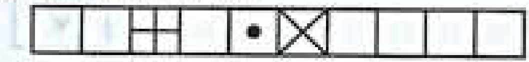
Resolución:

- El cuadradito con cruz (⊞) se desplaza 9 lugares hacia la derecha, luego 8 lugares hacia la izquierda, luego 7 hacia la derecha entonces le corresponde 6 hacia la izquierda.

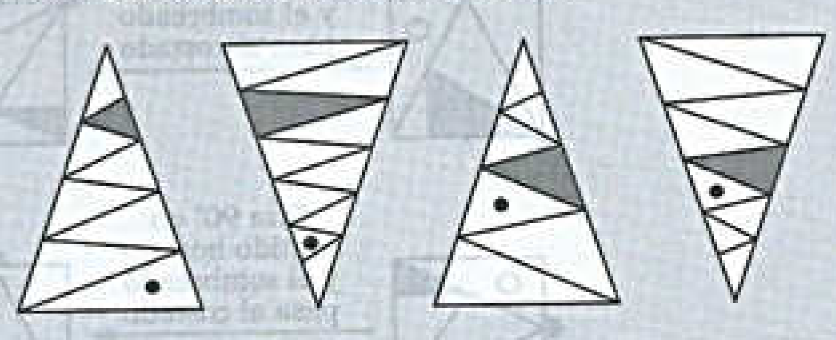
- Las equis (☒) aparecen dejando un espacio (desde el extremo izquierdo) en la primera figura.
En la segunda dejando 2 espacios, en la tercera dejando 3 espacios, en la cuarta dejando 4 espacios. Entonces corresponde dejar 5 espacios.

- El punto (•) se desplaza de 3 en 3 lugares hacia la izquierda.

Por lo tanto la figura que continua es:



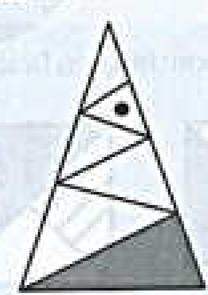
PROBLEMA 16 Indicar la figura que continua en la siguiente serie:



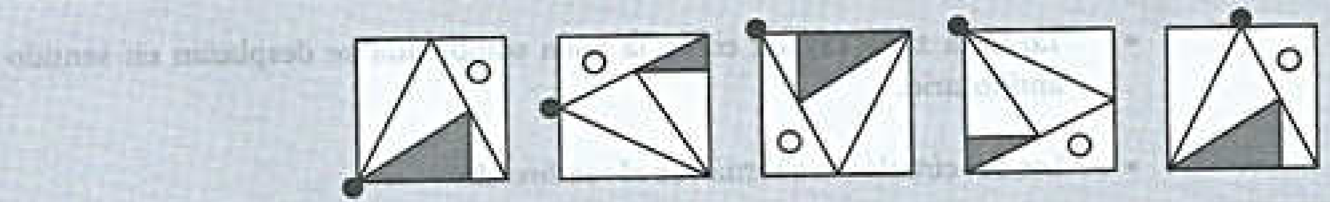
Resolución: Corresponde un triángulo en posición normal (△)

- En el primer triángulo hay 8 espacios, en el tercer triángulo hay 7 espacios, así que en la figura que continua debe tener 6 espacios.
- La zona sombreada empieza en segundo lugar (contando desde arriba) luego está en tercer lugar, luego en cuarto lugar, luego en quinto lugar; así que en la figura que continua debe estar en sexto lugar.
- El punto (•) empieza en el primer espacio (desde abajo), luego está en el segundo espacio, luego en el tercero, luego en el cuarto; así que en la figura que continua debe estar en el quinto espacio.

Por lo tanto la figura que continua es:

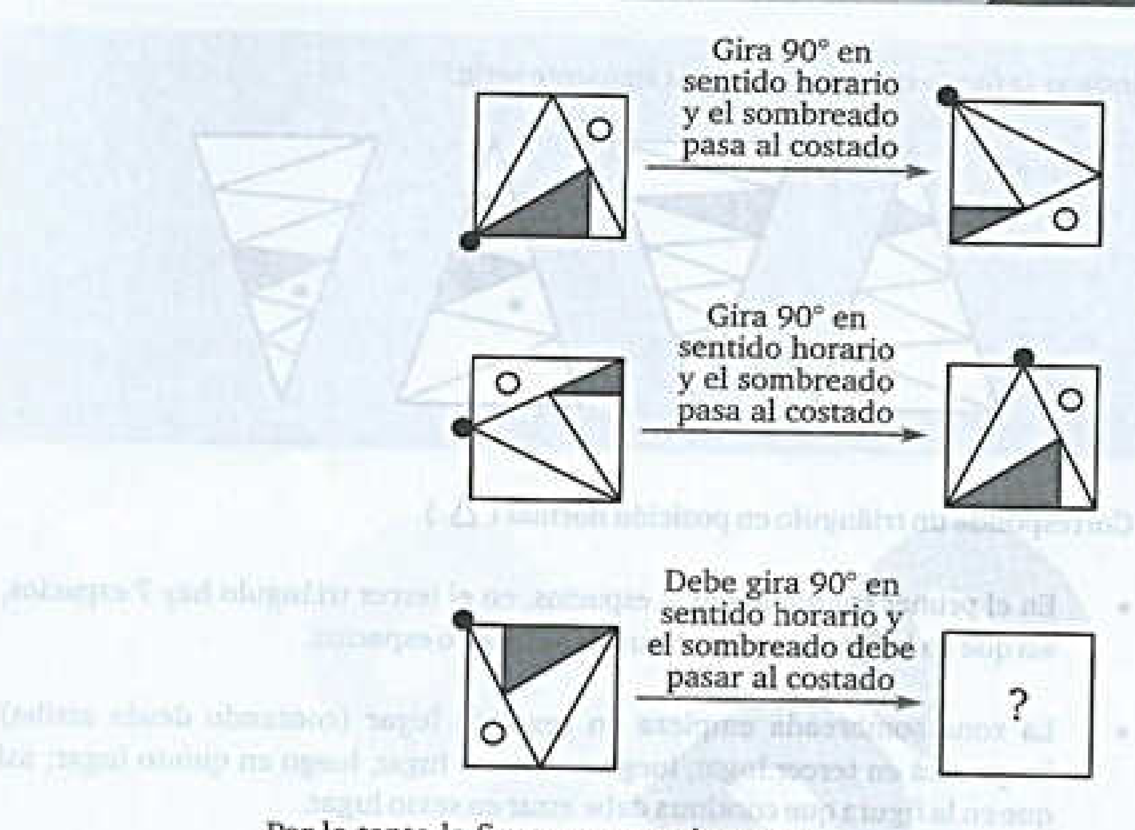


PROBLEMA 17 Indicar que figura continua en la siguiente serie:

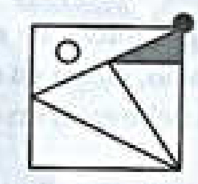


Resolución:

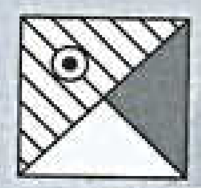
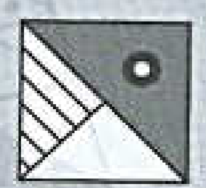
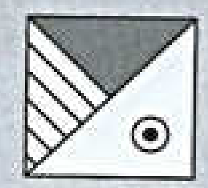
- La primera figura genera la cuarta.
- La segunda figura genera la quinta.
- Entonces la tercera figura generará la figura que continua.



Por lo tanto la figura que continua es:



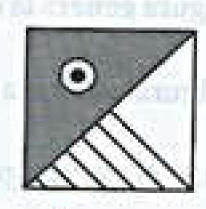
PROBLEMA 18 Indique que figura continua en la siguiente serie gráfica:

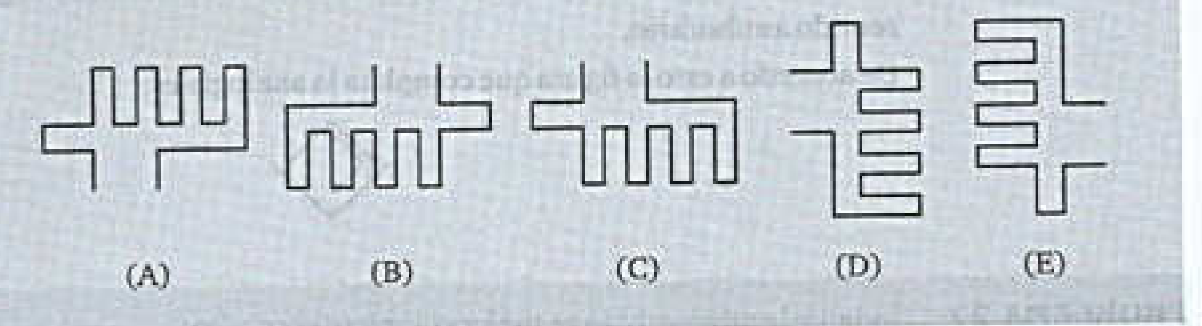
Resolución:

- La figura está girando 90° en sentido horario .
- Tanto la zona rayada como la zona sombreada se desplazan en sentido antihorario.
- Los dos círculos se alternan en el sombreado.

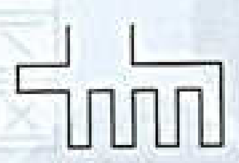
Por lo tanto la figura que continua es:



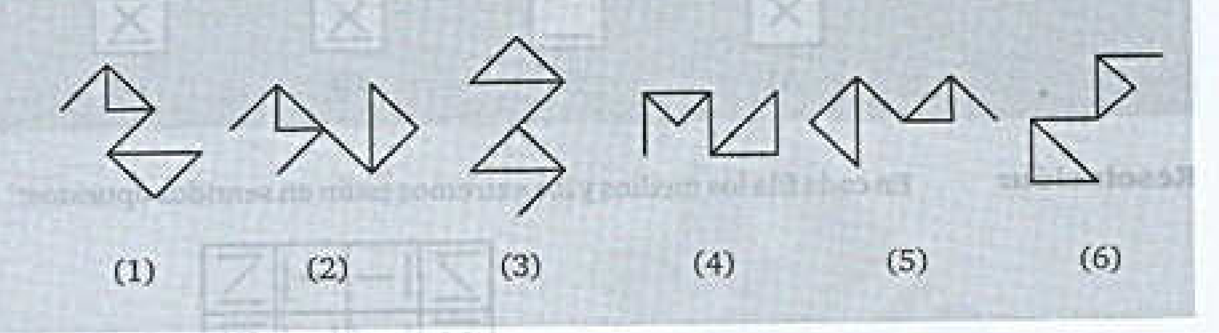
PROBLEMA 19 Señale la figura que no pertenece a la serie.



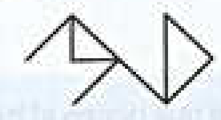
Resolución: Si hacemos girar a las figuras sobre el plano de la hoja, todas adoptan una misma posición y orientación excepto la figura (C)



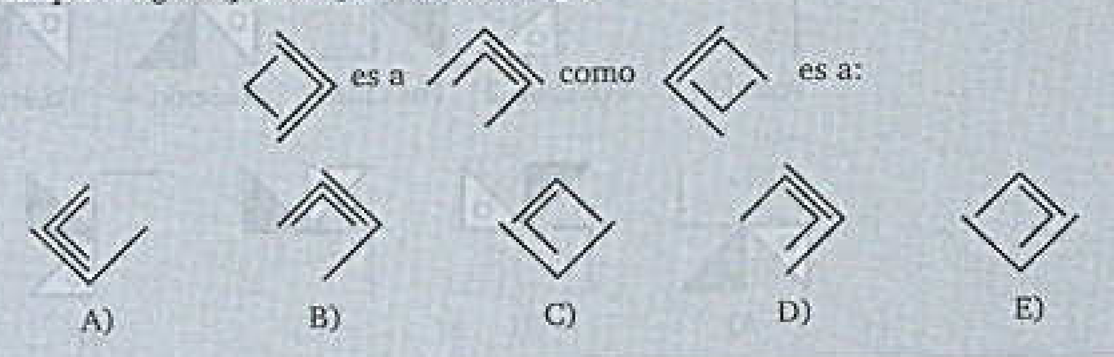
PROBLEMA 20 ¿Cuál de las figuras es diferente a las otras?



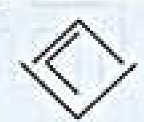
Resolución: Todas las figuras están formadas por 8 segmentos, excepto la figura (2) que tiene 9 segmentos.



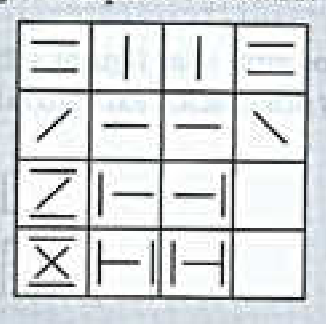
PROBLEMA 21 Indique la figura que completa esta analogía.



Resolución: La figura presenta 3 líneas: pequeña, mediana y grande.
La mediana no varía, la pequeña gira 90° en sentido horario y la grande gira 90° en sentido antihorario.
De acuerdo a esto la figura que completa la analogía es:

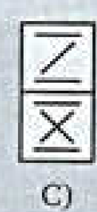


PROBLEMA 22 Indique la alternativa que mejor complete el cuadro:

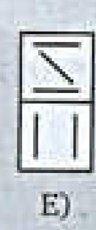


A)

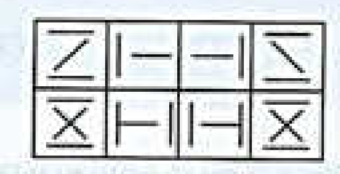
B)


C)

D)

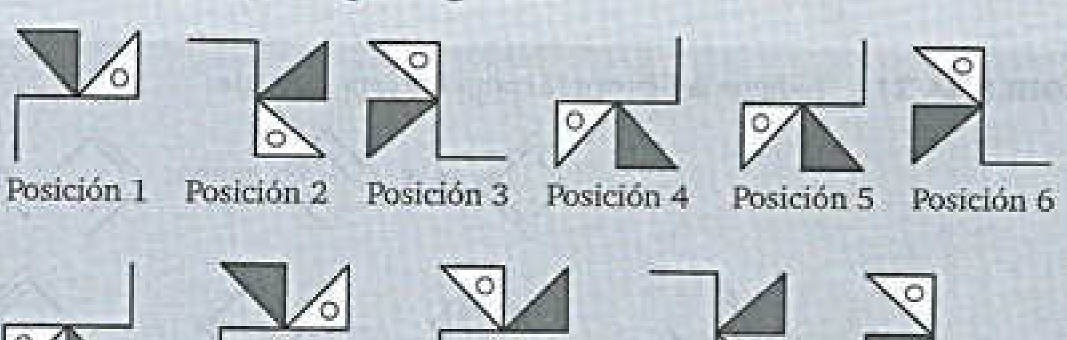

E)

Resolución: En cada fila los medios y los extremos están en sentidos opuestos:



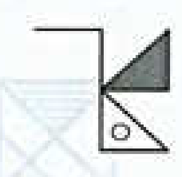
∴ La figura que completa es D

PROBLEMA 23 Determine la figura que ocupa el lugar diez:



Resolución: Las figuras de posición impar (1, 3, 5) giran 90° en sentido antihorario y las figuras de posición par (2, 4, 6) giran 90° en sentido horario.

De acuerdo a esto, la figura diez es:



PROBLEMA 24 Considerando la letra Ñ, el grupo de letras que continúa es:

A, AC, ACE, ACEH, ACEHL, ?

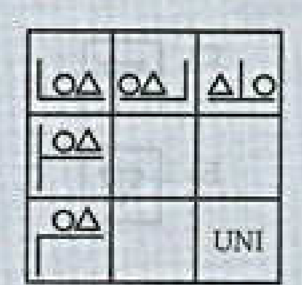
ADMISIÓN UNI 2017 - II

Resolución: Nos piden el grupo de letrs que continúa.

Observamos que se aumenta una letra a cada grupo anterior; entonces, analicemos el último grupo.

PROBLEMA 25 Determine la alternativa que debe ocupar el casillero UNI, en el cuadro siguiente.

ADMISIÓN UNI 2016 - I

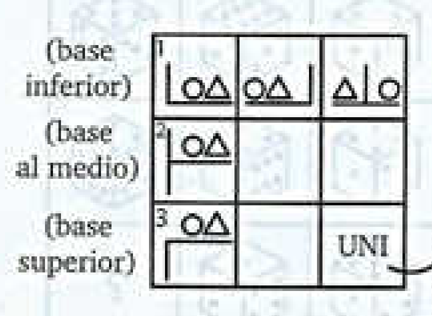


Resolución: Nos piden la alternativa que debe ocupar el casillero UNI.

Podemos ver tres niveles en la base:

└ ; ├ y ┌

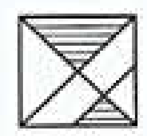
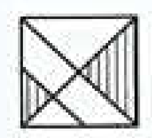
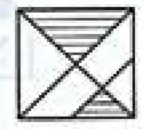
es decir que de la primer fila a la segunda, los elementos de la base suben un nivel, de igual forma en le tercera, así:

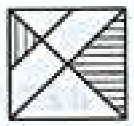
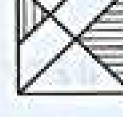
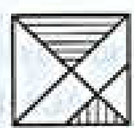
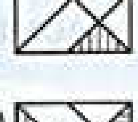


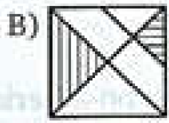
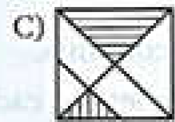
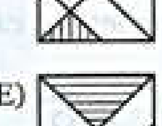
PROBLEMAS PROPUESTOS

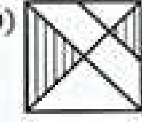
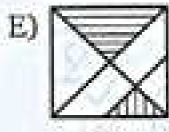
Indicar que alternativa completa los siguientes gráficos.

1.

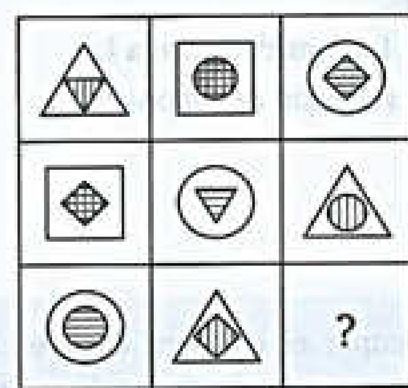
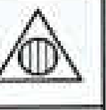
  

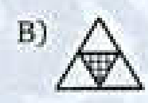
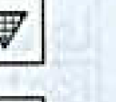
    ?

A) B)  C)  

D)  E) 

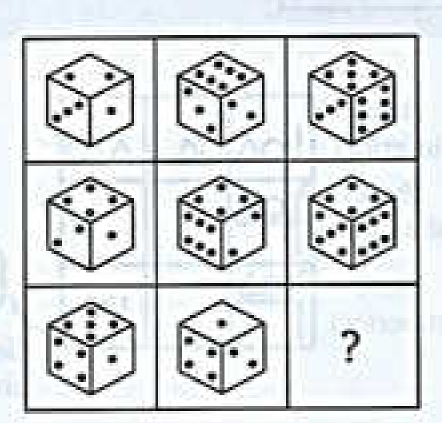
2.

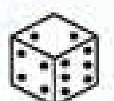
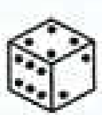



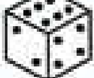
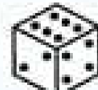
A)  B) C) 

D) E)

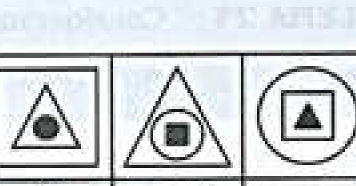
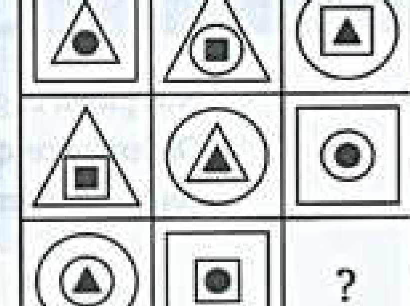
3.

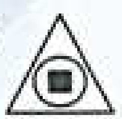
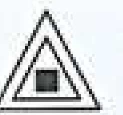


A) B)  C) 

D)  E) 

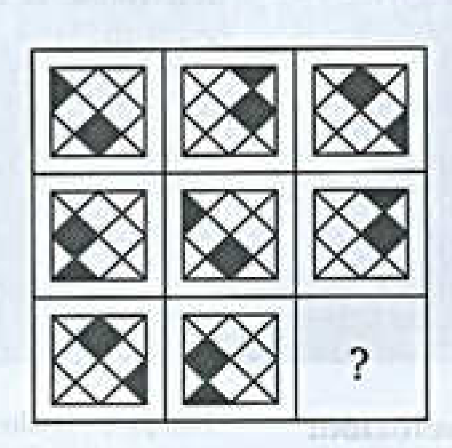
4.

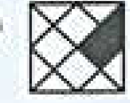



A)  B)  C)

D) E)

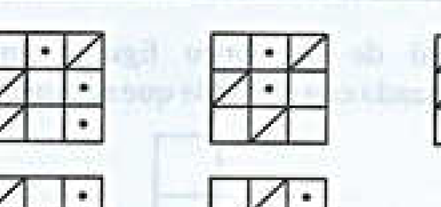
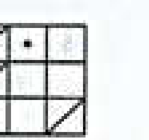
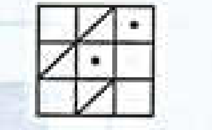
5.



A) B) C) 

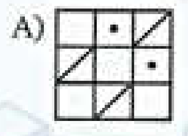
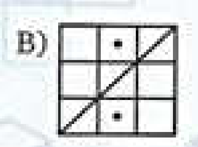
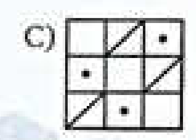
D) E)

6.

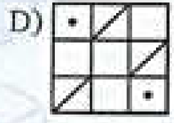
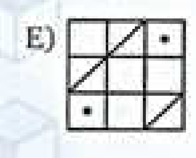




?

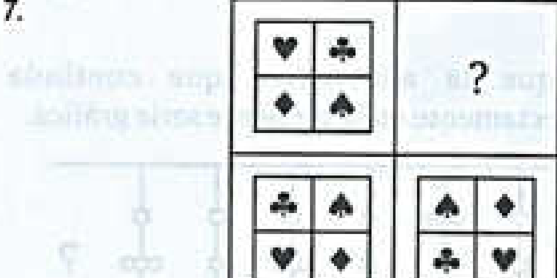
A) B) C)

D) E)

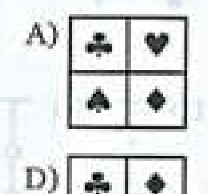
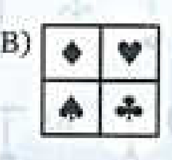



7.

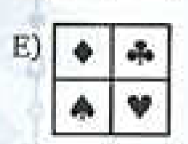


?

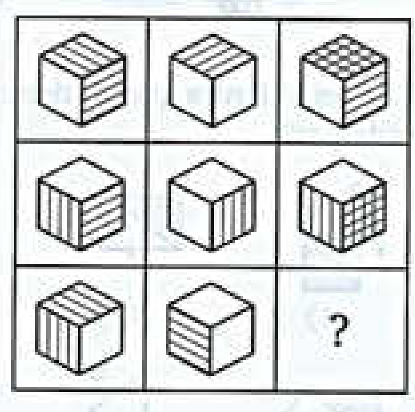
A) B) C)

D) E)

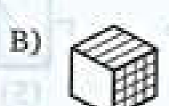
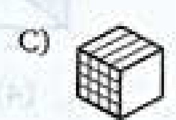


8.

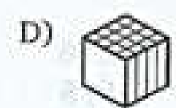
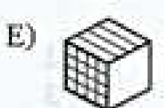


?

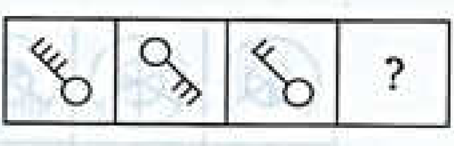
A) B) C)

D) E)

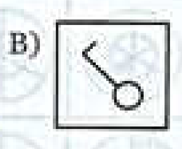
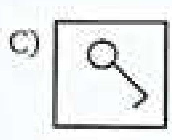



9.

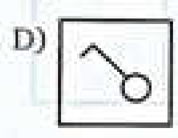
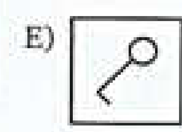


?

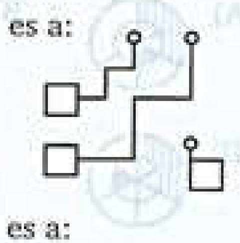
A) B) C)

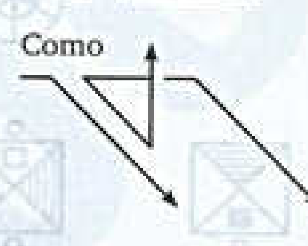
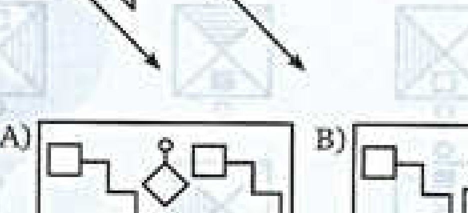
D) E)

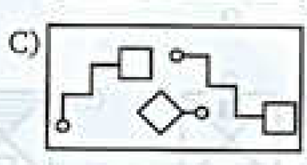
10. Esta figura es a:



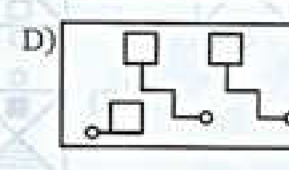
Como es a:

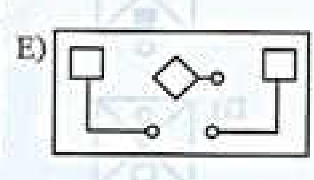
A) B)



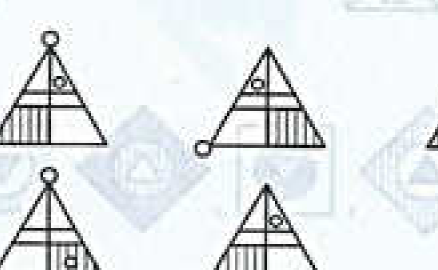
C)



D) E)

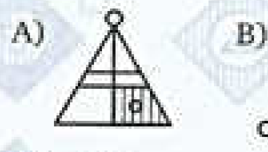
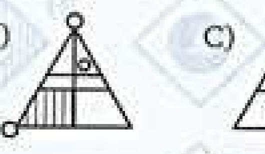


11.

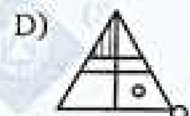
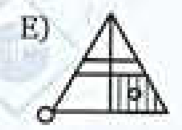


?

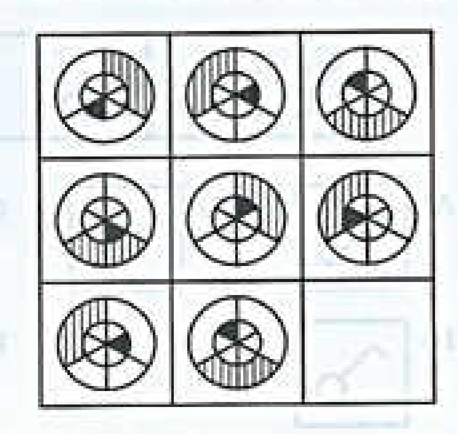
A) B) C)

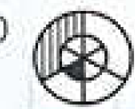



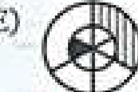
D) E)

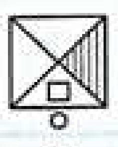
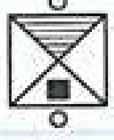
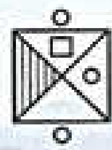
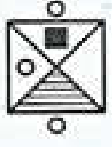
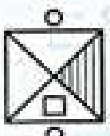
12.

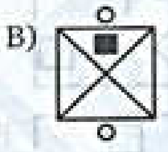


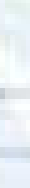


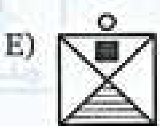


13.

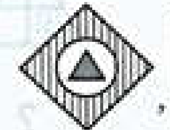






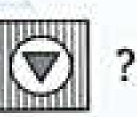




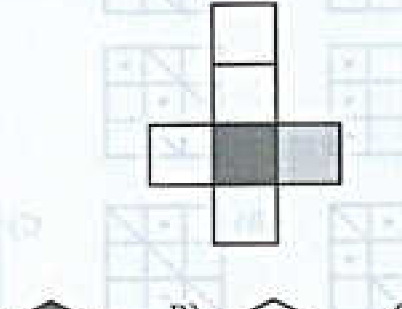


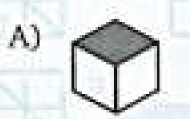
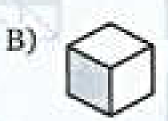
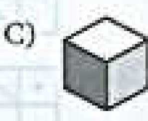
14.

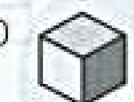




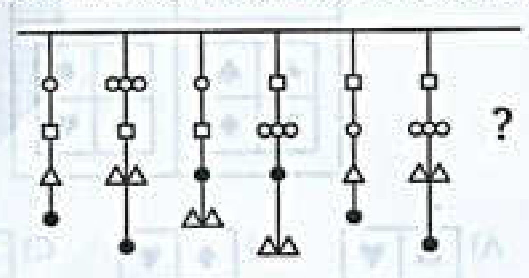
15. ¿Cuál de las cinco figuras puede ser realizada con el molde que se muestra?

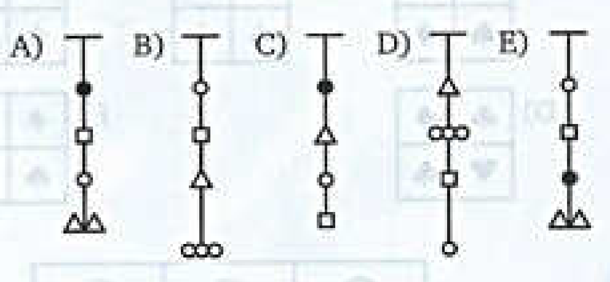


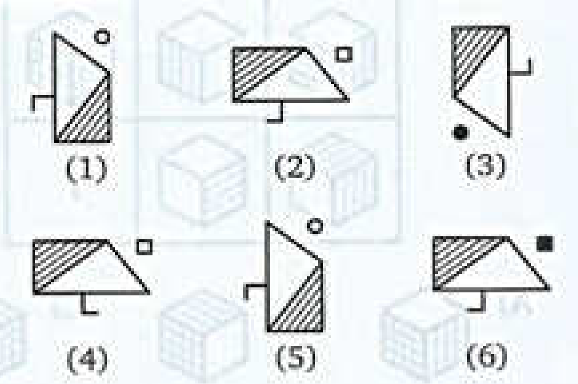


16. Indique la alternativa que continúa correctamente en la siguiente serie gráfica.



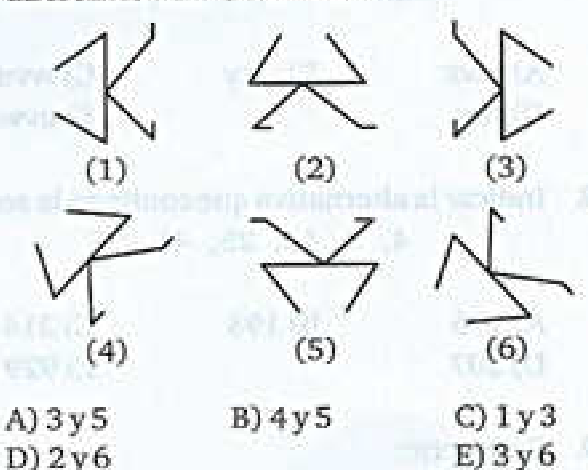


17. ¿Cuál es la figura que no tiene relación con las demás?



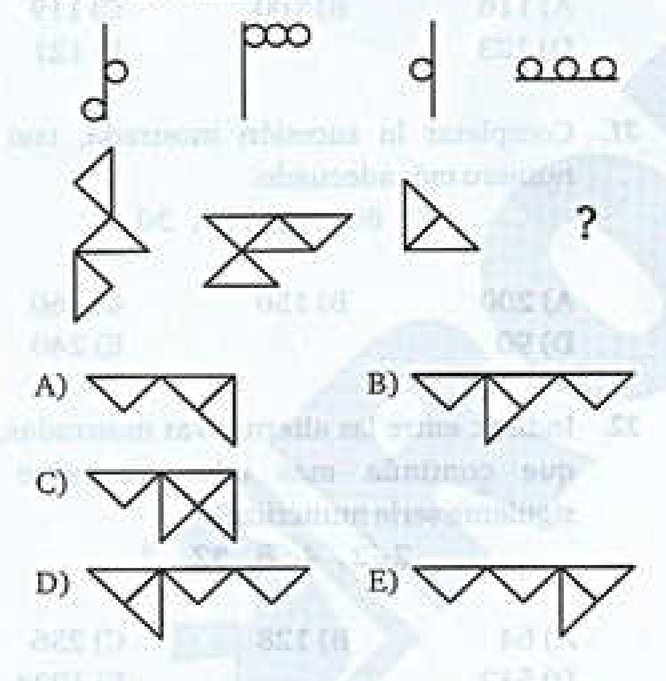
A) 2 B) 4 C) 6
D) 3 E) 5

18. En la secuencia dada, halle 2 figuras diferentes a las 4 restantes.

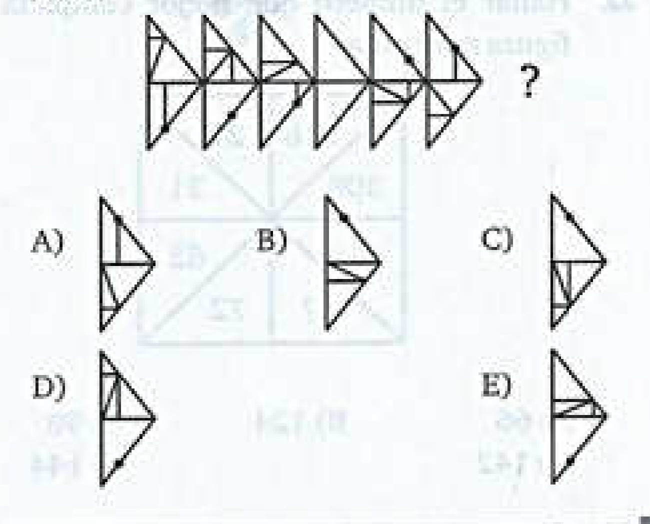


A) 3 y 5 B) 4 y 5 C) 1 y 3
D) 2 y 6 E) 3 y 6

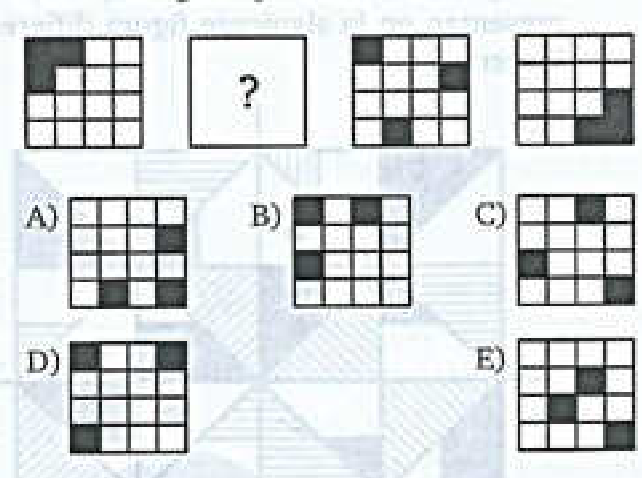
19. Siguiendo la secuencia superior, completar la secuencia inferior.



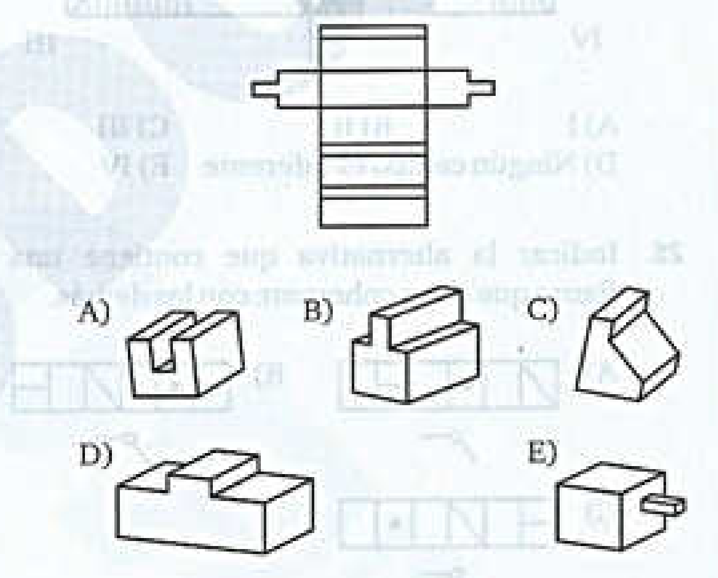
20. Hallar la figura que sigue en la siguiente serie.



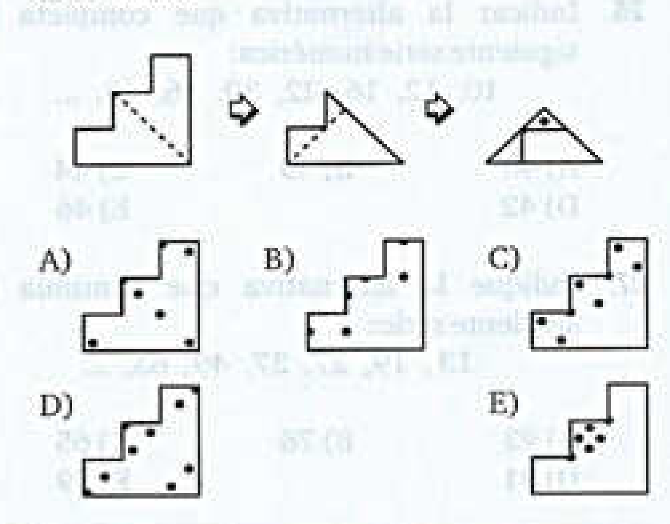
21. Señale la figura que falta.



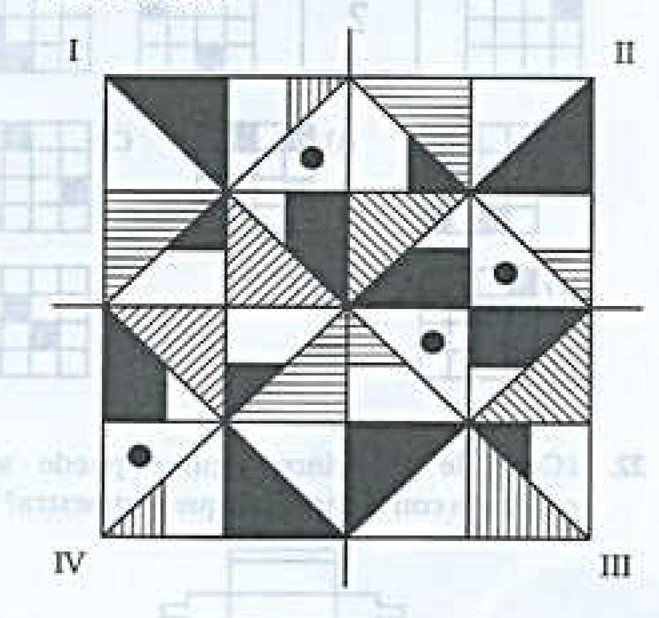
22. ¿Cuál de las cinco figuras puede ser realizada con la cartulina que se muestra?



23. Una hoja de papel es doblada dos veces tal como se muestra en la figura, y sufre dos perforaciones. ¿Cómo quedaría dicha hoja de papel al ser desdoblada? Indique la alternativa.

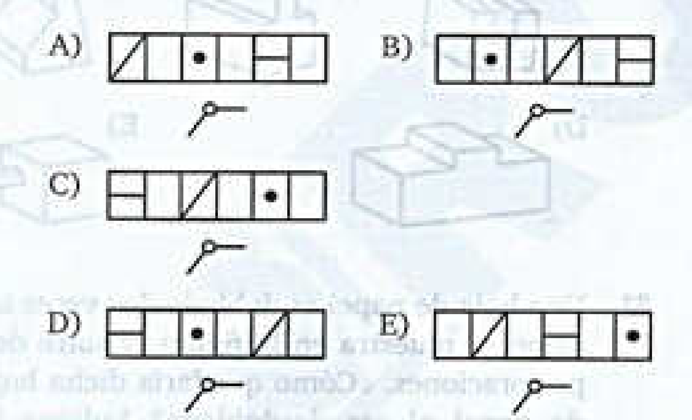


24. Indique cuál de los cuatro campos que se presentan en la siguiente figura difiere de los otros tres:



A) I B) II C) III
D) Ningún campo es diferente E) IV

25. Indicar la alternativa que contiene una figura que no es coherente con las demás.



26. Indicar la alternativa que completa la siguiente serie numérica:

10, 12, 16, 22, 30, 36, 40, ...

A) 40 B) 49 C) 44
D) 42 E) 46

27. Indique la alternativa que continúa la siguiente serie:

13, 19, 27, 37, 49, 63, ...

A) 93 B) 78 C) 65
D) 81 E) 79

28. Complete la serie siguiente:

abc, efg, jkl, ñop, ...

A) uwx B) wxy C) wvu
D) tuv E) uvw

29. Indicar la alternativa que continúa la serie.

4, 7, 13, 25, 49, 97

A) 136 B) 193 C) 214
D) 307 E) 929

30. En la serie:

8, 23, 46, 77, ?

La incógnita es:

A) 116 B) 100 C) 119
D) 123 E) 121

31. Completar la sucesión mostrada, con el número más adecuado.

80, 80, 40, 120, 30, ?

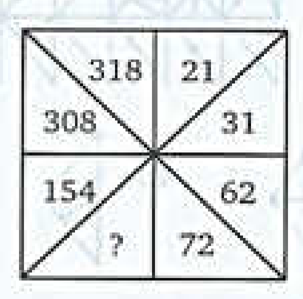
A) 200 B) 150 C) 160
D) 90 E) 240

32. Indicar, entre las alternativas mostradas, la que continúa más adecuadamente la siguiente serie numérica:

$2\sqrt{2}$, 4, 8, 32, ?

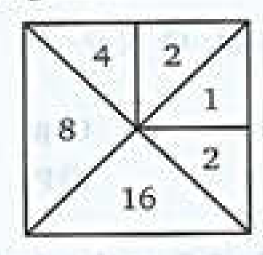
A) 64 B) 128 C) 256
D) 512 E) 1024

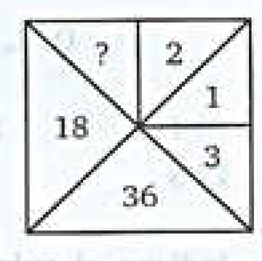
33. Hallar el número que mejor completa la figura mostrada:



A) 66 B) 124 C) 98
D) 142 E) 144

34. Tomando como referencia el primer juego de series, hallar el número faltante en el segundo.





A) 9 B) 6 C) 4
D) 8 E) 12

35. Señalar la alternativa que completa coherentemente la siguiente progresión:

1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	P
1	5	14	30	Q	91	140

A) P = 28 ; Q = 55 B) P = 28 ; Q = 50
C) P = 32 ; Q = 54
D) P = 28 ; Q = 61 E) P = 32 ; Q = 55

36. Señale el número que completa la serie:

9, 8, 6, 7, –6, –22

A) 0 B) 2 C) –2
D) 4 E) –4

37. Halle el número que sigue en la serie:

161, 133, 115, 107, 81, 65, 59, 35, 21, ?

A) 12 B) 17 C) 13
D) 16 E) 9

38. En la serie dada, halle el número que sigue:

–3, 2, 9, 6, 1, 10, 21, 14, ?

A) 11 B) 5 C) 36
D) 9 E) 7

39. Indicar la alternativa que completa correctamente la siguiente serie numérica:

5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, ?

A) 386 B) 464 C) 513
D) 928 E) 10965

40. Complete la tabla siguiente:

916	458	17
524	262	10
392	296	

A) 15 B) 16 C) 12
D) 13 E) 14

41. Señale la alternativa que completa coherentemente la siguiente serie numérica:

2, 8, 31, 128, 512, ?

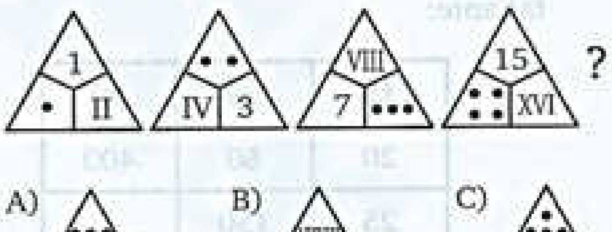
A) 624 B) 706 C) 1024
D) 1536 E) 2048

42. Halle el número siguiente de la serie:

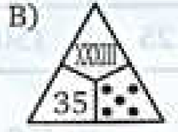
1, 100, 112, 889, 223, 778, ?

A) 9 B) 422 C) 669
D) 334 E) 998

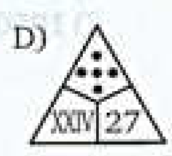
43. Indicar la alternativa que continúa la siguiente serie:

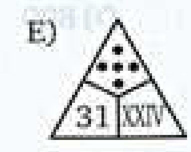


A)

B)


C)

D)


E)


44. Indicar la alternativa que continúa la siguiente serie numérica:

1, 3, 6, 11, 20, 37, 70, ?

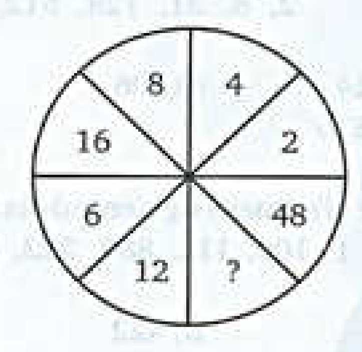
A) 91 B) 101 C) 124
D) 135 E) 540

45. De la serie dada en el cuadro, hallar el número faltante:

1	2	4	7
7	8	12	21
21	22	30	57
57	58	74	?

A) 102 B) 132 C) 144
D) 121 E) 155

46. Indique el número faltante:



A) 36 B) 24 C) 14
D) 18 E) 40

47. Del siguiente cuadro, determine el número faltante:

15	30	90
20	80	400
25	150	?

A) 600 B) 450 C) 250
D) 800 E) 1050

48. Indique la alternativa que continua la siguiente serie literal:

D, L, N, M, O, V, ?

A) T B) J C) R
D) S E) P

49. Indique el valor de "x" en la siguiente analogía:

6 10 11 21 22 30 9 28
[2] [3] [4] [x]
20 12 52 33 56 42 7 4

A) 1 B) 5 C) 6
D) 7 E) 3

50. Hallar el valor de "x – 2y", del siguiente arreglo numérico.

0	3	–2	4	x	–4
–1	2	7	2	2	6
2	6	–3	8	3	y
1	5	6	6	4	–2

A) 12 B) 25 C) 24
D) 40 E) 30

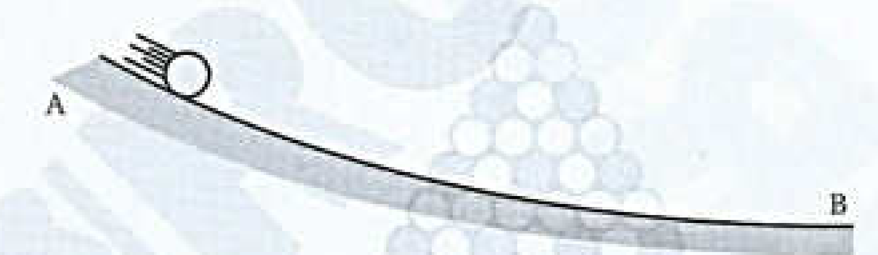
Máximos y Mínimos

CAPACIDADES

- Aplicar los conceptos de promedios; funciones de variable real y distancia entre 2 puntos.
- Relacionarnos con el tipo de análisis que se realizan en las matemáticas superiores.
- Desarrollar nuevas estrategias a partir de los conocimientos fundamentales del álgebra, aritmética y geometría.
- Relacionar los esquemas matemáticos propios del tema sea situaciones del que hacer cotidiano.

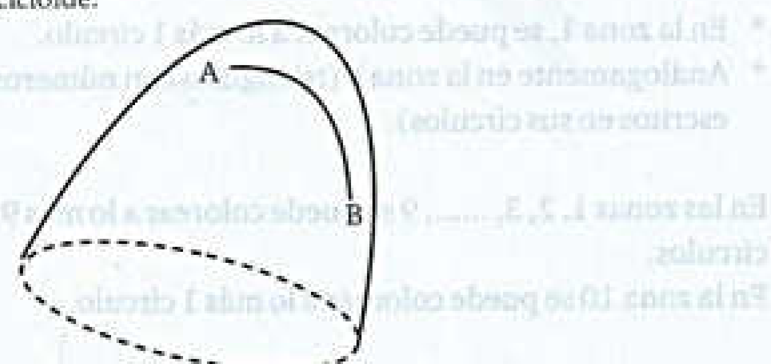
Una necesidad importante para cualquier persona en el desarrollo de sus actividades es la optimización de sus actividades, es decir, que con el mínimo esfuerzo alcancemos máxima eficiencia, por ejemplo, un ingeniero busca en sus diseños utilizar la menor cantidad de elementos sin que la seguridad del proyecto se vea afectada.

Estos tipos de problemas han sido una necesidad desde la antigüedad, por ejemplo en 1696 Johanis Bernoulli publicó una carta en la que propuso el problema sobre la línea de deslizamiento más rápida o braquistócranas. En este problema se pide determinar la curva que une dos puntos dados A y B que posee la propiedad de que una esfera se deslice desde el punto A hasta el B en el menor tiempo posible.



Una de las primeras respuestas, nos diría que la recta, pero a pesar que la recta sea la curva de menor longitud que une los puntos A y B, no es la curva que cumple la condición del problema.

La solución del problema de la braquistócrona fue dado por I. Bernoulli, J. Bernoulli, G. Leibnitz, I. Newton y G. L'Hospital, la línea de deslizamiento resultó ser la cicloide.



A nivel superior es costumbre comenzar el estudio de problemas de optimización, junto con el estudio de derivadas, sin embargo, es posible tratar problemas de máximos y mínimos con métodos simples, apoyándonos en criterios y teoremas de desigualdades.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

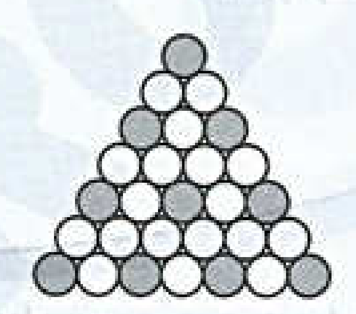
DEFINICIÓN

Sea "x" un conjunto, $x \subseteq \mathbb{N}$. Se dice que "p" es el máximo de "x" (Máximo elemento de x). Si satisface 2 condiciones:

1) $p \in x$, (ejemplo)
2) $\underbrace{p \geq a, \forall\, a \in x \text{ (acotación)}}_{\text{"p" es cota superior}}$

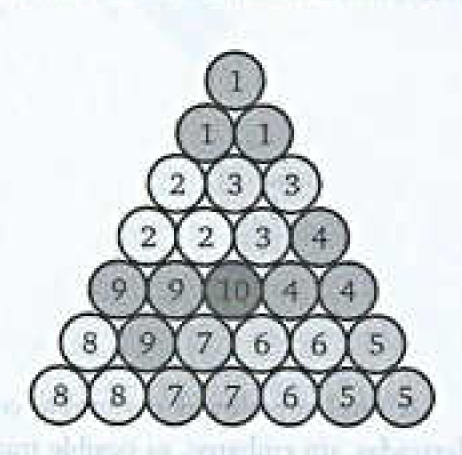
* ¿Cuántos círculos que no sean tangentes entre sí como máximo se pueden pintar en la siguiente figura?

1) ejemplo: $n = 10$



2) Demostrar ¿porque $n = 10$ es el máximo?
Acotación:

* En la zona 1, se puede colorear a lo más 1 círculo.
* Análogamente en la zona k (triángulos con números "k" escritos en sus círculos).



En las zonas 1, 2, 3, ..., 9 se puede colorear a lo más 9 círculos.
En la zona 10 se puede colorear a lo más 1 círculo.

$\therefore$ A lo más se colorean 10 círculos.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Si: $a + b = 10$

   Calcular el máximo valor de $a \times b$.

   Rpta.: ....

2. Si: $x + y = 24$

   Calcule el máximo valor de xy

   Rpta.: ....

3. Calcule el mínimo valor de:

   $$f(x) = (x + 2)^2 + 3$$

   Rpta.: ....

4. Calcule el máximo valor de:

   $$f(x) = 4 - (x - 1)^2$$

   Rpta.: ....

5. Si: $6 < x < 10$

   Calcule el máximo valor entero de:

   $$\frac{x-2}{2}$$

   Rpta.: ....

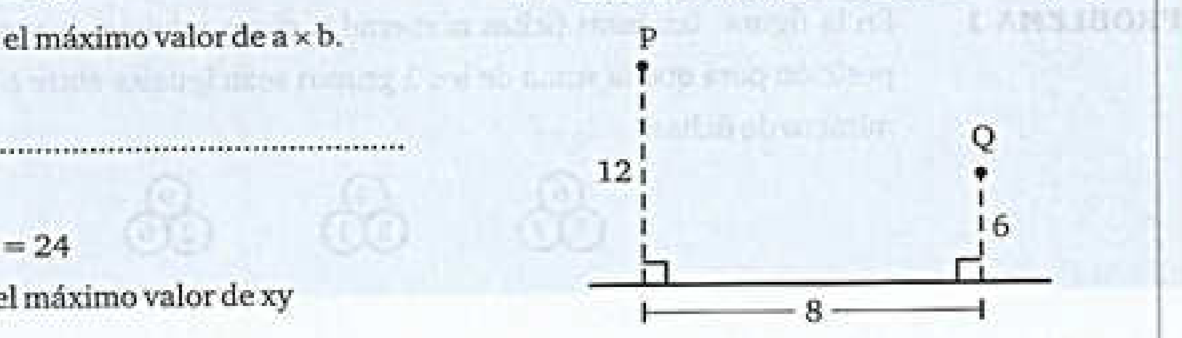
6. Si: $15 < x < 30$

   Calcule el máximo valor de:

   $$\frac{x-3}{6}$$

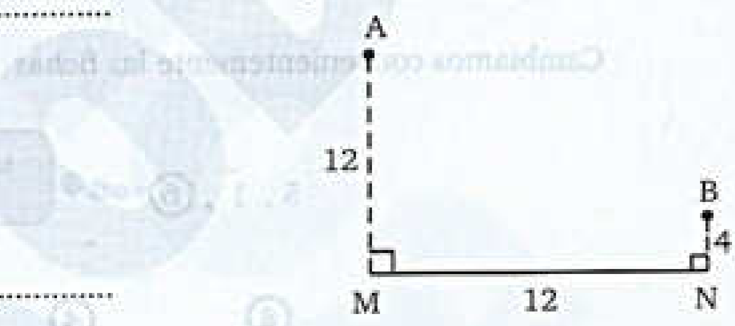
   Rpta.: ....

7. Calcule la menor distancia entre P y Q.



   Rpta.: ....

8. Calcule la longitud del menor recorrido para ir de A hacia B, tocando un punto de MN.



   Rpta.: ....

9. Calcule el mínimo valor de:

   $$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

   $a, b \in \mathbb{R}^+$

   Rpta.: ....

10. Calcule el mínimo valor de:

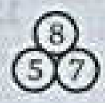
    $$A = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

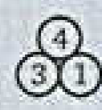
    $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

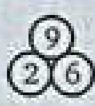
    Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 En la figura, ¿cuántas fichas numeradas como mínimo debemos cambiar de posición para que la suma de los 3 grupos sean iguales entre sí y tengan igual número de fichas?







Resolución: Sumamos todos los valores de las fichas:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=48$$

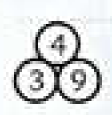
Como son tres grupos:

$$\frac{48}{3}=16 \quad \text{(cada grupo debe tener esta suma)}$$

La ficha (6) puede ser (9) si la giramos

Cambiamos convenientemente las fichas

5 , 1 , (6) — Lo utilizamos como (9)



$\therefore$ Debemos cambiar como mínimo 3 fichas

PROBLEMA 2 Cambie de posición algunas fichas de la expresión M manteniendo la misma posición de los triángulos, y determine el máximo valor entero de la nueva expresión M.

$$M=\left\{\left[\left[\triangle_5+\triangle_7\right]-\triangle_8\right]\times\triangle_6\right\}\div\triangle_4$$

Resolución: Cambiamos convenientemente las fichas para encontrar el máximo valor de M.

$$M=\left\{\left[\left[\triangle_5+\triangle_7\right]-\triangle_8\right]\times\triangle_6\right\}\div\triangle_4$$

$\therefore \quad M_{Máx.}=16$

PROBLEMA 3 Ronald tiene ingresos mensuales que varían de S/ 1460 a S/1600 y sus gastos mensuales varían de S/1280 a S/1360. Si el dinero que le queda lo reparte por igual entre sus 4 hijas. ¿Cuál es la diferencia entre la máxima y la mínima cantidad de dinero que puede recibir una de ellas algún mes?

Resolución: Lo máximo que recibe una hija sería: $\dfrac{1600-1280}{4}=80$

Lo mínimo que recibe una hija sería: $\dfrac{1460-1360}{4}=25$

La diferencia entre el máximo y mínimo que recibe una hija es:

$\therefore\ 80-25=S/55$

PROBLEMA 4 En una mesa redonda se sientan 9 personas, cada una tiene en su mano una carta con alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Todas las personas tienen números distintos en sus cartas. Luego, cada persona escribe en un papel la suma de su número con los números de sus dos vecinos; finalmente, se escoge M, el mayor de los 9 números escritos. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar M?

Resolución: Si se pidiera el menor valor, la respuesta sería 6, de la terna 1 + 3 + 2.
Si se pidiera el mayor valor, la respuesta sería 24, de la terna 7 + 9 + 8.
No se pide el menor ni el mayor valor; se pide el menor valor de las sumas máximas obtenidos por terna. Debemos agrupar las ternas para obtener valores mínimos, combinando dígitos de mayor valor (9) con los de menor valor(1 y 2)
Veamos las posibilidades:

		Mayor valor
9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1	→	9 + 8 + 7 = 24
		⋮
9, 7, 6, 8, 5, 4, 3, 2, 1	→	9 + 7 + 6 = 22
		⋮
9, 1, 2, 8, 4, 3, 7, 5, 6	→	7 + 5 + 6 = 18
		⋮

Es decir se podrán obtener las sumas máximas:

$$M = \{24; 23; 22; 21; 20; 19; 18; 17; \boxed{16}\}$$

Menor valor de las sumas máximas

Una posible configuración sería:

$$9-4-3-7-5-2-8-6-1$$

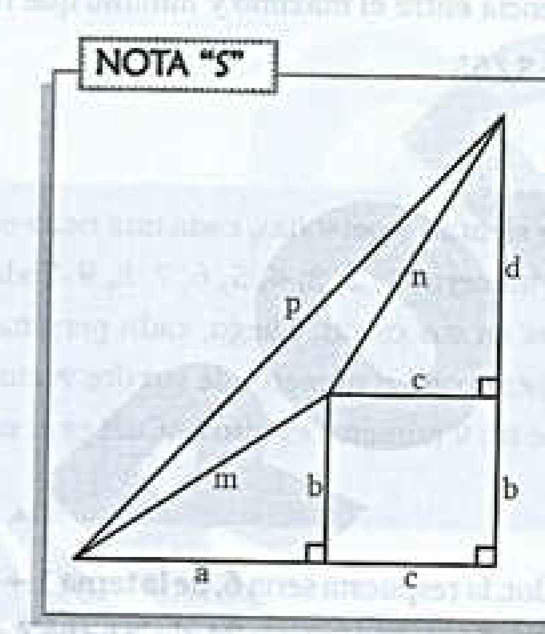
$\therefore$ 16 es el menor valor que puede tomar M de los nueve escritos

PROBLEMA 5 Hallar el mínimo valor de:

$$f(x) = \sqrt{x^2+64} + \sqrt{(x-10)^2+4}$$

Resolución:

NOTA "S"

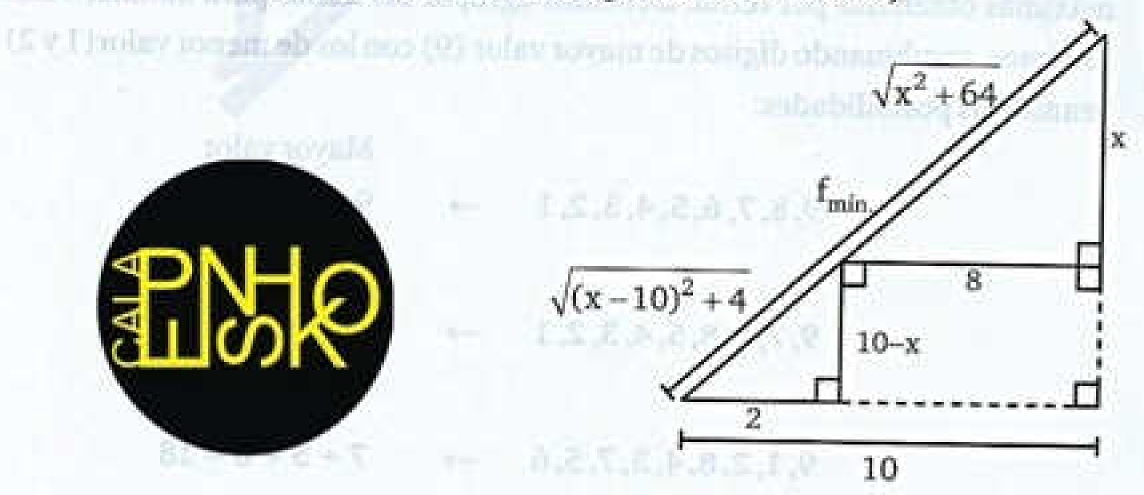


Por Desigualdad Triangular: $m + n \geq p$

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

En el problema:

(Caso Particular de la Desigualdad de Minkonski).



$\therefore \quad f_{min.} = 10\sqrt{2}$

II. PROMEDIOS

PROMEDIO O MEDIA ARITMÉTICA: (MA)

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

PROMEDIO O MEDIA GEOMÉTRICA: (MG)

$$MG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n}$$

PROMEDIO O MEDIA ARMÓNICA: (MH)

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

PROPIEDAD

$$MA \geq MG \geq MH$$

Para valores reales positivos

PROBLEMA 6 En una reunión ninguna persona es menor de 22 años, si la edad promedio es 25 y hay 40 asistentes. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener uno de ellos?

Resolución: Se sabe que ninguno tiene menos de 22; (21, 20, ...) es decir que si podrían tener 22 o 23 o 24 ... etc.

Para que uno tenga la máxima edad nos conviene que las restantes tengan lo menos posible y así concentrar más valor a la mayor:

$$\frac{\overset{MÁX}{\boxed{?}} + \overset{MIN}{\boxed{22}} + \overset{MIN}{\boxed{22}} + \overset{MIN}{\boxed{22}} + ... + \overset{MÁX}{\boxed{22}}}{40} = \underset{\uparrow \text{ PROMEDIO}}{25}$$

$$\frac{?+39(22)}{40}=25$$

$$?=100-858$$

$$?=142$$

$\therefore$ Asumiendo que es un cado ideal la respuesta será 142

PROBLEMA 7 En la universidad se agrupan estudiantes y profesores en un total de 7 donde ninguno es mayor de 30 años ¿cuál es la menor edad de uno de ellos?

Resolución: Como ninguno es mayor de 30, cada uno puede tener 30 años o 29 o 28 ... etc.

Si queremos que uno de ellos tenga la mínima edad los demás deben tener la mayor edad posible:

$$\frac{\overset{\text{MIN}}{\textcircled{x}}+\overset{\text{MÁX}}{\textcircled{30}}+\overset{\text{MÁX}}{\textcircled{30}}+\dots+\overset{\text{MÁX}}{\textcircled{30}}}{7}=\overset{\substack{\text{PROMEDIO}\\ \downarrow}}{30}$$

$$x+6(30)=7(30)$$

$$x=210-180$$

$$\therefore\quad x=30$$

PROBLEMA 8 Hallar el menor valor de A si m y n son positivos:

$$A=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$$

Resolución: Hallando la MA y MG de $\frac{m}{n}$ y $\frac{n}{m}$ y relacionando por la propiedad MA ≥ MG.

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}}{2}\geq\sqrt{\frac{\cancel{m}}{\cancel{n}}\times\frac{\cancel{n}}{\cancel{m}}}$$

¡GENIAL!

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}}{2}\geq 1$$

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geq 2$$

$$\underbrace{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}}_{A}\geq 2$$

$\quad\hookrightarrow$ 2; 3; 4; 7,9

$\therefore$ El menor valor de A es 2

PROPIEDAD

La suma de cualquier número real positivo con su recíproco es mayor o igual que 2.

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

NOTA "S"

Esto se da si:

$a = b$

Si la suma de 2 recíprocos suman 2:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$$

es por que $a = b$

PROBLEMA 9 Hallar el menor valor de A

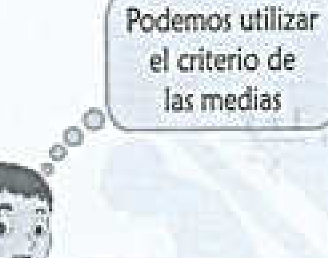
$$A = \frac{(x+2)^2 + (x+3)^2}{x^2 + 5x + 6} \; ; \; x \in \mathbb{R}^+$$

Resolución: Factorizando el denominador encontramos factores similares que en el numerador.

$$x^2 + 5x + 6 \Rightarrow (x+2)(x+3)$$

x 3

x 2



$$A = \frac{(x+2)^2 + (x+3)^2}{(x+2)(x+3)}$$

$$A = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x+3)} + \frac{(x+3)^2}{(x+2)(x+3)}$$

$$A = \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+2} \text{ (RECIPROCOS)}$$

$$\therefore \quad A \geq 2$$

PROBLEMA 10 Hallar el máximo valor de A

$$A = \frac{7x}{x^2 + 3x + 1} \; ; \; x \in \mathbb{R}^+$$

Resolución: En una expresión fraccionaria para hallar máx o min debe haber una constante ya sea en el numerador o en el denominador, caso contrario habrá que primero que nada transformando en dicha modelo.

Dividiendo por x en el numerador y denominador no se altera nada, pero logramos que el 7 quede como constante en el numerador.

$$A = \frac{\frac{7x}{x}}{\frac{x^2+3x+1}{x}} = \frac{7}{\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{7}{x+3+\frac{1}{x}}$$

No olvidemos que si queremos máximo valor en una fracción: $\frac{7}{\bigcirc}$ el denominador debe ser lo más pequeño posible; y como $x+\frac{1}{x} \geq 2$ (lo más pequeño es 2)

$$A = \frac{7}{2+3}$$

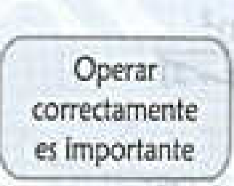
$\therefore$ Máximo valor de A es : $\frac{7}{5}$

PROBLEMA 11 Hallar el mínimo valor de k si: $y \neq -1$

$$K = \frac{y^3+y^2-13y-13}{-1-y} + y^2 + \frac{1-y^2}{y}$$

Resolución: Primero daremos forma a K:

$$K = \frac{y^2(y+1)-13(y+1)}{-(1+y)} + y^2 + \frac{1+y^4}{y^2}$$



$$K = -\left[y^2-13\right] + y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{y^4}{y^2}$$

$$K = -y^2 + 13 + y^2 + \frac{1}{y^2} + y^2$$

$$K = 13 + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) \rightarrow \text{Menor valor : 2}$$

$\therefore$ $K = 15$

PROBLEMA 12 Hallar el menor valor de A:

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{w} + \frac{w}{x} \quad ; \ (x, y, z, w \in \mathbb{R}^+)$$

Resolución: Aplicando MA ≥ MG

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{w}\cdot\frac{w}{x}}$$

$$\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}}_{A} \geq 4$$

$$A \geq 4$$

∴ El menor valor de A es 4

NOTA "S"

El criterio de la media se puede usar con más de dos términos.

III. PRODUCTO MÁXIMO, CONOCIENDO LA SUMA

Se tiene:

$$\boxed{x + y = k} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Para hallar el máximo valor del producto xy; recordemos la identidad de LEGENDRE:

$$(x+y)^2 - \underbrace{(x-y)^2}_{\text{cero}} = \underbrace{4xy}_{\text{máx}}$$

$$x = y$$

$$\therefore \quad x = \frac{k}{2} \ ; \ y = \frac{k}{2} \quad ⇨ \text{ Producto máximo de } xy = \frac{k^2}{4}$$

De aquí en adelante diremos que si queremos el producto máximo ambos sumandos deben ser iguales.

PROBLEMA 13 Si:

$$2a + 3b = 24$$

Hallar el producto máximo de: a y b

Resolución:

$$\underbrace{2a}_{(12)} + \underbrace{3b}_{(12)} = 24$$

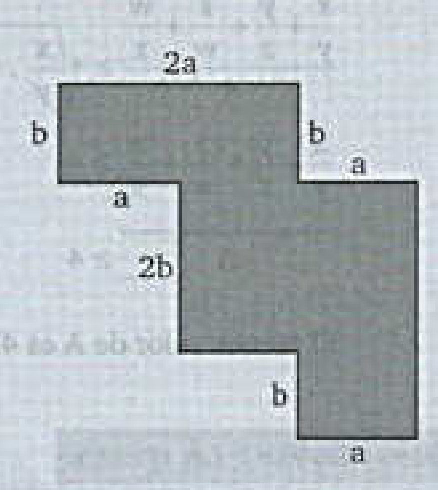
IGUALES

⇨ $2a = 12 \rightarrow a = 6$

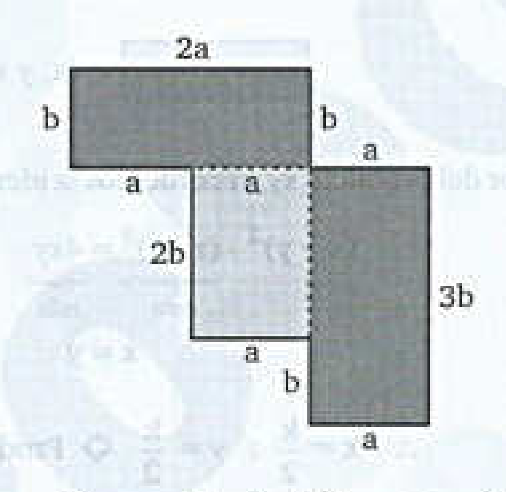
$3b = 12 \rightarrow b = 4$

∴ $a \times b = 6 \times 4 = 24$ (máx)

PROBLEMA 14 El jardín tiene perímetro 120 m hallar su área máxima.



Resolución:



Genial, podemos utilizar el criterio del producto máximo

$$S_{TOTAL} = b\times 2a + 2b\times a + a\times 3b$$

$$S_{TOTAL} = 7ab$$

Queremos hallar el máximo valor de 7ab. Pero sabemos el perímetro y en ella se encuentran a y b como sumandos.

$$\underbrace{8b}_{\text{Líneas Verticales} \; (60)} + \underbrace{6a}_{\text{Líneas Horizontales} \; (60)} = 120$$

IGUALES

$$\Rightarrow \; 8b = 60 \qquad 6a = 60$$

$$b = \frac{15}{2} \qquad a = 10$$

Reemplazando en el área:

$$S = 7ab = 7\times 10\times \frac{15}{2}$$

$$\therefore \; S = 525 \text{ m}$$

PROBLEMA 15 Hallar el máximo valor de: $P \times Q$

$$P = 12 + x^3$$
$$Q = 8 - x^3$$

Resolución: Para hallar el máximo valor del producto PQ necesitamos que ellos se encuentren como sumandos y deban ser iguales, entonces:

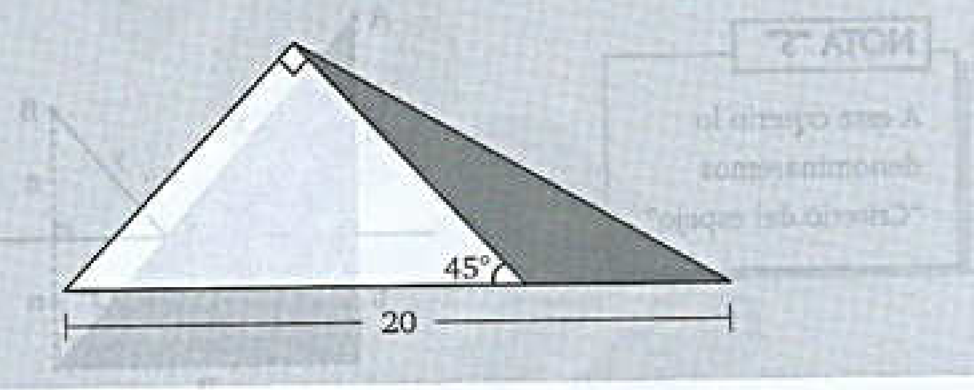
$$\begin{array}{r} P = 12 + \cancel{x^3} \\ Q = 8 - \cancel{x^3} \\ \hline P + Q = 20 \end{array} \; +$$

$$\underbrace{P}_{10} + \underbrace{Q}_{10} = 20$$

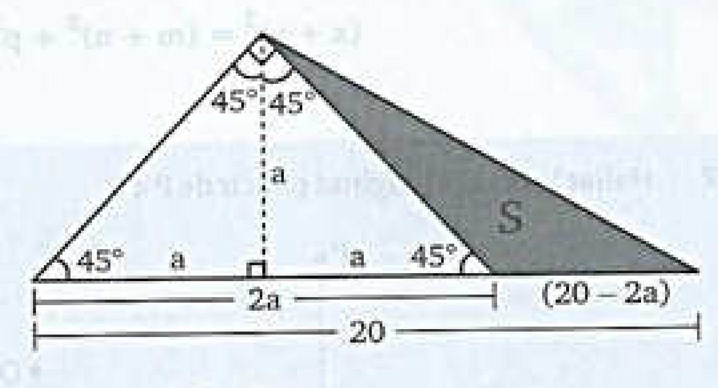
Para el máximo valor del producto:

$$\therefore \quad P \times Q = 10 \times 10 = 100$$

PROBLEMA 16 Hallar el área máxima de la región sombreada:



Resolución:



$$S = \frac{(\cancel{20}^{10} - \cancel{2}a)a}{\cancel{2}}$$

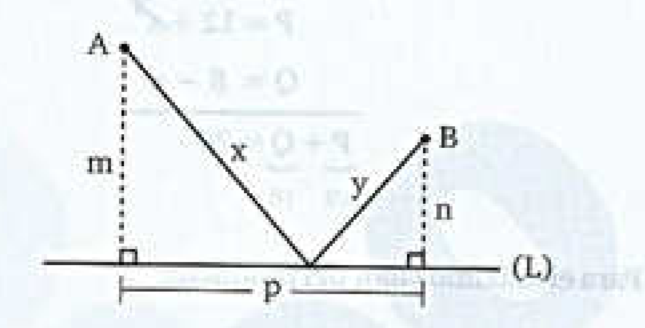
$$S = \underbrace{(10 - a) + a}_{10}$$

$$\therefore \quad S = 5 \times 5 = 25$$

IV. MENOR DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS

1er CASO:

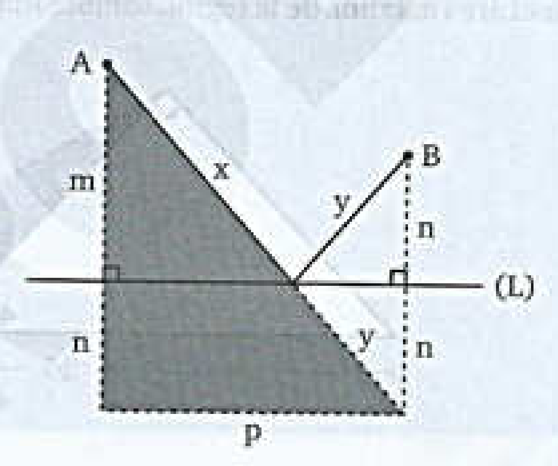
2do CASO: Tocando un punto dado:



Para hallar la menos longitud de x + y, en este caso se busca primero el simétrico de B respecto (L) y se aplica Teorema de Pitágoras:

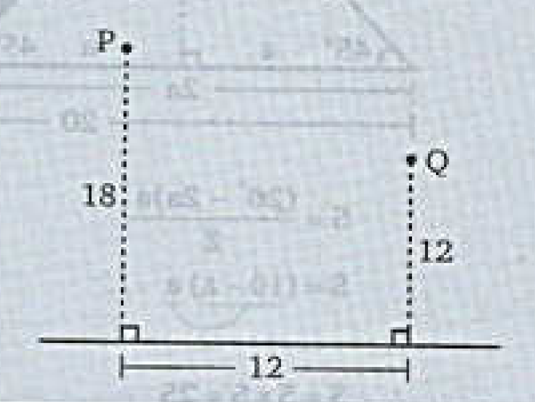
NOTA "S"

A este criterio lo denominaremos "Criterio del espejo"

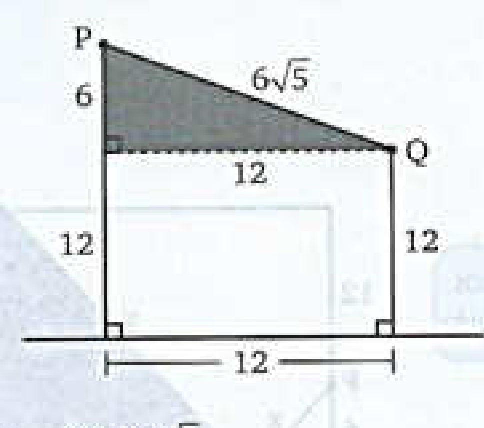


$$(x + y)^2 = (m + n)^2 + p^2$$

PROBLEMA 17 Hallar la menor longitud para ir de P a Q.



Resolución: De los datos:

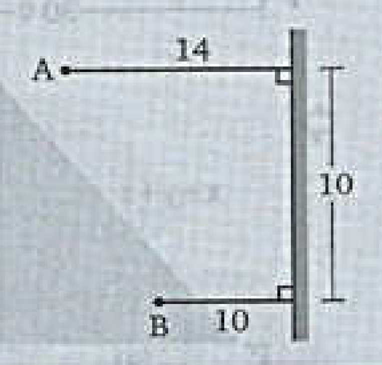


$\therefore$ $PQ = 6\sqrt{5}$

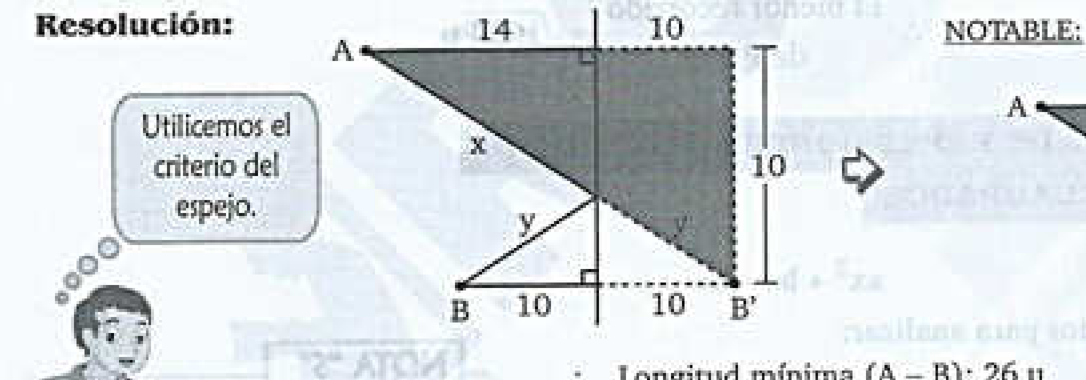
NOTA "S"

La menor longitud de un punto a otro es la línea recta.

PROBLEMA 18 Hallar la menor longitud para ir de A hacia B tocando la vertical.



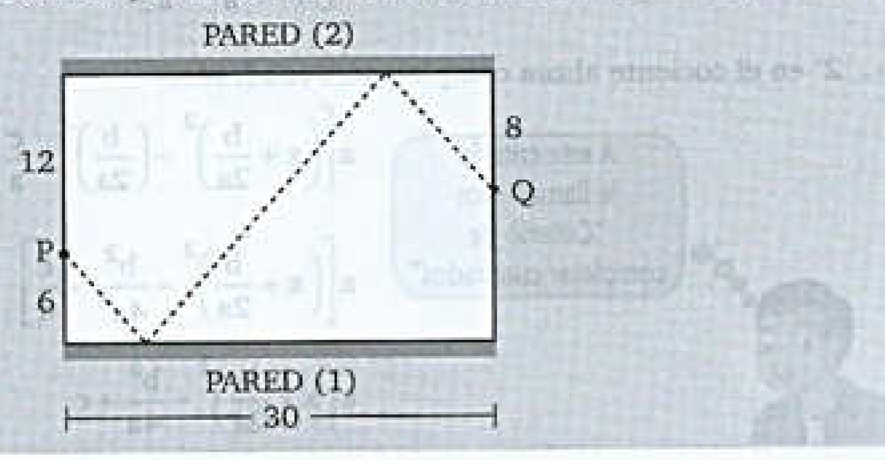
Resolución:



NOTABLE:

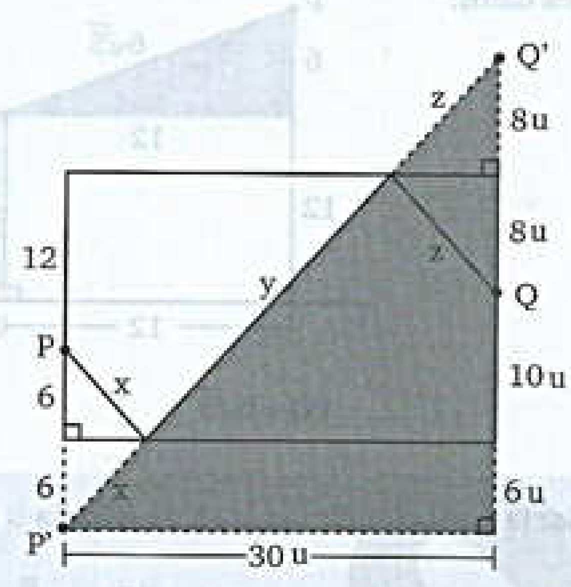
$\therefore$ Longitud mínima (A – B): 26 u

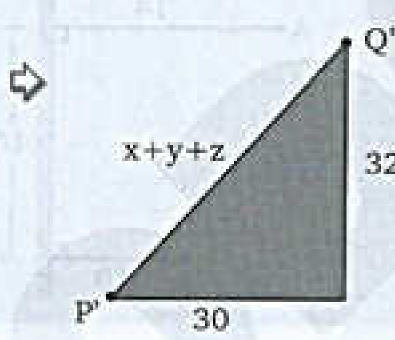
PROBLEMA 19 Hallar el menor recorrido para ir de P a Q. Tocando una sola vez ambas paredes.



Resolución:

Genial, utilizamos el criterio del espejo





$x + y + z = \sqrt{9000 + 1024}$

$x + y + z = \sqrt{1924}$

$\therefore$ El menor recorrido de P a Q $= \sqrt{1924}$ u

V. MÁXIMO Y MÍNIMO DE EXPRESIONES CUADRÁTICAS, "COMPLETANDO CUADRADOS"

$$ax^2 + bx + c$$

Completando cuadrados para analizar:

1° factorizamos a:

$$a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right]$$

2° en el cociente ahora completamos cuadrados:

A este criterio le llamaremos "Criterio de completar cuadrados"

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

NOTA "S"

$(x+a)^2 \rightarrow$ Binomio al cuadrado

$x^2 + 2xa + a^2 \rightarrow$ Trinomio cuadrado perfecto

$$\bullet \quad \underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{0} - \underbrace{\frac{b^2+4ac}{4a}}_{\substack{\text{MÁX o MÍN}\\ \text{según correspon}\\ \text{da la pregunta}}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{MÁX o MÍN} = \frac{4ac-b^2}{4a}} \qquad \boxed{\text{Valor de x para obtener el MÁX o MÍN}: \ x = \frac{-b}{2a}}$$

PROBLEMA 20 Hallar el máximo valor de A:

$$A = -x^2 + 2x + 3$$

Resolución:

$$A = -1x^2 + 2x + 3$$

$a \downarrow$, $b \downarrow$, $c \downarrow$

$$\therefore \quad \text{Máx. valor}: \frac{4(-1)(3)-(2)^2}{4(-1)} = 4$$

NOTA "S"

También:

$$A = -(\underbrace{x - 2x + 1}) + 4$$

$$A_{máx.} = -\underbrace{(x-1)^2}_{0} + 4 = 4$$

PROBLEMA 21 Hallar el mínimo valor de A:

$$A = x^2 - 8x + 1$$

Resolución: Aplicando la relación deducida:

$$A = 1x^2 - 8x + 1$$

$a \downarrow$, $b \downarrow$, $c \downarrow$

$$\therefore \quad \text{Mín. valor}: \frac{4(1)(1)-(-8)^2}{4(1)} = -15$$

NOTA "S"

También:

$$A_{mín.} = (x-4)^2 - 15$$

$$A_{mín.} = -15$$

PROBLEMA 22 Hallar el valor de x para que M tome su máximo valor:

$$M = -4x^2 + 16x - 2007$$

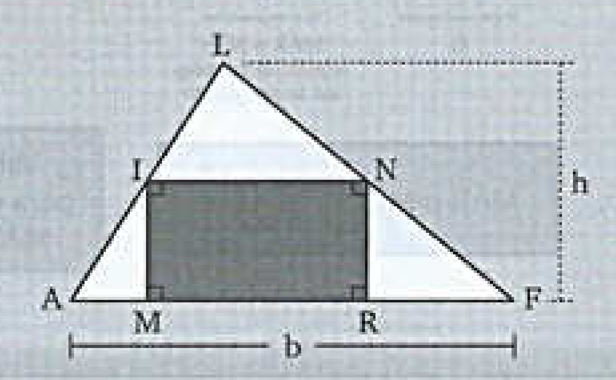
Resolución: Aplicando la relación deducida: $x = -\frac{b}{2a}$

$$M = -4x^2 + 16x - 2007$$

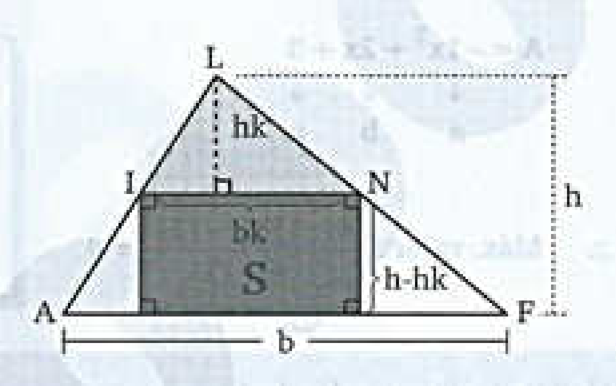
$a \downarrow$, $b \downarrow$

$$\therefore \quad x = \frac{-(16)}{2(-4)} = \frac{-16}{-8} = 2 \quad \left(\text{El valor que hace que M sea máximo}\right)$$

PROBLEMA 23 Hallar el área máxima de la región sombreada:



Resolución: Se observa que $\Delta ILN \approx \Delta ALF$:



Utilicemos el criterio del Producto Máximo

$$S_{máx} = (h - hk)bk$$

$$S_{máx} = h(1 - k)bk$$

$$S = hb(\underbrace{1 - k)k}_{1} = hb \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

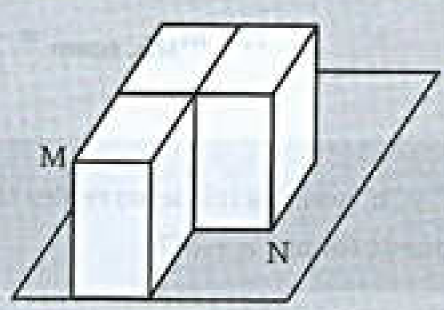
$$\therefore \quad S = \frac{bh}{4}$$

Deducir de $\frac{bh}{4}$: $\quad \frac{bh}{4} = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{bh}{2}\right]}_{[ALF]}$

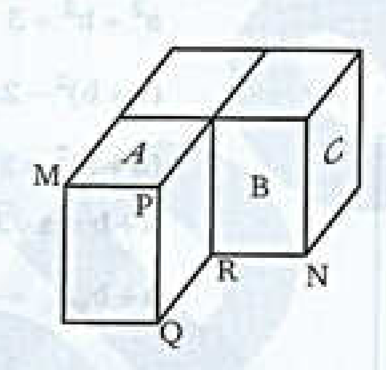
NOTA "S"

Podemos afirmar que el área máxima del rectángulo es la mitad del área del triángulo.

PROBLEMA 24 La figura muestra un sólido formado por tres paralelepípedos rectos rectangulares idénticos. Si en el vértice M se encuentra una hormiga y en el vértice N su comida. ¿Cuál es la longitud del camino más corto que debe recorrer la hormiga para llegar a N?

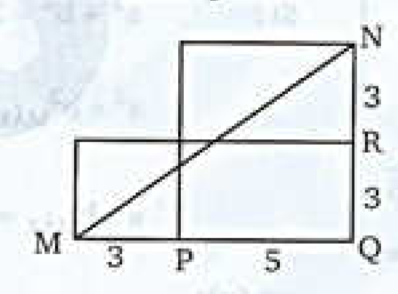


Resolución:



La longitud mínima entre dos puntos es la línea recta

Colocamos las caras A, B y C en un mismo plano.



$$MN^2 = 8^2 + 6^2$$

$$\therefore \ MN = 10$$

PROBLEMA 25 Halle el mayor valor entero de M que satisface:

$$7x2 + 28x + 3 > 7M \ ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Resolución:

$$7x^2 + 28x + 3 > 7M$$

$$7x^2 + 28x + 3 - 7M > 0$$

Como 7 es positivo y la expresión es mayor a 0 entonces la discriminante es menor a 0.

$$(28)^2 - 4(7)(3-7M) < 0$$

$$196M < -700$$

$$M < -3{,}57$$

$$\therefore \quad M_{\text{Máx. entero}} = -4$$

PROBLEMA 26 Si "a" y "b" son dos números reales tales que: $a^2 + b^2 = 3$, ¿cuál es el menor valor que puede tomar "a + b"?

Resolución:

$$a^2 + b^2 = 3$$

$$(a+b)^2 - 2ab = 3$$

$$(a+b)^2 = 3 + 2ab$$

$$a + b = \pm\sqrt{3 + 2ab}$$

$$a + b_{\text{MIN.}} = -\sqrt{3 + \underbrace{2ab}_{\text{MÁX}}} \quad \text{...... } (\alpha)$$

Si: $a^2 + b^2 = 3$

$$a^2 \times b^2{}_{\text{MÁX}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$a \times b_{\text{MÁX}} = \frac{3}{2}$$

en (α):

$$a + b_{\text{MÍN}} = -\sqrt{3 + 2 \times \frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad a + b_{\text{MÍN}} = -\sqrt{6}$$

NOTA "S"

El mínimo valor de $a+b$ se da en el caso que ambos sean iguales y negativos:

$$A^2 + B^2 = 3$$

$$A = -\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad B = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\therefore$ Mínimo valor : $A + B = -\sqrt{6}$

PROBLEMA 27 Si "p" es la razón de personas enfermas de cólera en una ciudad y si "q" es la razón de los que no están enfermos, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar la expresión "pq"?

Resolución: Total de personas: T

Personas enfermas: x

Personas no enfermas: T – x

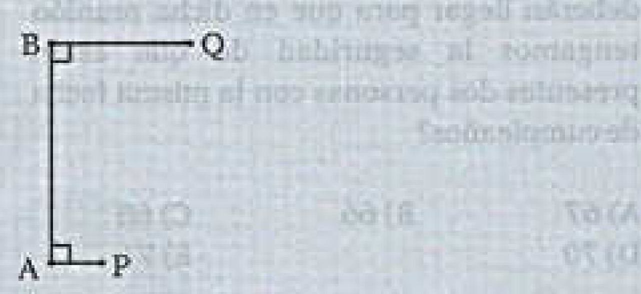
Por dato:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{x}{T} \\ q &= \frac{T-x}{T} \end{aligned}\right\}+$$

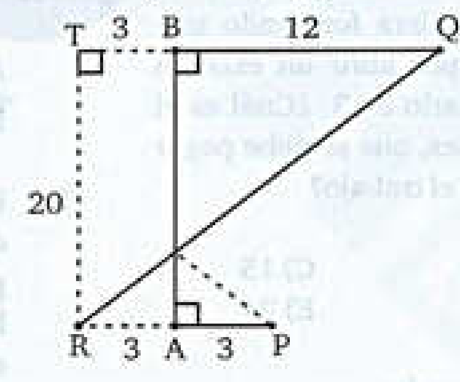
$$p + q = 1$$

$$\therefore \quad pq_{MAX} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

PROBLEMA 28 En la figura, AB = 20 Km, AP = 3 Km y BQ = 12 Km. Una persona ubicada en el punto P debe llegar a un punto de $\overline{AB}$ y luego dirigirse al punto Q. ¿Cuál es la longitud del mínimo recorrido?

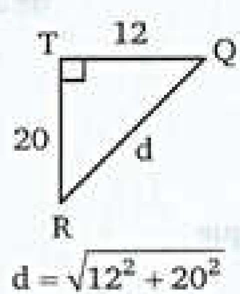


Resolución: Ubicamos el punto R simétrico del punto P, luego trazamos $\overline{QR}$.



Luego el mínimo recorrido será la longitud de QR

En el ◺ QTR



$$d = \sqrt{12^2 + 20^2}$$
$$d = 25$$

$\therefore$ Recorrido mínimo = 25 km

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se tiene 5 candados: A, B, C, D, E y 3 llaves x, y, z. Si se sabe que cada llave sólo abre un candado. ¿Cuál es el mínimo número de intentos en que puede determinarse con seguridad qué llave corresponde a qué candado?

A) 8 B) 9 C) 5
D) 7 E) 6

2. En la reunión de padres de familia del colegio Bertolt Brecht se encuentran 300 personas. ¿Cuántas personas como mínimo deberán llegar para que en dicha reunión tengamos la seguridad de que estén presentes dos personas con la misma fecha de cumpleaños?

A) 67 B) 66 C) 68
D) 70 E) 71

3. A un herrero le llevaron 5 pedazos de cadena de 3 eslabones cada una y le encargaron que los uniera formando una cadena continua. Si por abrir un eslabón cobra S/.2 y por cerrarlo S/.3. ¿Cuál es el mínimo precio, en soles, que se debe pagar al herrero por realizar el trabajo?

A) 12 B) 14 C) 15
D) 20 E) 24

4. Calcule el máximo valor de:

$$M = \frac{7x}{x^2 + 3x + 1} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

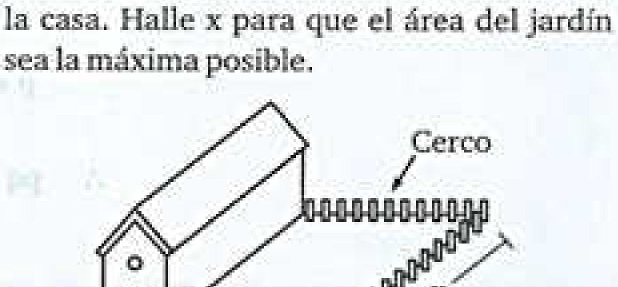
A) 9/4 B) 7/5 C) 10/3
D) 1 E) 1/2

5. Si ab = 75, calcule el mínimo valor que puede tomar:

$$E = 3a + 4b$$

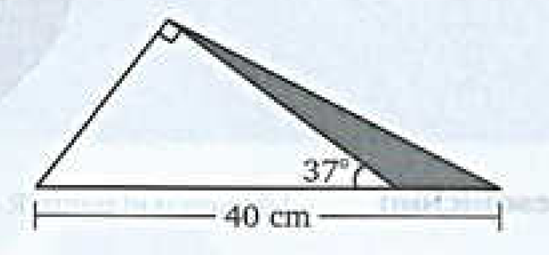
A) 60 B) 80 C) 120
D) 130 E) 110

6. Con 50 m de malla metálica se cerco el jardín rectangular ubicado a un costado de la casa. Halle x para que el área del jardín sea la máxima posible.



A) 10 m B) 20 m C) 25 m
D) 30 m E) 28 m

7. En la figura, calcule el área máxima de la región sombreada.



A) 85 cm^2 B) 8 cm^2 C) 90 cm^2
D) 92 cm^2 E) 96 cm^2

8. Un juego consiste en lanzar una pelota desde el lugar indicado y hacer que este golpee la pared "A" y luego la pared "B" hasta llegar a tumbar la lata. ¿Qué tiempo empleará como mínimo para lograrlo?, si la pelota debe salir con una rapidez constante de 3 m/s.

30m
16m
20m
18m

A) 10 s B) 20 s C) 30 s
D) 50 s E) 25 s

9. De una plancha de metal de 12 dm de ancho se dobla ambos costados una longitud "a" como muestra la figura con la finalidad de formar una canaleta por donde discurra el mayor caudal posible de agua. Halle el valor de "a" para lograr este propósito.

A) 3 dcm B) 2 dcm C) 1 dm
D) 2,5 dm E) 4 dm

10. Si, a, b y c ∈ ℝ, además: a + b + c = 12

Calcule el máximo valor de " $\frac{E}{8}$ " si:

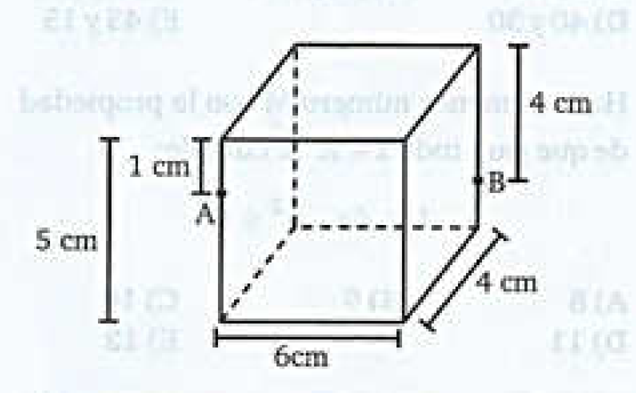
$$E=(10a-4b)(6b-4c)(6c-8a)$$

A) 64 B) 32 C) 16
D) 8 E) 4

11. Un explorador se encuentra acampando al pie de una montaña perfectamente cónica, cuya altura es $25\sqrt{60}$ cm y el radio de su base es 50 km. Si quiere rodear dicha montaña volviendo al punto de partida por el camino más corto, ¿qué longitud tiene dicho camino?

A) $200\sqrt{2}$ km B) 200 km C) 250 km
D) $100\sqrt{2}$ km E) 200π km

12. Una hormiga se encuentra en el punto A y su comida en el punto B. Si debe desplazarse por la superficie de la caja, ¿cuál será la longitud de su recorrido mínimo?



A) $3\sqrt{5}$ cm B) $5\sqrt{5}$ cm C) $5\sqrt{3}$ cm
D) $\sqrt{109}$ cm E) $\sqrt{91}$ cm

13. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la siguiente expresión?

$$\frac{25}{x^2-4x+9}$$

A) 2 B) 5 C) 8
D) 10 E) 14

14. Si x ∈ ℝ. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar M?

$$M=\frac{45x^4}{x^8+13x^4+1}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

15. Calcule el mínimo valor de:

$$N=2x^2-4ax+(3+a)$$

sabiendo que a es el valor que toma x para que el valor de M sea mínimo donde:

$$M=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x+1}$$

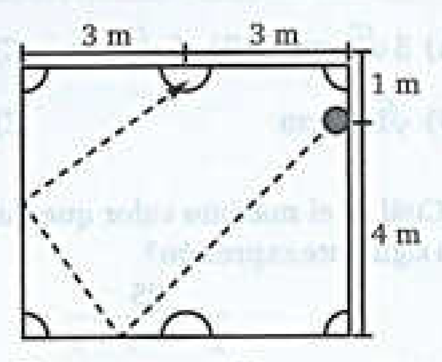
A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

16. En un trapecio un lado no paralelo mide 8 cm y la suma de las bases es el máximo valor que toma A. Calcule el máximo valor del área de la región trapecial, si:

$$A=\frac{5\times 2^{6+x}}{1+4^x+2^{x+3}}\ ;\quad \text{si } x\in\mathbb{R}$$

A) 128 B) 120 C) 135
D) 130 E) 110

17. El gráfico muestra una mesa de billar y una bola de billar que debe realizar el recorrido mostrado hasta llegar al agujero, ¿cuál es la menor longitud recorrida por dicha bola?



A) $6\sqrt{5}$ cm B) $9\sqrt{2}$ cm C) 13 cm
D) 11 cm E) 15 cm

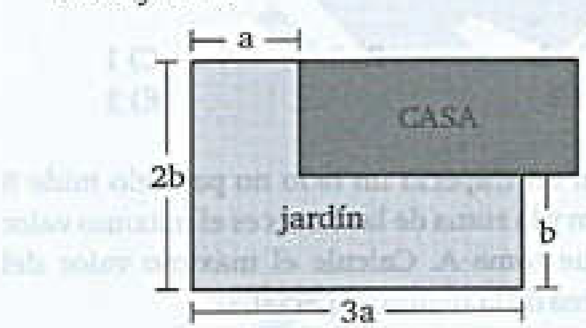
18. Se hizo un estudio sobre las ganancias que obtenía una empresa por la venta de un artículo y se determina que estas dependían del precio del producto, así:

$$\text{ganancias}=20000x-1250x^2+998000$$

(en soles)
Donde x es el precio del artículo en soles. ¿Cuál debe ser el precio del artículo para obtener la máxima ganancia?

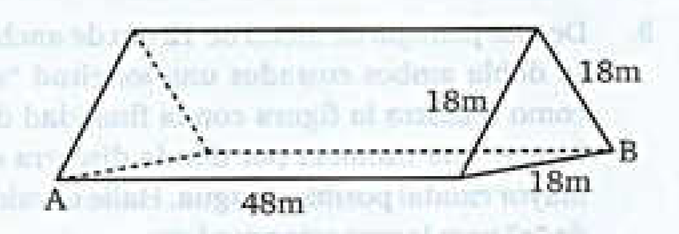
A) S/.8 B) S/.4 C) S/.6
D) S/.5 E) S/.7

19. Se quiere cercar el jardín mostrado en la figura utilizando para ello 54m de cerca. ¿Cuál es el área máxima que puede tener dicho jardín?



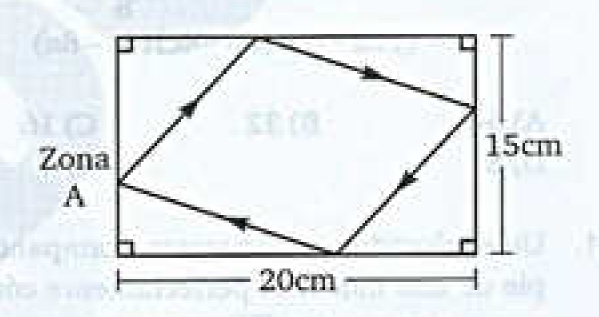
A) $245\ m^2$ B) $246\ m^2$ C) $247\ m^2$
D) $248\ m^2$ E) $243\ m^2$

20. Una hormiga ubicada en A detecta comida en B. Si lleva muchos días sin comer, ¿cuál es el menor tiempo que dedica hasta llegar a B? La hormiga recorre a una rapidez uniforme de 10mm por segundo, a través del prisma recto.



A) 140 min B) 130 min C) 100 min
D) 90 min E) 70 min

21. Un bolo de billar es golpeado en A, luego rebota y regresa a la zona A como muestra el gráfico. Si hace 4 recorrido completos los cuales son mínimo, luego del cual es detenido por una persona. ¿Cuánto fue dicho recorrido mínimo?
vista superior de la mesa de billar.



A) 2 m B) 3 m C) 120 cm
D) 150 cm E) 180 cm

22. Se compraron 120 kg de yeso en polvo a S/.0,16 cada kg y 60 kg a S/.0,24 cada kg. Se quiere venderlos sin mezclarlos y en paquetes de igual valor, debiendo ser éste un número entero de soles y tan grande como sea posible, siendo el beneficio igual a la cuarta parte del precio de compra. ¿Cuántos kilogramos pesarán los paquetes?

A) 5 y 15 B) 30 y 20 C) 25 y 15
D) 40 y 30 E) 45 y 15

23. Halle el menor número M con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$1+6x-x^2 \leq M$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

24. Si: $A = 6x^2 + 3x - 5$ y $B = 5 + 3x - 6x^2$, halle la suma de los valores máximos o mínimos que pueden tomar A y B.

A) $\frac{43}{4}$ B) 0 C) $-\frac{43}{4}$
D) $\frac{21}{2}$ E) $-\frac{21}{2}$

25. Si:

$$R = \frac{y^3 + y^2 - 13y - 13}{-1 - y}\ ;\ y \neq -1$$

Halle el máximo valor de R.

A) 16 B) 10 C) 13
D) 14 E) 15

26. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$; además $a + b + c = 2$, calcule el máximo valor de L:

$$L = (4a + b - c)(a + 3b + 2c)(-2a - b + 2c)$$

A) $\frac{2}{3}$ B) 8 C) $\frac{8}{3}$
D) $\frac{8}{9}$ E) 4

27. Calcule el mínimo valor de A

$$A = \sqrt{x^2 + w^2} + \sqrt{y^2 + z^2}$$

Sabiendo que:

$$x + y = 6\ ;\ z + w = 8$$

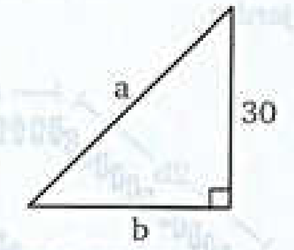
A) 12 B) 14 C) 10
D) 15 E) 24

28. Halle el área máxima de un terreno rectangular cuyo perímetro es de 60 m.

A) $309\ m^2$ B) $216\ m^2$ C) $325\ m^2$
D) $316\ m^2$ E) $225\ m^2$

29. En la figura, se muestra un triángulo rectángulo, halle el máximo valor de b, si a y $b \in \mathbb{Z}$.

A) 226
B) 230
C) 224
D) 228
E) 232



30. Una hormiga ubicada en M debe dar la vuelta al cono de radio 3 u y regresar al mismo punto M. ¿Cuál es el recorrido mínimo realizado por la hormiga?

A) 24u
B) $12\sqrt{2}$u
C) 12u
D) $6\sqrt{2}$ u
E) 8u

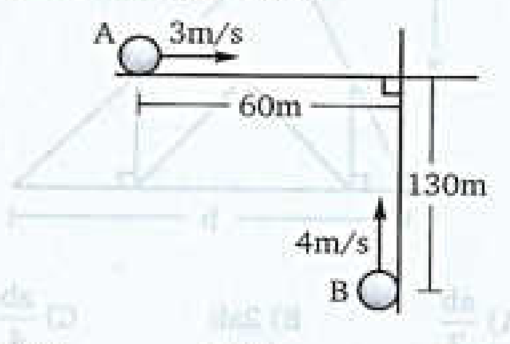
12
M
3

31. ¿Cuál es el máximo valor de M?

$$M = \frac{33}{4x^2 - 12x + 20}$$

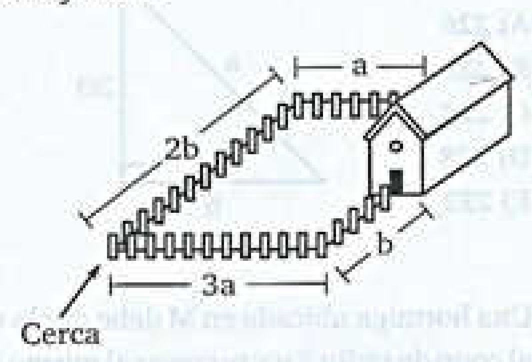
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

32. En el gráfico se muestran a los móviles A y B que se desplazan con rapidez constante de 3m/s y 4m/s respectivamente ¿Al cabo de que tiempo se encontrarán separados la menor distancia posible?



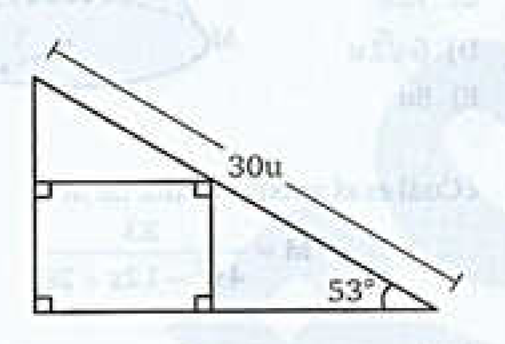
A) 30 s B) 25 s C) 28 s
D) 40 s E) 15 s

33. Se quiere cercar el jardín mostrado en la figura utilizando para ello 54 m de cerca. Calcule el área máxima que puede tener dicho jardín.



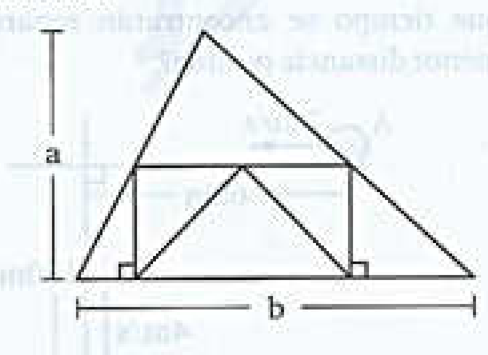
A) 245 m^2 B) 246 m^2 C) 247 m^2
D) 248 m^2 E) 243 m^2

34. En la figura calcule el área de la región sombreada para que esta sea máxima



A) 90 u^2 B) 98 u^2 C) 100 u^2
D) 108 u^2 E) 112 u^2

35. Halle el área máxima de la región sombreada.

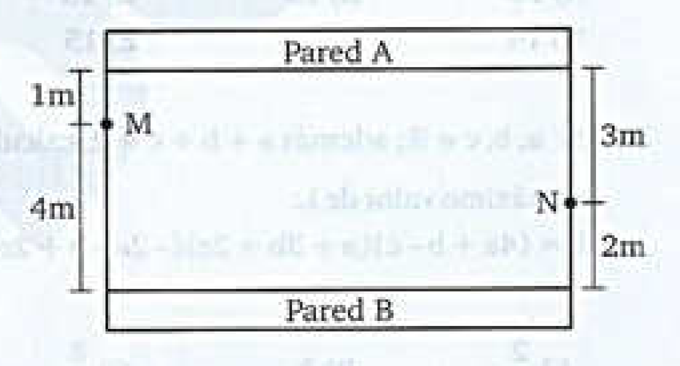


A) $\frac{ab}{2}$ B) 2ab C) $\frac{ab}{4}$
D) $\frac{ab}{8}$ E) $\sqrt{ab}$

36. Halle el radio de la base del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio R.

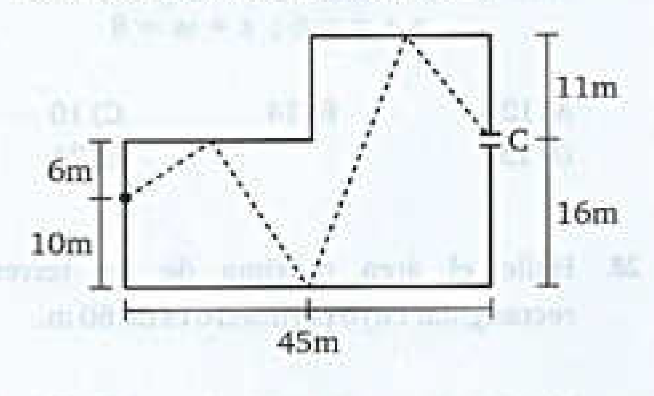
A) $\sqrt{2}\,R$ B) $\frac{R}{\sqrt{2}}$ C) $R\sqrt{3}$
D) $\frac{R}{\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{\frac{2}{3}}\,R$

37. En el gráfico se debe cumplir que una persona entre por la puerta m, tocar la pared A, luego tocar la pared B y finalmente salir por la puerta N. ¿Cuánto tiempo demorará como mínimo, en hacer esto, si su rapidez constante es de 1 m/s?



A) 8 s B) 7 s C) 10 s
D) 12 s E) 9 s

38. Una persona cuya rapidez constante es igual a 1m/s, debe realizar un recorrido como el indicado por las líneas punteadas para poder salir por C. ¿Cuál es el menor tiempo que emplea para lograrlo?



A) 56 s B) 65 s C) 85 s
D) 75 s E) 92 s

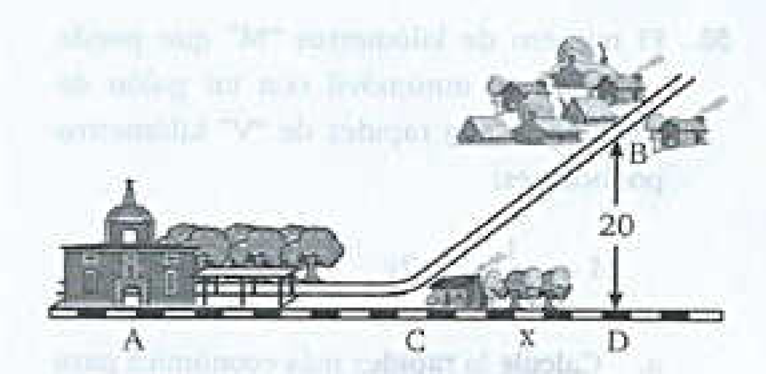
39. Si: x^y, y^z, $z^x \in \mathbb{R}^+$

$$S = \frac{x^y + y^z}{z^x} + \frac{y^z + z^x}{x^y} + \frac{z^x + x^y}{y^z}$$

Halle el mínimo valor de S.

A) 6 B) 2 C) 3
D) 4 E) 8

40. **A 20 km del ferrocarril, cuya línea es recta, se encuentra el punto poblado B. ¿Donde hay que construir el apeadero C para que en el viaje de A a B por la línea férrea AC, y por la carretera CB se invierta el menor tiempo posible? La velocidad por ferrocarril es de 0,8 y por carretera de 0,2 kilómetros por minuto.**

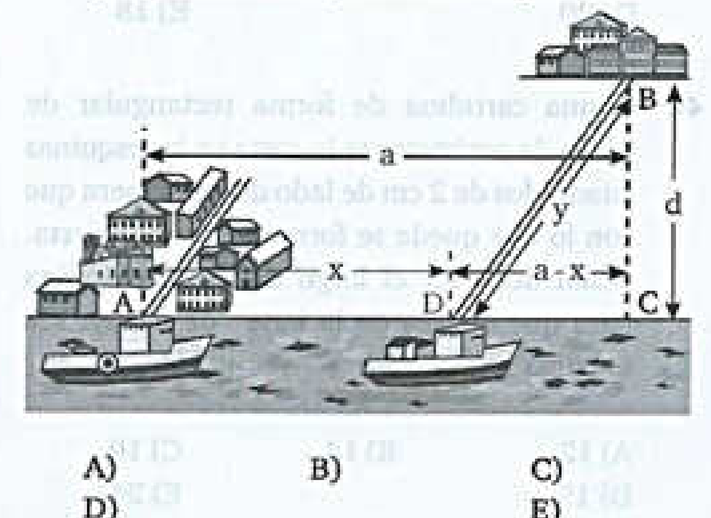


A) a 5 km de D B) a 3 km de D
C) a 5 km de A
D) a 5 km de B E) a 3 km de A

41. Dos líneas férreas se cruzan formando un ángulo recto. Los trenes se acercan a gran velocidad hacia el cruce. Uno parte de cierta estación situada a 40 km del cruce; el otro, de una estación que dista 50 km del cruce. El primero marcha a una velocidad de 800m por minuto, el segundo a 600 m. ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el momento de la partida para que las locomotoras se hallen a la menor distancia entre sí, y cuál será esa distancia?

A) 62' – 16 km B) 50' – 14 km
C) 64' – 20 km
D) 56' – 18 km E) 62' – 66 km

42. Desde la ciudad ribereña A hay que trasladar cargamento al punto B, situado a a km más abajo, y a d km de la orilla del río. ¿Como debe trazarse la carretera desde B al río para que el transporte de cargas desde A hasta b resulte lo más abarato posible, considerando que el transporte de una tonelada – kilómetro por río cuesta la mitad que por carretera; dar como respuesta x?

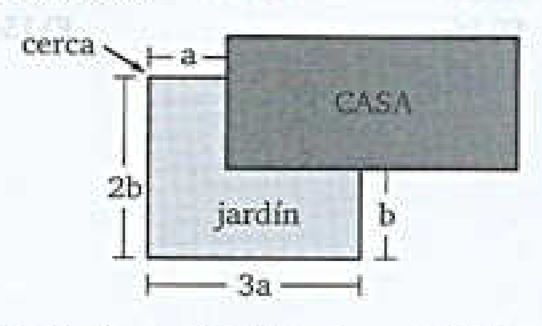


A) B) C)
D) E)

43. Búsquese la forma de una cometa con un sector circular que tenga la mayor superficie, partiendo de un perímetro previamente dado. Superficie: S; Perímetro: L

A) L^2 B) $\frac{L^2}{2}$ C) $\frac{L^2}{4}$
D) $\frac{L^2}{16}$ E) $\frac{L^2}{8}$

44. Se quiere cercar el jardín mostrado en la figura utilizando para ello 54 m de cerca. ¿Cuál es el área máxima que puede tener dicho jardín?



A) 245 m^2 B) 246 m^2 C) 247 m^2
D) 248 m^2 E) 243 m^2

45. ¿Cuál es el máximo valor que pueda alcanzar la expresión:

$$K=\frac{50}{5+(x-5)^2}$$

considerando que $x \in \mathbb{Z}^+$?

A) 10 B) 12 C) 15
D) 20 E) 18

46. A una cartulina de forma rectangular de 40cm de perímetro se le corta en las esquinas cuadrados de 2 cm de lado de tal manera que con lo que quede se forme una caja abierta. ¿Cuál debe ser el largo de dicha cartulina para que el área de la base de la caja sea máxima?

A) 12 B) 14 C) 10
D) 15 E) 24

47. Determine

$$28x+3>7M\ ;\ \forall x$$

A) –2 B) 4 C) –5
D) –4 E) 5

48. Determine el mínimo valor de M.

$$M=n+\frac{16}{n}+12\ ;\ \ n>0$$

A) 20 B) 16 C) 13
D) 16 E) 15

49. Un tramo de alambre con longitud 24 pulgadas se dobla en forma de un rectángulo, cuyo ancho sea **x** y su largo **y**.

Exprese el área del rectángulo en función de "x", demuestre que el área es máxima si la figura es un cuadrado y halle el máximo valor del área.

A) 36 $pies^2$
B) 49 $pies^2$
C) 64 $pies^2$
D) 100 $pies^2$
E) 81 $pies^2$

50. El número de kilómetros "M" que puede viajar cierto automóvil con un galón de gasolina, a una rapidez de "V" kilómetros por hora, es:

$$M=-\frac{1}{30}v^2+2v \quad \text{para} \quad 0<v<70$$

a. Calcule la rapidez más económica para un viaje.
b. Obtenga el valor máximo de M.

A) 30 km/h y 60 km
B) 30 km/h y 430 km
C) 36 km/h y 25 km
D) 37,7 km/h y 60 km
E) 36 km/h y 80 km

Capítulo 25: Lógica Predicativa

CAPACIDADES

- Conocer las proposiciones y como se relacionan entre sí.
- Conocer que son las inferencias lógicas.
- Aprender las reglas para deducir o sacar conclusiones.

Una paradoja, que tiene su origen, real o legendario, en la antigüedad se refiere al sofista Protágoras, que vivió y en el siglo V antes de J. C. Se dice que Protágoras hizo un arreglo con uno de sus alumnos según el cual éste habría de pagarle su educación después de que hubiera ganado su primer caso. El joven terminó sus estu-dios, puso la tradicional placa anunciando su profesión y esperó la llegada de los clientes.

Atenas
Cuna de la Lógica

No apareció ninguno. Protágoras se impacientó y decidió demandar a su antiguo alumno por la cantidad que le debía.

Razonaba Protágoras "o gano yo el proceso o lo ganas tú". Si lo gano yo, me tendrás que pagar en cumplimiento de la sentencia. Si lo ganas tú me tendrás que pagar para cumplir nuestro convenio. En ambos casos tendrás pues que pagarme".

"Ni mucho menos" replicó el joven. "Si gano yo, los tribunales no me obligan a pagarte. Si ganas tú, según nuestro convenio no tengo por qué pagarte. Por lo tanto en ningún caso tendré que pagarte".

¿Cuál de los dos razonamientos era el correcto?

LÓGICA PREDICATIVA

La lógica predicativa se encarga del estudio de las relaciones que hay entre el sujeto y el predicado dentro de una proposición.

PROPOSICIONES CATEGÓRICAS

Son aseveraciones que afirman o niegan que una clase (conjunto) esté incluida en otra, ya sea total o parcialmente. Las proposiciones categóricas típicas se caracterizan por tener: Cuantificador (Todos, Ningún, Algún), Sujeto, Verbo copulativo (Ser) y predicado.

Ejemplos:

- Todos los peces son acuáticos. $\Rightarrow$ Universal Afirmativa.
- Ningún peruano es ecuatoriano. $\Rightarrow$ Universal Negativa.
- Algunos libros son educativos. $\Rightarrow$ Particular Afirmativa.
- Algunas bebidas no son alcohólicas. $\Rightarrow$ Particular Negativa.

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES

Para negar una proposición categórica se debe cambiar tanto su cantidad (Universal en Particular y viceversa) como su calidad (Afirmativa en Negativa y viceversa).

Ejemplos:

p : Todos los animales son salvajes.
$\sim p$: Algunos animales no son salvajes.

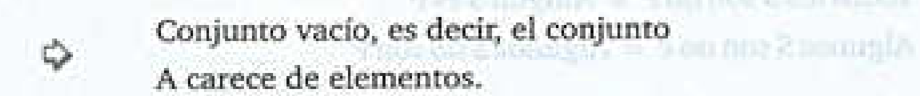
q : Ningún chofer es distraído.
$\sim q$: Algún chofer es distraído.

r : Algunos países son industrializados.
$\sim r$: Ningún país es industrializado.

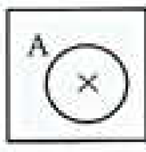
s : Algunos problemas no son interesantes.
$\sim s$: Todos los problemas son interesantes.

DIAGRAMA DE VEN – EULER

Para representar gráficamente las proposiciones categóricas nos serviremos de la siguiente notación:



Conjunto vacío, es decir, el conjunto A carece de elementos.

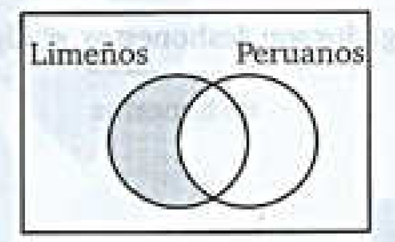


Conjunto no vacío, es decir, el conjunto A posee por lo menos un elemento.

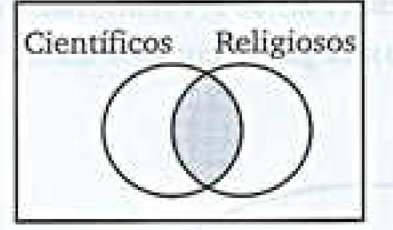
Conjunto indeterminado, es decir, no se puede precisar si el conjunto A posee o no elementos.

Ejemplos:

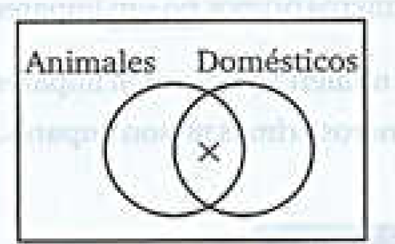
"Todos los limeños son peruanos".



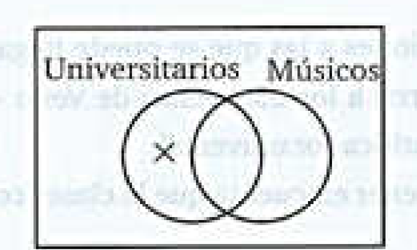
"Ningún científico es religioso".



"Algunos animales son domésticos".



"Algunos universitarios no son músicos".



PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Cuando el predicado está negado se presentan la siguientes equivalencias

- Ningún S es no P ≡ Todos los S son P
- Todos los S son no P ≡ Ningún S es P
- Algunos S son no P ≡ Algunos S no son P

Ejemplos:

- Ningún hombre es inmortal ≡ Todos los hombres son mortales.
  (inmortal = no mortal)

- Todos los poetas son irracionales ≡ Ningún poeta es racional.
  (irracionales = no racionales)

- Algunos abogados son deshonestos ≡ Algunos abogados no son honestos.
  (deshonestos = no honestos)

CASO ESPECIAL

En una proposición cuando el cuantificador es universal y la negación afecta al verbo copulativo, la negación actúa como si negara el cuantificador.

Ejemplos:

Todos los números primos no son impares.

≡ No todos los números primos son impares.

≡ Algunos números primos no son impares.

INFERENCIAS LÓGICAS

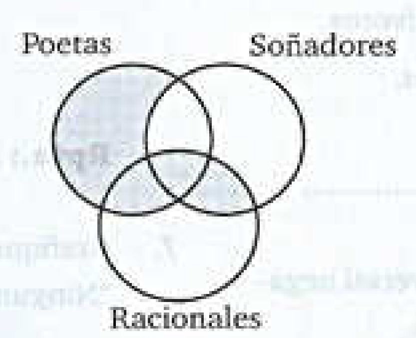
Son las deducciones a las que se puede llegar a partir de un conjunto de premisas. Para obtener estas se puede recurrir a los diagramas de Venn – Euler, debiendo graficar primero las premisas que contengan a un cuantificador universal.

También debe tener en cuenta que la clase (conjunto) que aparece en ambas premisas no participa en la conclusión.

Ejemplo:

- Si todos los poetas son soñadores, y
- Ningún soñador es racional.

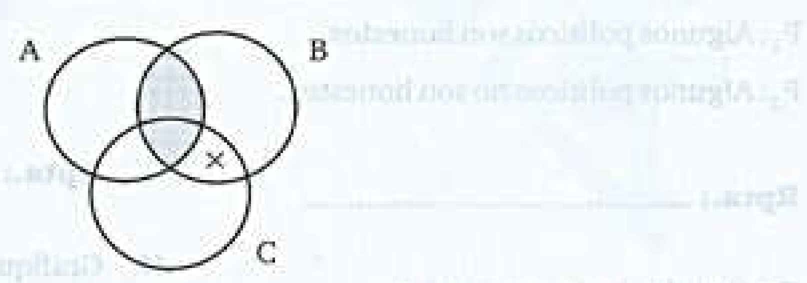
¿Qué se puede inferir?



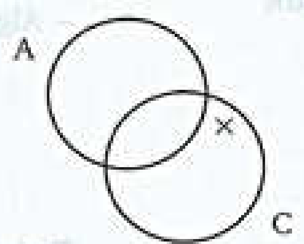
Como la clase (conjunto) de soñadores aparece en ambas premisas, no participará en la conclusión; es decir la conclusión se basará en las clases (conjuntos de poetas y racionales).
Ahora, entre poetas y racionales se observa lo siguiente.

Por lo tanto se concluye que:
"Ningún poeta es racional".

Ejemplo:
Si ningún A es B y algunos B son C, ¿qué se puede inferir?



B no participará en la conclusión, y entre A y C se observa.



Por lo tanto, se concluye que:
"Algunos C no son A"

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Indique cual premisa es universal afirmativa:
   P_1: Todos los leones son carnívoros.
   P_2: Algunas aves son ovíparas.

   Rpta.: ....

2. Indique cuál premisa es universal negativa.
   P_1: Todos los poetas son románticos.
   P_2: Ningún poeta es romántico.

   Rpta.: ....

3. Indique cuál premisa es particular afirmativa.
   P_1: Algunos hombres son soñadores.
   P_2: Algunos hombres no son soñadores.

   Rpta.: ....

4. Indique cuál premisa es particular negativa.
   P_1: Algunos políticos son honestos.
   P_2: Algunos políticos no son honestos.

   Rpta.: ....

5. Grafique la siguiente premisa:
   "Todos los abogados son deshonestos"

   Rpta.: ....

6. Grafique la siguiente premisa:
   "Algunos insectos son voladores".

   Rpta.: ....

7. Grafique la siguiente premisa:
   "Ninguna mujer es ociosa".

   Rpta.: ....

8. Grafique la siguiente premisa:
   "Algunos perros no tienen cola".

   Rpta.: ....

9. Grafique las siguientes premisas:
   – Todos los niños son curiosos.
   – Todos los curiosos son creativos.

   Rpta.: ....

10. Grafique las siguientes premisas:
    – Todos los políticos son mentirosos.
    – Algunos políticos son corruptos.

    Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 ¿Cuál es la negación lógica de la proposición:

"Todas estas preguntas son fáciles"?

Resolución: Recuerda que para la proposición categórica:

"Todos los P son Q"

La negación es:

"Algunos P no son Q"

Entonces, para:

"Todas estas preguntas son fáciles"

La negación es:

∴ "Algunas preguntas no son fáciles"

PROBLEMA 2 ¿Cuál es la negación lógica de la proposición:

"Ningún matemático es distraído"?

Resolución: Recuerda que para la proposición categórica:

"Ningún P es Q"

La negación es:

"Algunos P son Q"

Entonces, para:

"Ningún matemático es distraído"

La negación es:

"Algunos matemáticos son distraídos"

Pero en lugar de "Algunos" también podemos decir "Al menos uno", así que también podemos decir

∴ "Al menos un matemático es distraído"

PROBLEMA 3 ¿Cuál es la negación lógica de la proposición:

"Algunos científicos no son románticos"?

Resolución: La negación lógica de la proposición categórica:

"Algunos P no son Q", es:

"Todos los P son Q"

Entonces, para:

"Algunos científicos no son románticos".

La negación es:

∴ "Todos los científicos son románticos".

PROBLEMA 4 ¿Cuál es la proposición equivalente a:

"Ningún diplomático es descortés"?

Resolución: La proposición:

"Ningún P es no Q"

Donde se niega el predicado es equivalente a:

"Todos los P son Q"

Pudiendo expresarse también en singular:

"Ningún diplomático es descortés"
(descortés = no cortes)

Equivale a:

∴ "Todo diplomático es cortés"

PROBLEMA 5 ¿Cuál es la proposición equivalente a la proposición categórica:

"Todas las películas de ciencia ficción son irreales"?

Resolución: La proposición:

"Todos los P son no Q"

Es equivalente a:

"Ningún P es Q"

Entonces:

"Todas las películas de ciencia ficción son irreales"
(irreales = no reales)

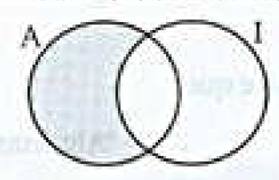
Equivale a:

∴ "Ninguna película de ciencia ficción es real".

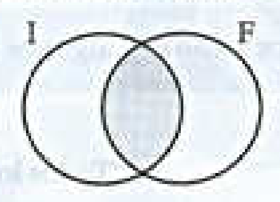
PROBLEMA 6 Si todos los aviadores son intrépidos, y ningún intrépido es fatalista, se deduce que:

Resolución: Aplicamos los diagramas de Venn en los cuales una región sombreada indica ausencia de elementos (vacío).

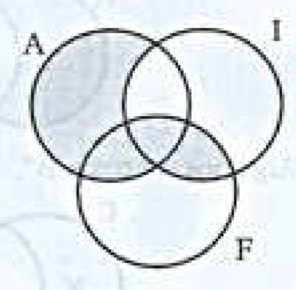
Todos los aviadores (A) son intrépidos (I)



Ningún intrépido (I) es fatalista (F).



Juntamos las proposiciones:



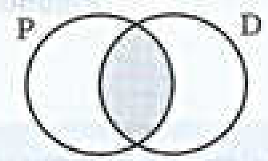
Se observa que: $A \cap F = \varnothing$, entonces:

$\therefore$ "Ningún aviador es fatalista".

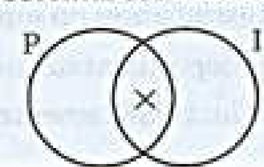
PROBLEMA 7 Si ningún problema es difícil, y algunos problemas son interesantes, podemos concluir que:

Resolución: Utilizando los diagramas de Venn:

"Ningún problema es difícil"

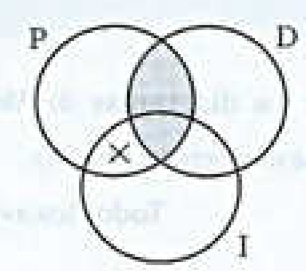


"Algunos problemas son interesantes".



Recuerda que la × representa al menos un elemento.

Juntando los diagramas:



Se concluye que:

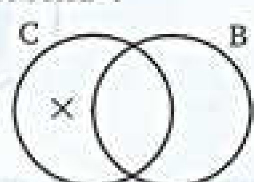
∴ "Algunas cosas interesantes (las x) no son difíciles".

PROBLEMA 8 Si todos los A son B, y algunos C no son B, se deduce validamente que:

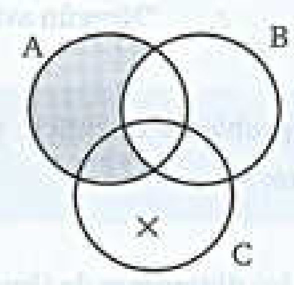
Resolución:

"Todos los A son B".

"Algunos C no son B".



Juntando los diagramas:



Se concluye que:

∴ "Algunos C (los ×) no son A".

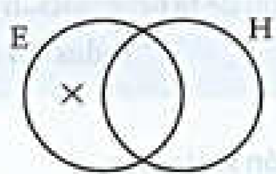
PROBLEMA 9 Dadas las siguientes premisas:

- Algunos estudiantes no son honestos.
- Todos los deportistas son honestos.

Se puede deducir validamente que:

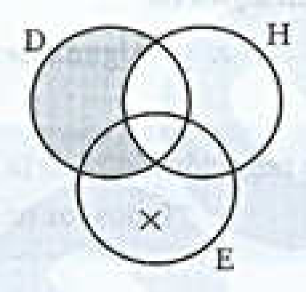
Resolución:

"Algunos estudiantes no son honestos".



"Todos los deportistas son honestos".

Juntando los diagramas:



Se concluye que:

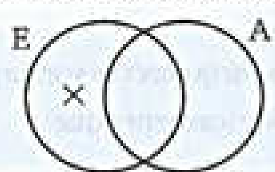
∴ "Algunos estudiantes (los ×) no son deportistas".

PROBLEMA 10 Si:
- Algunos estudiantes no usan anteojos.
- Todos los miopes usan anteojos.

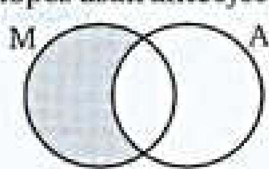
Entonces se puede inferir que:

Resolución:

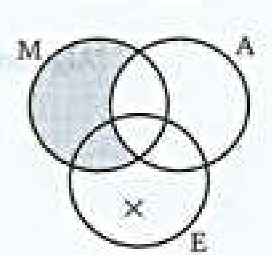
"Algunos estudiantes no usan anteojos".



"Todos los miopes usan anteojos".



Juntamos los dos diagramas:



Se concluye que:

∴ "Algunos estudiantes (los ×) no son deportistas".

PROBLEMA 11 La negación de la proposición categórica:

"Todas las señoritas miran a Armando", es:

Resolución: La negación lógica de:

"Todos los P son Q" es:

"Algunos P no son Q"

Entonces, para:

"Todas las señoritas miran a Armando"

La negación lógica es:

∴ "Algunas señoritas no miran a Armando"

PROBLEMA 12 ¿Cuál es la negación lógica de la proposición:

"Todos los números de Fermat son primos"?

Resolución: La negación lógica de la proposición categórica:

"Todos los P son Q" es:

"Algunos P no son Q"

Entonces, para:

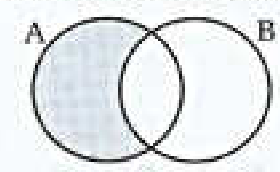
"Todos los números de Fermat son primos"

La negación es:

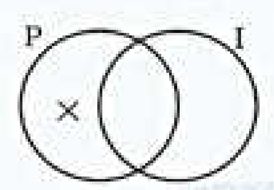
∴ "Algunos números de Fermat no son primos"

PROBLEMA 13 Si todos los arquitectos son ingeniosos, y algunos preocupados no son ingeniosos, se infiere lógicamente que:

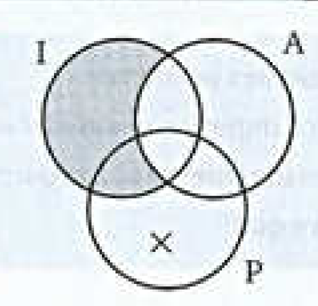
Resolución: "Todos los arquitectos (A) son ingeniosos (I)".



"Algunos preocupados (P) no son ingeniosos (I)".



Juntamos los dos diagramas:



Se infiere que:

∴ "Algunos preocupados no son arquitectos".

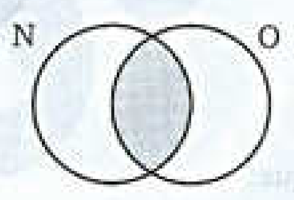
PROBLEMA 14 Si se sabe que:

- Ningún niño es obediente, y
- Algunos niños son precoces.

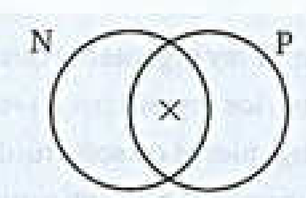
¿Qué se puede deducir?

Resolución:

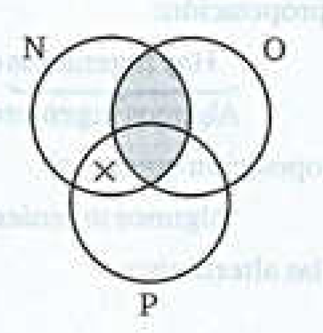
"Ningún niño (N) es obediente (O)".



"Algunos niños (N) son precoces (P)".



Juntamos los dos diagramas:



Se deduce que:

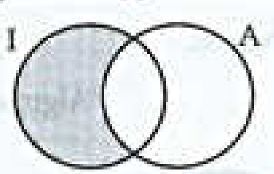
∴ "Algunos precoces no son obedientes".

PROBLEMA 15 De las siguientes premisas:

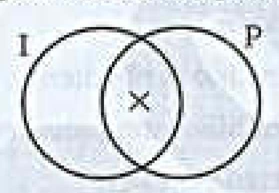
- Todos los ingenieros son audaces.
- Algunos ingenieros son provincianos.

Se concluye que:

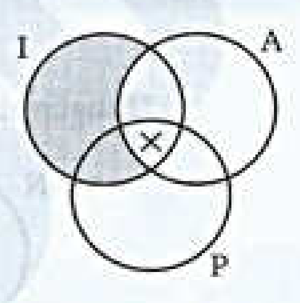
Resolución: "Todos los ingenieros (I) son audaces (A)".



"Algunos ingenieros (I) son provincianos (P)".



Juntamos los dos diagramas:



Se concluye que:

$\therefore$ "Algunos provincianos son audaces".

PROBLEMA 16 La proposición: "Hay ingenieros que no son arquitectos" es equivalente a:

I. Falso es que, los ingenieros no son arquitectos.
II. Algunos ingenieros no son arquitectos.
III. Todos los ingenieros no son arquitectos.

Resolución: Analicemos la proposición:

Hay ingenieros que no son arquitectos.
$\underbrace{\text{Hay ingenieros}}_{\text{Algunos ingenieros}}$

Entonces, la proposición queda así:

"Algunos ingenieros no son arquitectos"

Ahora veamos las alternativas:

I. $\underbrace{\text{Falso es que,}}_{\text{Negación}}$ $\underbrace{\text{los ingenieros}}_{\text{Todos los ingenieros}}$ no son arquitectos

Queda así:

~ (Todos los ingenieros no son arquitectos).

~ (Algunos ingenieros no son arquitectos).

Es la negación de la proposición inicial.

∴ Es falso (F).

II. Algunos ingenieros no son arquitectos.

Es equivalente a la proposición inicial.

∴ Es verdadero (V).

III. Todos los ingenieros no son arquitectos.

Esta proposición es "Universal" y la proposición inicial es "Particular", no es equivalente.

∴ Es falso (F).

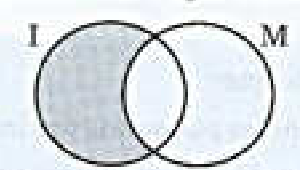
PROBLEMA 17 Dadas las siguientes premisas:

- Todos los que estudian ingeniería saben matemáticas.
- Algunos estudiantes de ingeniería hacen deporte.

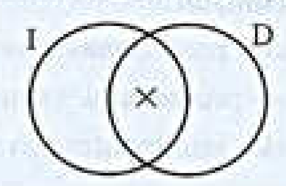
Se deduce que:

Resolución:

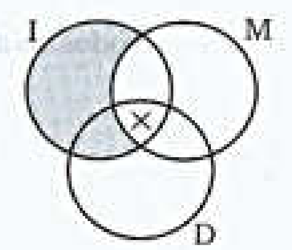
"Todos los que estudian ingeniería (I) saben matemáticas (M)"



"Algunos estudiantes de ingeniería (I) hacen deporte (D)".



Juntamos los dos diagramas:



Se deduce que:

∴ Algunos que hacen deportes saben matemáticas.

PROBLEMA 18 La negación lógica de la proposición:

"Todos los números primos no son pares", es:

Resolución: "Todos los números primos no son pares"

Es equivalente a:

"Algunos números primos no son pares"

La negación de:

"Algunos P no son Q" es:

"Todos los P son Q"

Entonces la negación es:

∴ Todos los números primos son pares.

PROBLEMA 19 Indique la proposición equivalente a:

"Todos los apolíticos son no creyentes".

Resolución: "Todos los apolíticos son no creyentes"

Es equivalente a:

"Ningún apolítico es creyente".

La cual es equivalente a:

∴ "Todos los creyentes son políticos"

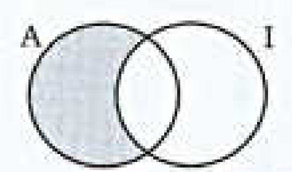
PROBLEMA 20 Sabiendo que:

– Todos los abogados son inteligentes.
– Algunos profesionales son abogados

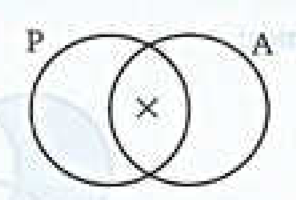
Podemos concluir.

I. Todos los profesionales son inteligentes.
II. Algunos profesionales son inteligentes.
III. Todos los inteligentes son abogados.

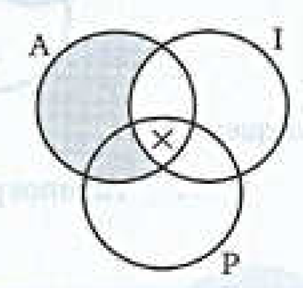
Resolución: "Todos los abogados (A) son inteligentes (I)".



"Algunos profesionales (P) son abogados (A)".



Juntamos los dos diagramas:



Se concluye:

Algunos profesionales son inteligentes

∴ Entonces sólo II es correcta.

PROBLEMA 21 La proposición equivalente a:

"Todos los irresponsables son no católicos", es:

Resolución: Recuerda que:

– Todo S es no P ≡ Ningún S es P

– Ningún S es no P ≡ Todo S es P

Entonces:

Todos los irresponsables son no católicos.

≡ Ningún irresponsable es católico.

≡ Ningún católico es irresponsable (irresponsable = no responsable)

∴ ≡ Todo católico es responsable.

PROBLEMA 22 A partir de las siguientes premisas:

- Todos los artistas son sensibles.
- No es cierto que todos los poetas sean sensibles.

Se infiere válidamente que:

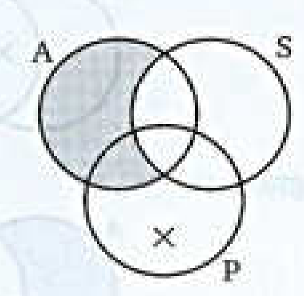
Resolución:

– Todos los artistas son sensibles.

– ~(Todos los poetas son sensibles).

≡ Algunos poetas no son sensibles

Graficamos:



Se infiere que:

∴ Algunos poetas no son artistas.

PROBLEMA 23 Si todos los animales con mamas son mamíferos y el ornitorrinco, cuyo hocico se parece al pico del pato, tiene mamas, entonces:

Resolución: 1) Todos los animales con mamas son mamíferos.

2) El ornitorrinco tiene mamas

Todos los ornitorrincos tienen mamas

Graficamos:

∴ Todos los ornitorrincos son mamíferos

PROBLEMA 24 Si sabemos que: "Algunos ángeles son inmortales", entonces podemos concluir que:

Resolución: Sabemos que:

Algunos S son P ≡ Algunos P son S

Entonces:

Algunos ángeles son Inmortales

≡ Algunos inmortales son ángeles

∴ Algunos inmortales son ángeles.

PROBLEMA 25 Ningún científico admite la clonación de seres humanos, pero algunos aficionados a la ciencia ficción la admiten. En consecuencia:

Resolución:

1) Ningún científico admite la clonación.
2) Algunos aficionados a la ciencia ficción admiten la clonación

Graficamos:

Se concluye que:

∴ Algunos aficionados a la ciencia ficción no son científicos.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

03 de setiembre del 2020

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Luego de negar: "Ningún mentiroso triunfará en la vida" resulta:

A) Todos los que mienten triunfan en la vida.
B) Todos los triunfadores no son mentirosos.
C) Algunos mentirosos son triunfadores.
D) Ningún triunfador es mentiroso.
E) Algunos mentirosos no son triunfadores.

2. La negación de "Todos los gobiernos son democráticos" es:

A) Todos los gobiernos no son democráticos.
B) Ningún gobierno es democrático.
C) Algunos gobiernos son democráticos.
D) No es cierto que ningún gobierno es democrático
E) Algunos gobiernos no son democráticos.

3. La negación lógica de la proposición: "Todos los números primos no son pares" es:

A) Algunos números primos son pares.
B) Todos los números primos son impares.
C) Ningún número primo es par.
D) Todos los números primos son pares.
E) Algunos números primos no son pares.

4. Se sabe que:
- Algunos científicos son ateos.
- Ningún poeta es científico.

Luego se deduce válidamente que:

A) Algunos poetas son ateos.
B) Algunos científicos no son ateos.
C) Algunos ateos no son poetas.
D) Algunos poetas no son ateos.
E) Más de una alternativa es correcta.

5. A partir de las siguientes premisas:
- Todos los artistas son sensibles.
- No es cierto que, todos los poetas sean sensibles.

Se infiere válidamente que:

A) Todos los poetas son artistas.
B) Ningún artista es poeta.
C) Algunos poetas no son artistas.
D) Todos los artistas son poetas.
E) Algunos sensibles no son poetas.

6. ¿Qué alternativa muestra una proposición equivalente a: "Todo político es astuto"?

A) Algún político es ingenuo.
B) Algún político no es ingenuo.
C) Ningún ingenuo es político.
D) Ningún político es ingenuo.
E) Todo político es ingenuo.

7. La negación lógica de: "Todos los leones son carnívoros", es:

A) Todos los leones no son carnívoros.
B) Ningún león es carnívoro.
C) Algunos leones son carnívoros.
D) No todos los leones son carnívoros.
E) Algunos carnívoros no son leones.

8. La negación lógica de: "Algunos insectos son voladores", es:

A) Todos los insectos son voladores.
B) Todos los insectos no son voladores.
C) Algunos insectos no son voladores.
D) Ningún insecto es volador.
E) Ningún insecto es no volador.

9. La negación lógica de: "Ningún pez es mamífero", es:

A) Todos los peces son mamíferos.
B) Algunos peces son mamíferos.
C) Algunos peces no son mamíferos.
D) Algunos peces son no mamíferos.
E) Es falso que, todos los peces no son mamíferos.

10. La negación lógica de: "Algunos políticos no son honestos".

A) Algunos políticos son honestos.
B) Algunos honestos son políticos.
C) Todos los honestos son políticos.
D) Ningún político es honesto.
E) Todos los políticos son honestos.

11. La negación lógica de : "Algunos inmorales son gobernantes", es:

A) Algunos inmorales no son gobernantes.
B) Algunos gobernantes no tienen moral.
C) Todos los gobernantes tienen moral.
D) Ningún gobernante tiene moral.
E) Es falso que, todos los inmorales son gobernantes.

12. La negación lógica de:"Ningún invertebrado es no volador", es:

A) Algunos invertebrados no son voladores.
B) Algunos vertebrados no son voladores.
C) Ningún invertebrado es volador.
D) Ningún vertebrado es volador.
E) Algunos vertebrados son voladores.

13. La negación lógica de: "Todos los choferes de combi son irresponsables", es:

A) Ningún chofer de combi es irresponsable.
B) Ningún chofer de combi es responsable.
C) Algunos choferes de combi no son irresponsables.
D) Algunos choferes de combi no son responsables.
E) Algunos choferes de combi son responsables.

14. La negación lógica de: "Todos los poetas son soñadores", es:

A) Todos los poetas no son soñadores.
B) Algunos poetas son soñadores.
C) Algunos soñadores no son poetas.
D) Ningún poeta es soñador.
E) Ningún soñador es poeta.

15. La negación lógica de: "Ningún soñador es racional", es:

A) Todo soñador es racional.
B) Hay soñadores que son racionales.
C) Algún soñador no es racional.
D) Ningún soñador es no racional.
E) No hay soñadores que sean racionales.

16. ¿Cuál es la negación lógica de la proposición: "Todas estas preguntas son difíciles"?

A) Todas estas preguntas son fáciles.
B) Ninguna de estas preguntas es difícil.
C) Algunas de estas preguntas no son fáciles.
D) Algunas de estas preguntas son difíciles.
E) Algunas de estas preguntas no son difíciles.

17. Si todos los abogados son deshonestos y ningún deshonesto triunfa en la vida, se deduce que:

A) Alguien que triunfa en la vida es abogado.
B) Ninguno que triunfa en la vida es abogado.
C) Alguien que triunfa en la vida no es abogado.
D) Algún abogado no triunfa en la vida.
E) Todos los que triunfan en la vida son abogados.

18. Si ninguna mujer es mentirosa, y algunas mujeres no son doctoras, podemos concluir que:

A) Algunas doctoras no son mentirosas.
B) Algunas doctoras son mentirosas.
C) Algunas mujeres no son doctoras.
D) Algunas mentirosas no son doctoras.
E) Ninguna mentirosa es doctora.

19. Si todos los extranjeros son educados, y algunos turistas no son educados, se deduce válidamente que:

A) Algunos extranjeros son turistas.
B) Algunos educados son turistas.
C) Algunos turistas no son extranjeros.
D) Algunos extranjeros no son turistas.
E) Todos los extranjeros son turistas.

20. Dadas las siguientes premisas:

– Algunos vendedores no son honestos.
– Todas las mujeres son honestas.

Se puede deducir válidamente que:

A) Algunos vendedores son mujeres.
B) Algunas mujeres son vendedoras.
C) Algunos vendedores no son mujeres.
D) Ninguna mujer es vendedora.
E) Ningún vendedor es mujer.

21. A partir de la premisa: "Todos los universitarios son inteligentes", se puede deducir válidamente que:

I. No es cierto que al menos un universitario no sea inteligente.
II. Al menos un universitario es inteligente.
III. Algunos universitarios no son inteligentes.

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II
D) I y III E) II y III

22. Si todos los ents son árboles, y ningún hobbit es árbol, entonces:

A) Algunos hobbits son ents.
B) Ningún hobbit es ent.
C) Algunos árboles no son ents.
D) Algunos hobbits no son árboles.
E) Todos los hobbits no son ents.

23. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente a: "Todos los diplomáticos no son católicos"?

A) Ningún diplomático es católico.
B) Algunos diplomáticos son católicos.
C) No todos los católicos son diplomáticos.
D) Algunos diplomáticos no son católicos.
E) Algunos católicos no son diplomáticos.

24. Dadas las siguientes premisas:

– Algunos soldados no son valientes.
– Todos los que van a la guerra son valientes.

Se puede deducir válidamente que:

A) Algunos soldados van a la guerra.
B) Algunos que van a la guerra no son soldados.
C) Algunos soldados no van a la guerra.
D) Ninguno que va a la guerra es soldado.
E) Ningún soldado va a la guerra.

25. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente a: "Todos los estudiantes de Atenea no son flojos"?

A) Ningún estudiante de Atenea es flojo.
B) Algunos estudiantes de Atenea son flojos.
C) No todos lo flojos son estudiantes de Atenea.
D) Algunos estudiantes de Atenea no son flojos.
E) Algunos flojos no son estudiantes de Atenea.

26. Si todos los orcos son malvados y ningún hobbit es malvado, entonces:

A) Algunos hobbit son orcos.
B) Ningún hobbit es orco.
C) Algunos malvados no son orcos.
D) Algunos hobbit no son malvados.
E) Todos los hobbit no son orcos.

27. A partir de la premisa: "Todos los bebes son lindos", se puede deducir válidamente que:

I. No es cierto que al menos un bebe no sea lindo.
II. Al menos un bebe es lindo.
III. Algunos bebes no son lindos.

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II
D) I y III E) II y III

28. Si ningún niño es mentiroso, y algunos niños son traviesos, podemos concluir válidamente que:

A) Algunos traviesos no son mentirosos.
B) Algunos traviesos son mentirosos.
C) Algunos niños no son mentirosos.
D) Algunos mentirosos no son traviesos.
E) Ningún mentiroso es travieso.

29. Si todos los detalles son importantes y algunos detalles son mensajes, entonces es verdad que:

A) Ningún mensaje es importante.
B) Todos los mensajes son detalles.
C) Algunos detalles no son importantes.
D) Todos los mensajes son importantes.
E) Algunos mensajes son importantes.

30. Si "Todos los valores son inmateriales" entonces:

A) Todos los inmateriales son valores.
B) Algunos valores son materiales.
C) Ningún valor es material.
D) Algunos valores no son materiales.
E) Ningún valor no es material.

31. Si: "Todo hombre es mortal" entonces:

A) Algún hombre no es mortal.
B) Algún mortal no es hombre.
C) Ningún hombre es mortal.
D) Ningún no mortal es hombre.
E) Ningún no hombre es no mortal.

32. Si: "Todos los ricos son insensibles", concluimos que:

A) Es falso que todo rico sea sensible.
B) Ningún rico es insensible.
C) No todos los ricos son insensibles.
D) Algunos ricos no son insensibles.
E) Todo insensible es rico.

33. Si:

– Todo estudiante que se esfuerza ingresa.
– Todo joven estudia con esfuerzo.

Entonces:

A) Todo joven ingresa.
B) Ningún joven ingresa.
C) Ningún estudiante es joven.
D) Todo el que no ingresa no es joven.
E) Todo el que no ingresa es joven.

34. – Todos los cuadrúpedos son vertebrados.
– Algunos mamíferos son cuadrúpedos.

Entonces:

A) Todo mamífero es vertebrado.
B) Algunos mamíferos son vertebrados.
C) Ningún mamífero es vertebrado.
D) Todo mamífero no es cuadrúpedo.
E) Se niega que algunos mamíferos son vertebrados.

35. Si "Algunas aves vuelan" entonces podemos concluir que:

A) Ningún ave vuela.
B) Es falso que ningún ave vuela.
C) Ningún volador es ave.
D) Todas las aves vuelan.
E) Algunas aves no vuelan.

36. Si "Algunos filósofos son materialistas". Entonces podemos concluir que:

A) No ocurre que ningún filósofo sea materialista.
B) Ningún filósofo es materialista.
C) Ningún materialista es filósofo.
D) Todo filósofo es materialista.
E) Algunos filósofos no son materialistas.

37. Si: "No todo profesional es amoral". Entonces podemos concluir que:

A) Es falso que algunos profesionales no sean morales .
B) Algunos profesionales son morales.
C) Algunos profesionales no son morales.
D) Todo profesional es no moral.
E) Algunos morales no son profesionales.

38. Si es cierto que: "Ningún ornitorrinco es no mamífero", entonces:

A) Algún ornitorrinco es mamífero.
B) No todo ornitorrinco es mamífero.
C) Todo ornitorrinco es mamífero.
D) Ningún mamífero es ornitorrinco.
E) Algún ornitorrinco es no mamífero.

39. Si: "Todo orangután es simio", entonces:

A) Algún orangután no es simio.
B) Algún simio no es orangután.
C) Ningún orangután es simio.
D) Ningún no orangután es no simio.
E) Ningún no simio es orangután.

40. Si: "Todo matemático es científico", concluimos que:

A) Ningún matemático es científico.
B) No todo matemático es científico.
C) Algunos matemáticos no son científicos.
D) Todo científico es matemático.
E) No es cierto que todo científico sea no matemático.

41. Si: "Ningún escritor es considerado apolítico", entonces :

A) Todo político es escritor.
B) Ningún político es escritor.
C) Todo apolítico es escritor.
D) Todo escritor es político.
E) Ningún político es escritor.

42. Si afirmamos que:
"Ningún molusco es mamífero", entonces:

A) Todo mamífero es molusco.
B) Algún no mamífero es molusco.
C) Ningún molusco es no mamífero.
D) Algún mamífero es no molusco.
E) Todo molusco es mamífero.

43. Sabiendo que:
"Todo responsable es maduro", entonces:

A) Ningún responsable es maduro.
B) Algún inmaduro es responsable.
C) Todo maduro es responsable.
D) Algún responsable no es maduro.
E) Ningún maduro es responsable.

44. Si: "Todo desordenado es incumplido", entonces:

A) Todo incumplido es desordenado.
B) Algún desordenado es cumplido.
C) Ningún cumplido es ordenado.
D) Algún ordenado es cumplido.
E) Ningún cumplido es desordenado.

45. Si: "Es falso que algunos políticos sean honestos", entonces:

A) Algún político es deshonesto.
B) Cierto honestos no son no políticos.
C) Ningún deshonesto es político.
D) No es el caso que los políticos son honestos.
E) Los deshonestos son políticos.

46. Si:

* Todos los insectos son invertebrados.
* Algunos insectos son coleópteros.

Entonces:

A) Todo coleóptero es invertebrado.
B) Algún coleóptero es invertebrado.
C) Ningún coleóptero es insecto.
D) Todo insecto es coleóptero.
E) Algún coleóptero es vertebrado.

47. Si:

* Una persona que estudia con esfuerzo, logrará sus objetivos.
* Todo joven estudia con esfuerzo.

A) Ningún joven logra sus objetivos.
B) Todo joven logra sus objetivos.
C) Ninguna persona es joven.
D) Todo el que no logra sus objetivos no es joven.
E) Todo el que logra sus objetivos no es joven.

48. Si:

* Algunos poetas son fantasiosos.
* Todo fantasioso es no realista.

A) Todo los poetas son realistas.
B) No es cierto que muchos poetas no sean realistas.
C) Muchos poetas no son escritores.
D) Muchos poetas no son realistas.
E) Ningún poeta es realista.

49. Si:

* Muchos de los que ofrendan la vida son valientes.
* Todos los valientes van a la gloria.

A) Nadie que ofrenda la vida va a la gloria.
B) Todos los valientes van a la gloria.
C) Muchos de los que ofrendan la vida van a la gloria.
D) Todo aquel que ofrenda la vida va a la gloria.
E) Algunas personas van a la gloria.

50. Si afirmamos que:

* Algunos reptiles son de sangre caliente.
* Todo animal de sangre caliente es ovíparo.

Entonces:

A) Todo reptil es ovíparo.
B) Ningún reptil es ovíparo.
C) Algunos reptiles son ovíparos.
D) Todo reptil no es de sangre caliente.
E) No es cierto que algunos reptiles son ovíparos.

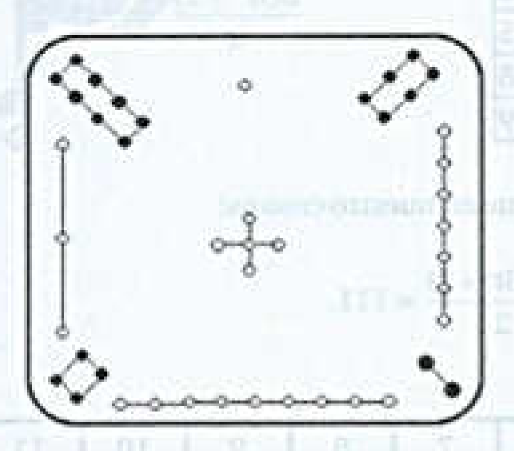
Cuadrados Mágicos y Problemas sobre Pesadas

CAPACIDADES

- Conocer la historia de los cuadrados mágicos.
- Conocer los métodos para la construcción de los cuadrados mágicos.
- Resolver situaciones sobre pesadas.

HISTORIA DE LOS CUADRADOS MÁGICOS
CUADRADO MÁGICO LO SHU

En la antigua China ya se conocían los cuadrados mágicos desde el tercer milenio a. C.
Como atestigua el Lo Shu. Según la leyenda, un cierto día se produjo el desbordamiento de un río; la gente, temerosa, intento hacer una ofrenda al dios del río Lo (uno de los desbordados) para calmar su ira. Sin embargo, cada vez que lo hacían, aparecía una tortuga que rondaba la ofrenda sin aceptarla, hasta que un chico se dio cuenta de las peculiares marcas del caparazón de la tortuga, de este modo pudieron incluir en su ofrenda la cantidad pedida (15), quedando el dios satisfecho y volviendo las aguas a su cauce.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

CUADRADO MÁGICO

Un cuadrado mágico es la disposición de una serie de números enteros en un cuadrado o matriz de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales sea la misma, la constante mágica. Usualmente los números empleados para rellenar las casillas son consecutivos, de 1 a n^2, siendo **n** el número de columnas y filas del cuadrado mágico.

INTRODUCCIÓN

Consideremos la sucesión aritmética 1, 2, 3, 4, ..., 36 (cuadrado de orden 6), y dispongamos los números ordenadamente en dos series dispuestas en zig–zag:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Resulta evidente que cualquier par de números alineados verticalmente suma lo mismo ya que a medida que nos desplazamos por las columnas, en la fila superior se añade una unidad, mientras que en la fila inferior se resta. La suma es en todos los casos la de los números extremos: $n^2 + 1 = 36 + 1 = 37$.

Si disponemos el conjunto de números en seis filas (ver tabla abajo) fácilmente se puede apreciar que las sumas en las distintas columnas han de ser necesariamente iguales, ya que los números se encuentran agrupados por pares tal y como estaban en el primer caso (compárese los pares de filas $1^a - 6^a$, $2^a - 5^a$ y $3^a - 4^a$ con la disposición original). Ahora sin embargo, por ser tres los pares de filas (n/2), la suma será:

1	2	3	4	5	6
36	35	34	33	32	31
7	8	9	10	11	12
30	29	28	27	26	25
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19

$$\frac{n(n^2+1)}{2}$$

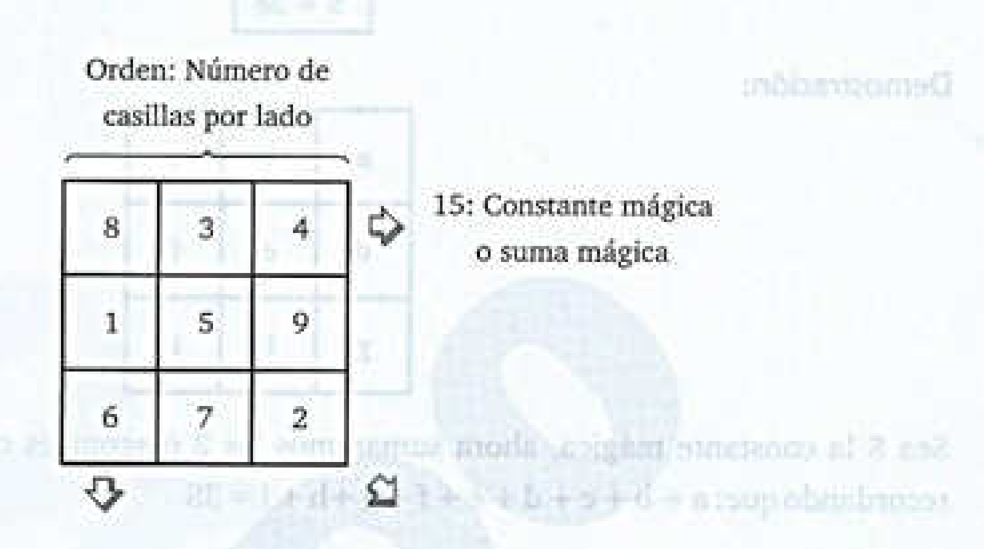
Cantidad que se denomina **constante mágica**, y que en nuestro caso es:

$$\frac{n \times (n^2+1)}{2} = \frac{6 \times (36+1)}{2} = 111.$$

Orden n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Constante Mágica	15	34	65	111	175	260	369	505	671	870	1105

CUADRADOS MÁGICOS

Es una disposición cuadrada de números en que la suma de los números en cada columna, fila o diagonal es la misma.



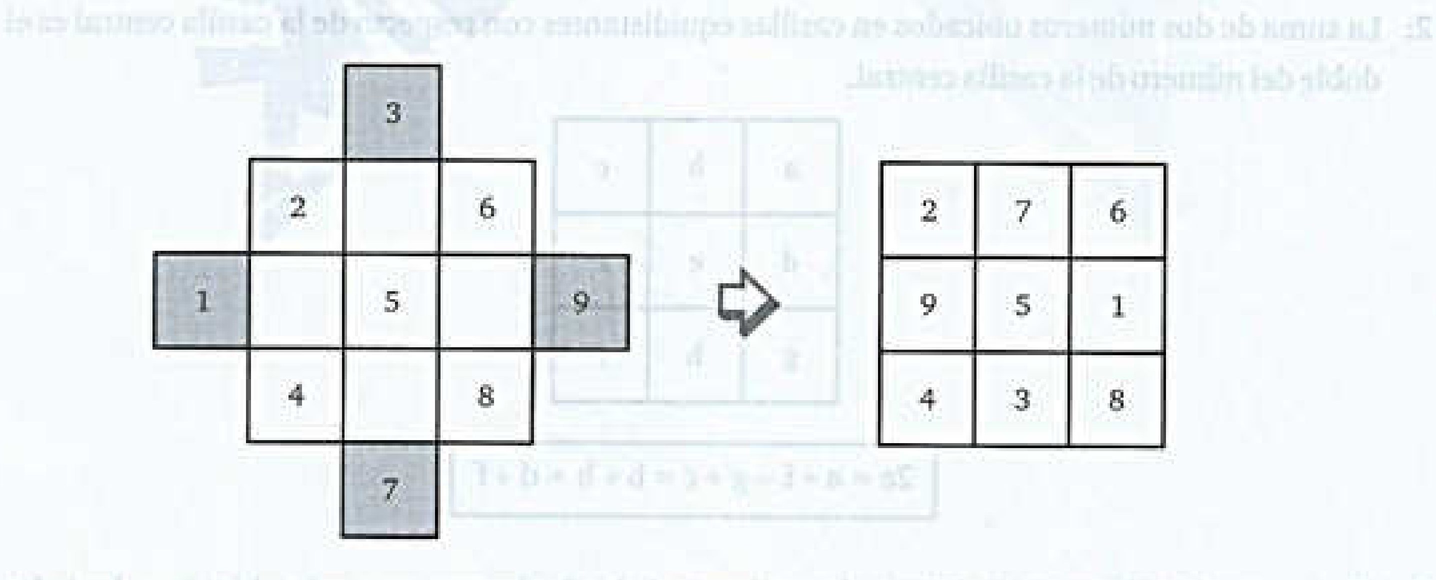
CUADRADOS MÁGICOS DE ORDEN 3

MÉTODO DE BACHET

Paso 1: Construya casillas en forma de torre sobre los lados del cuadrado mágico.

Paso 2: Escriba el 1 en la casilla lateral izquierda y complete los números en forma diagonal hacia arriba.

Paso 3: Los números fuera del cuadrado ingresarán de forma simétrica en el lado opuesto.



PROPIEDADES

1: La constante mágica es el triple del número central.

$$S = 3e$$

Demostración:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Sea S la constante mágica, ahora sumaremos las 2 diagonales con la columna y fila central, recordando que: $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 3S$

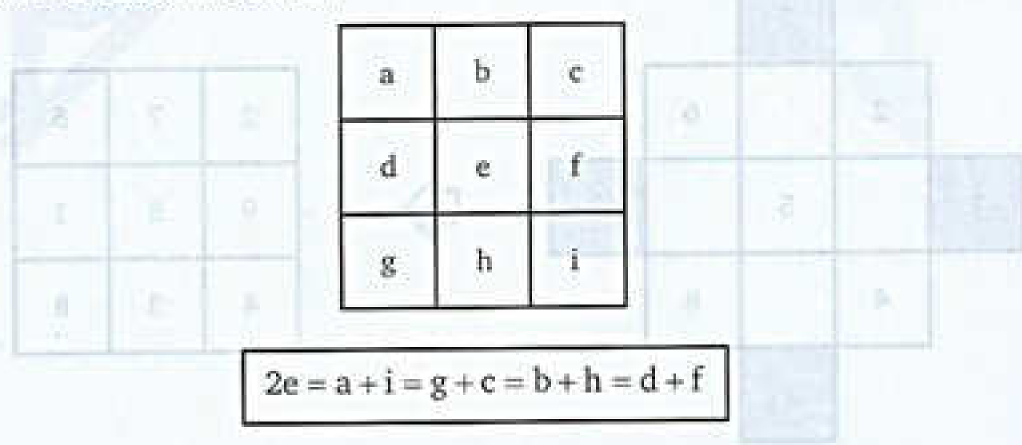
$$\begin{aligned} a + e + i &= S \\ c + e + g &= S \\ d + e + f &= S \\ b + e + h &= S \end{aligned} \quad +$$

$$\underline{a + b + c + d + e + f + g + h + i} + 3e = 4S$$

$$3S + 3e = 4S$$

$$3e = S$$

2: La suma de dos números ubicados en casillas equidistantes con respecto de la casilla central es el doble del número de la casilla central.



a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$2e = a + i = g + c = b + h = d + f$$

3: El número ubicado en cada vértice es la semisuma de los 2 números que están ubicados a los lados de su vértice opuesto.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a = \frac{h+f}{2}$$

Se cumple para cada vértice.

Demostración:

Sumaremos la fila inferior, con la columna derecha y luego la igualamos con el doble de la diagonal.

$$\begin{aligned} g+h+i &= S \\ c+f+i &= S \end{aligned} \quad (+)$$

$$g+h+i+e+f+i = 2S = 2(a+e+i)$$

$$g+h+\cancel{i}+c+f+\cancel{i} = 2a+2e+\cancel{2i}$$

$$\underbrace{g+c}+h+f = 2a+2e$$

$$\cancel{2e}+h+f = 2a+\cancel{2e}$$

$$\frac{h+f}{2} = a$$

CUADRADOS MÁGICOS DE ORDEN 4

MÉTODO DE LAS X

Paso 1: Ubique los números desde la casilla superior izquierda y en orden ascendente.

Paso 2: Divida en sub cuadrados 4×4 trace una equis (x) en cada sub cuadrado.

Paso 3: Los números tocados por la equis se intercambian en forma simétrica con respecto al centro del cuadrado.

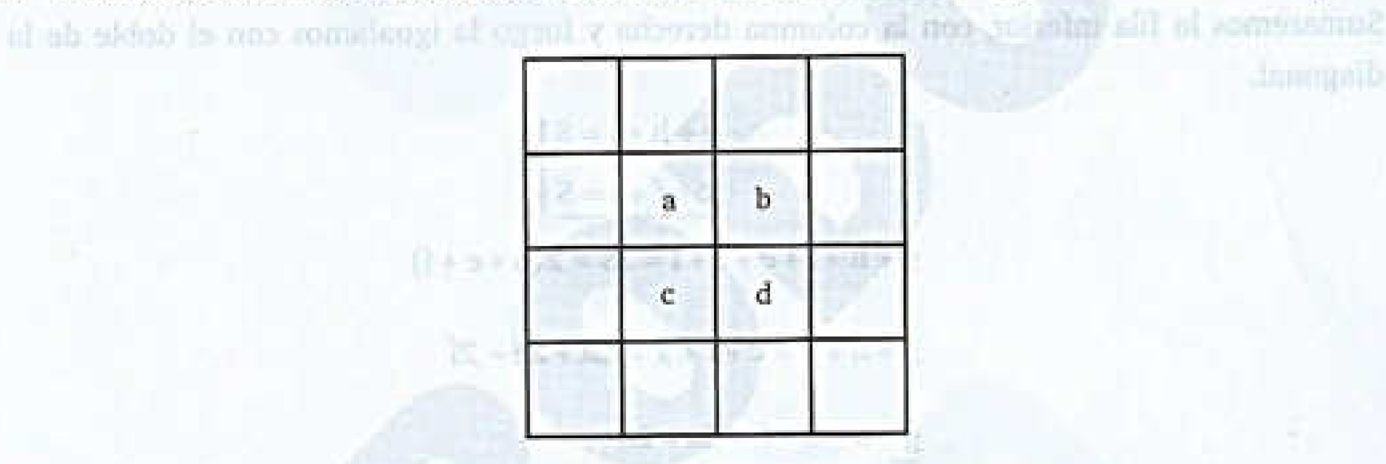
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

⇨

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

PROPIEDADES

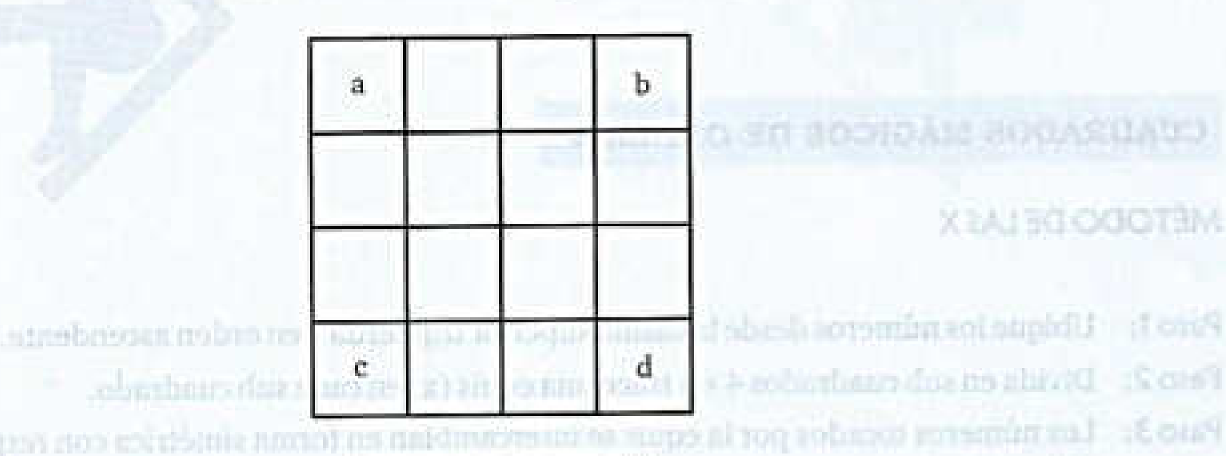
1: La suma de los números ubicados en las cuatro casillas centrales es igual a la constante mágica.



$$a + b + c + d = S$$

S: constante mágica

2: La suma de los números ubicados en los vértices es igual a la constante mágica.



$$a + b + c + d = S$$

S: constante mágica

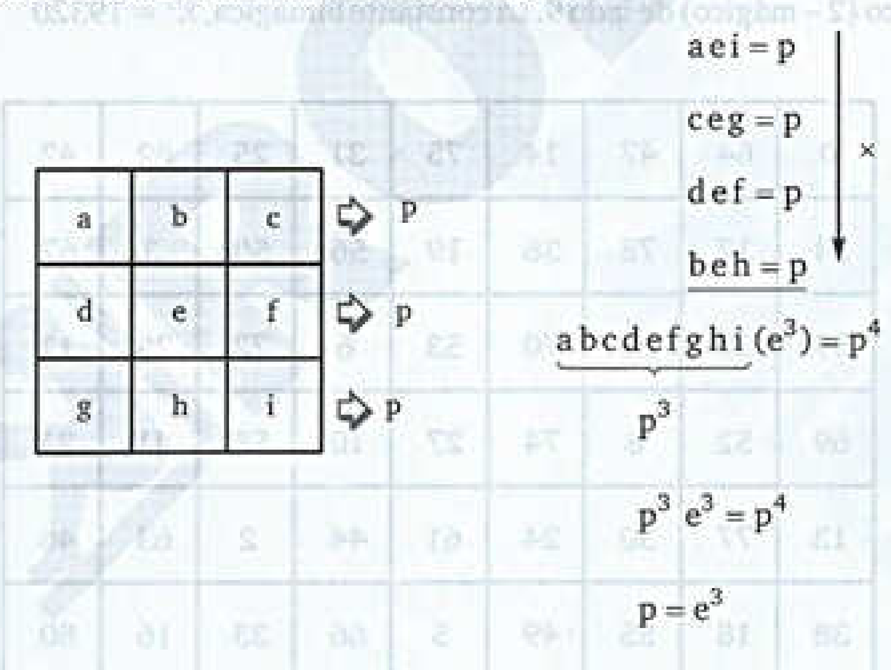
CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO

Es una variante del cuadrado mágico, en la que se cumple que el producto de los números ubicados en fila, columna y diagonal es constante.

En un cuadrado mágico multiplicativo, el análisis es de manera similar al cuadrado mágico, puesto que hay una similitud en sus propiedades.

a	b	c	⇨ $abc = p$
d	e	f	⇨ $def = p$
g	h	i	⇨ $ghi = p$
⇩ p	⇩ p	⇩ p	

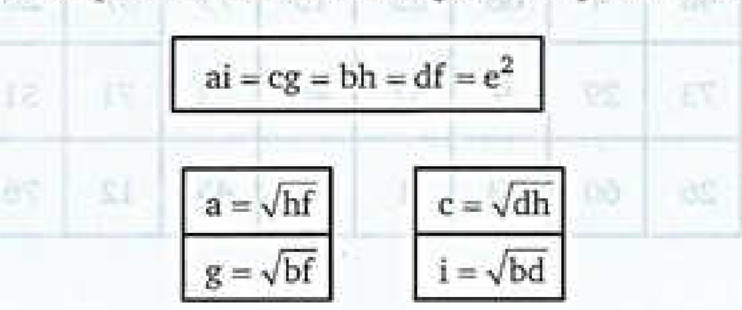
Sea P producto constante, en fila, columna y diagonal



a	b	c	⇨ p
d	e	f	⇨ p
g	h	i	⇨ p

$$aei = p$$
$$ceg = p$$
$$def = p$$
$$beh = p \quad (\times)$$
$$\underbrace{abcdefghi}_{p^3}(e^3) = p^4$$
$$p^3 e^3 = p^4$$
$$p = e^3$$

También se puede demostrar que en un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3 se cumple:



$$ai = cg = bh = df = e^2$$

$$a = \sqrt{hf} \qquad c = \sqrt{dh}$$
$$g = \sqrt{bf} \qquad i = \sqrt{bd}$$

a			b
	w	x	
	y	z	
c			d

a b c d = w x y z = p

S: constante mágica

Algunas variantes de un cuadrado mágico son los cuadrados semimágicos, en la que la suma de los números en fila y columna es la misma que dieron origen a los Sudokus.

Los cuadrados bimágicos que siguen siendo cuadrados mágicos cuando a cada uno de los elementos se eleva al cuadrado.

Cuadrado bimágico (2 – mágico) de lado 9. La constante bimágica, $K^2 = 19320$

0	64	47	14	75	31	25	62	42
34	17	78	36	19	56	50	3	67
59	39	22	70	53	6	72	28	11
69	52	8	74	27	10	58	41	21
13	77	30	24	61	44	2	63	46
38	18	55	49	5	66	33	16	80
48	4	68	35	15	79	37	20	54
73	29	9	57	40	23	71	51	7
26	60	43	1	65	45	12	76	32

Los cuadrados diabólicos en el que la suma de todas las diagonales (inclusive las truncadas) es igual a la constante mágica del cuadrado.

Cuadrado Diabólico.

1	8	13	12
15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7

Diagonales truncadas:

$4 + 10 + 13 + 7 = 34$

$15 + 8 + 2 + 9 = 34$

$1 + 11 + 16 + 6 = 34$

$14 + 8 + 3 + 9 = 34$

$15 + 5 + 2 + 12 = 34$

PROBLEMAS SOBRE PESADAS

Son aquellos problemas en los cuales se nos pide calcular un peso determinado. Para ello haremos uso de las herramientas que han sido diseñadas, como balanzas y pesas, para realizar dicho calculo.

PESAS

Son pequeños sólidos de forma cilíndrica hechos de metal, bronce generalmente, que tiene un peso ya determinado.

BALANZAS

Son aquellos instrumentos donde se colocan los objetos para determinar su peso (masa). Se utilizan generalmente de dos tipos:

- De un solo platillo.
- De dos platillos.

DE UN SOLO PLATILLO:

En este tipo de balanzas, los objetos se colocan en el platillo y la aguja nos indicará en el panel numérico, el peso de dicho objeto.

Ejemplo:

La aguja nos está indicando que el objeto pesa 2 Kg.

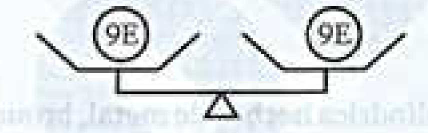
DE DOS PLATILLOS

A) CUANDO SE DESEA ENCONTRAR UNA MONEDA, UNA ESFERA, UNA PERLA, ETC. DE MAYOR O DE MENOR PESO QUE LAS DEMÁS.

Ejemplo: Se tiene 27 esferas del mismo tamaño, pero hay una que es más pesada que las demás. ¿Cuántas pesadas como mínimo se deben realizar para detectar dicha esfera? (Usar una balanza de dos platillos).

Resolución: * Buscamos formar grupos homogéneos, de tal manera que la esfera más pesada estará en uno de esos grupos.

Primera Pesada



9E

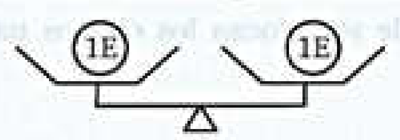
* Sabemos con certeza que la esfera más pesada está en un grupo de 9; ahora volvemos a repetir el procedimiento anterior.

Segunda Pesada

3E

* Finalmente realizamos una pesada más con la misma estrategia.

Tercera Pesada



1E

∴ Se deben realizar 3 pesadas como mínimo.

NOTA "S"

$x \leq 3^n$

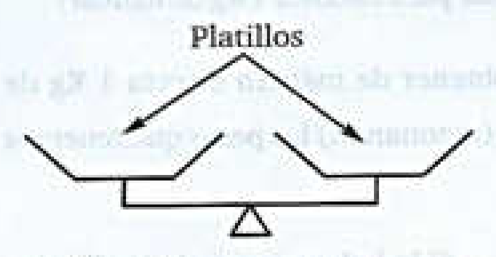
x: Total de esferas, monedas, etc.

n: N° de pesadas mínima (n debe ser el menor exponente posible).

* En el problema : $27 \leq 3^{3}$

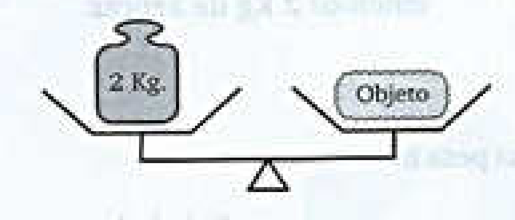
∴ 3 pesadas como mínimo.

B) CUANDO INTERVIENEN PESAS

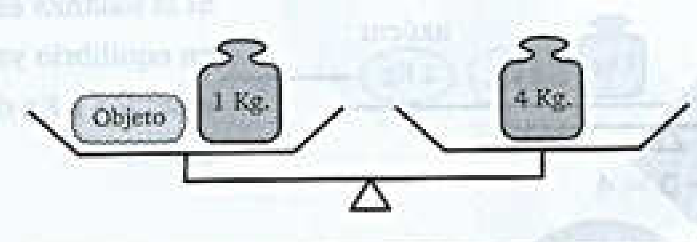


En este tipo de balanzas, primero se colocan las pesas que tienen indicado el peso que queremos obtener y el objeto se coloca en otro platillo hasta lograr el equilibrio (pesos iguales).

Ejemplo:



Si la balanza esta en equilibrio, el objeto pesa 2 Kg.

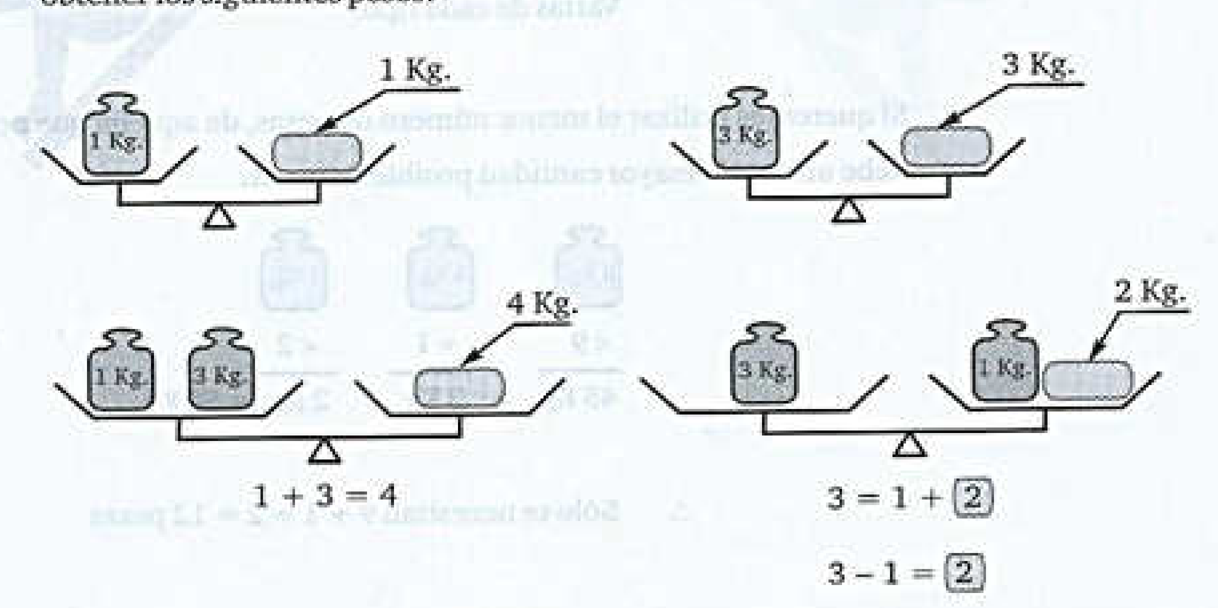


Si la balanza esta en equilibrio, el objeto pesa 3 Kg.

NOTA

Cuando utilizamos una balanza de dos platillos y pesas, los objetos se pueden pesar, los objetos se pueden pesar de tres maneras:
- De manera directa.
- Mediante suma.
- Mediante diferencias.

Ejemplo: Con una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 1 kg y otra de 3 kg, podemos obtener los siguientes pesos:

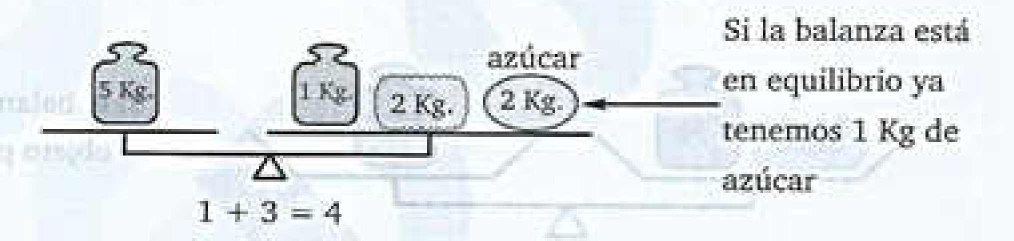


Ejemplo: Si tenemos una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 2 Kg y otra de 5 Kg, ¿Cuántas pesadas como mínimo debemos realizar para obtener 1 Kg de azúcar?

Resolución: Al no tener una pesa de 1 Kg no es posible obtener de manera directa 1 Kg de azúcar, pero si utilizamos de manera adecuada (razonando) las pesas que tenemos es posible obtener 1 Kg de azúcar, veamos:

Si la balanza está en equilibrio tenemos 2 Kg de azúcar.

Ahora utilizamos los 2 Kg de azúcar como una pesa más



∴ Sólo se necesitan dos pesadas.

Ejemplo: Tenemos varias pesas de tres tipos, cuyos pesos son: 1 Kg, 3 Kg y 5 Kg. ¿Cuántas pesas como mínimo son necesarias para obtener 50 Kg, si se deben utilizar los tres tipos de pesas?

Resolución:

Varias de cada tipo.

Si queremos utilizar el menor número de pesas, de aquella que pesa más (5 Kg.) se debe utilizar la mayor cantidad posible de pesas.

$$45\text{ Kg} + 3\text{ Kg} + 2\text{ Kg} = 50\text{ Kg}$$

∴ Sólo se necesitan 9 + 1 + 2 = 12 pesas

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Complete el siguiente cuadrado mágico:

		6
3	5	
4		

2. Complete el siguiente cuadrado mágico:

	3	8
		9
6		4

3. Complete el siguiente cuadrado mágico con los números del 5 al 13 e indique el valor de "x"

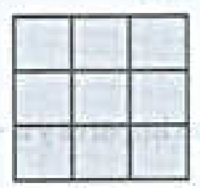
	5	
7	9	
8	x	6

Rpta.: ....

4. Se construye un cuadrado mágico de 4 × 4 casillas con los números del 10 al 25. ¿Cuál es la constante mágica?

Rpta.: ....

5. En el siguiente cuadrado coloque los primeros 9 números impares positivos, para que resulte un cuadrado perfecto. Dar como respuesta la suma de los números que irán en los vértices.



Rpta.: ....

6. Con una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 4 Kg y otra de 5 Kg, ¿cuántas pesadas como mínimo debe realizar para obtener 1 Kg de azúcar?

Rpta.: ....

7. Con una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 5 Kg y otra de 7 Kg, ¿cuántas pesadas como mínimo debe realizar para obtener 2 Kg de arroz?

Rpta.: ....

8. Con una balanza de dos platillos y tres pesas, una de 1 Kg, otra de 2 Kg y otra de 8 Kg, ¿cuántas pesadas debe realizar como mínimo para obtener 5 Kg de papas?

Rpta.: ....

9. Se dispone de varias pesas de dos tipos, cuyos pesas son 3 Kg y 5 Kg. ¿Cuál es el mínimo número de pesas que se necesitan para obtener 26 Kg?

Rpta.: ....

10. Se dispone de varias pesas de dos tipos, cuyos pesos son 4 Kg y 7 Kg. ¿Cuál es el mínimo número de pesas que se necesitan para obtener 56 Kg, si se utiliza de los dos tipos de pesas?

Rpta.: ....

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 En el cuadrado siguiente coloque los números del 1 al 9, uno en cada casilla, de tal modo que sea un cuadrado mágico, es decir la suma de los números en cada fila, columna y diagonal sea la misma. Calcular: A + B + C + D

	B	
A		C
	D	

Resolución: Recordemos como se llena un cuadrado mágico de orden 3 con los números del 1 al 9.

Cuadrado Mágico de orden 3

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

⇨

2	7	6
9	5	1
4	3	8

=

	B	
A		C
	D	

Luego:

$$A + B + C + D = 9 + 7 + 1 + 3$$

$$\therefore \quad A + B + C + D = 20$$

PROBLEMA 2 En el siguiente cuadrado mágico, la constante mágica es 63. Si a, b y c son impares y $a < b < c$, calcule el valor de x.

15	7a	
	7b	
	7c	x

Resolución: Al decirnos que la constante mágica es 63, nos están diciendo que la suma en cada fila, columna y diagonal la suma es 63.

Entonces:

$$15 + 7b + x = 63 \quad \text{............ (1)}$$

$$7a + 7b + 7c = 63$$

$$a + b + c = 9$$

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad \text{(por dato son impares y } a < b < c\text{).}$$

$$\Rightarrow a = 1;\ b = 3;\ c = 5$$

En (1):

$$15 + 7(3) + x = 63$$

$$\therefore \quad x = 27$$

PROBLEMA 3 La siguiente figura es un cuadrado mágico donde se han colocado los números del 1 al 16. Calcule: x + y + z

	3		
x		11	
y	6		z
4		14	1

Resolución: Para completar el cuadrado mágico debemos hallar la constante mágica.

$$\text{constante mágica} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

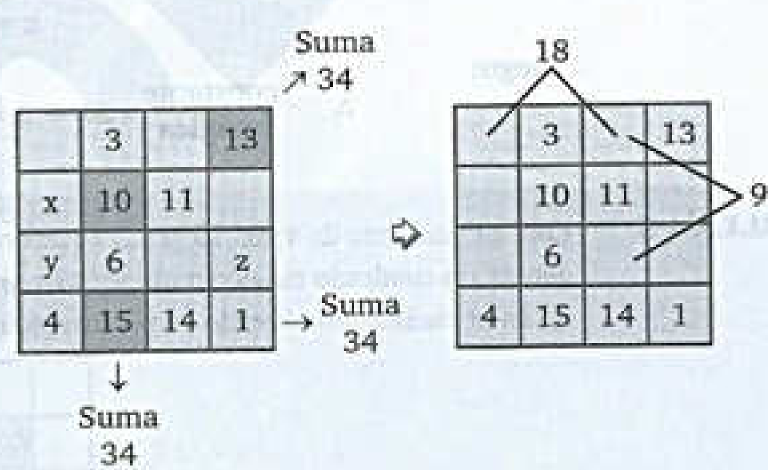
n = número de casilleros por lado.

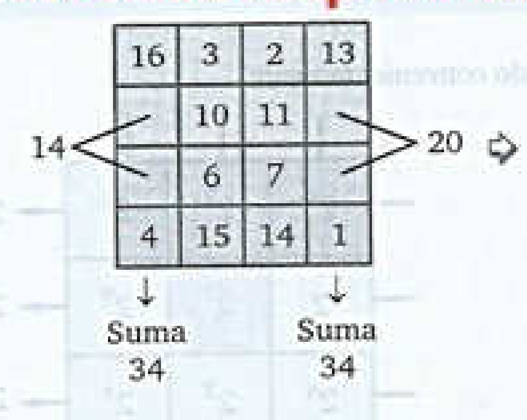
Como es un cuadrado de cuatro casilleros por lado:

$$\text{constante mágica} = \frac{4(4^2+1)}{2} = 34$$

Luego:

Cuadrado Mágico de orden 4





16	3	2	13	
5	10	11	8	Suma 34
9	6	7	12	Suma 34
4	15	14	1	

Luego:

$\therefore \quad x + y + z = 5 + 9 + 12 = 26$

PROBLEMA 4 Complete el siguiente cuadrado mágico y dar como respuesta la constante mágica.

15	4	8	
2		5	
1			13
		11	0

Resolución:

15	4	8	x	→ Suma $27+x$ (esta será la constante mágica)
2		5		
1	10	3+x	13	→ Suma $27+x$
9+x		11	0	
↓ Suma $27+x$		↓ Suma $27+x$		

Observemos la diagonal que está completa, en ella se debe cumplir que:

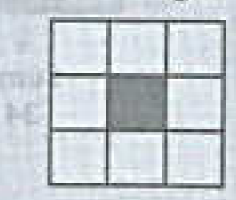
$$9+x+10+5+x=27+x$$

$$x=3$$

Luego:

$$\therefore \text{constante mágica} = 27+3=30$$

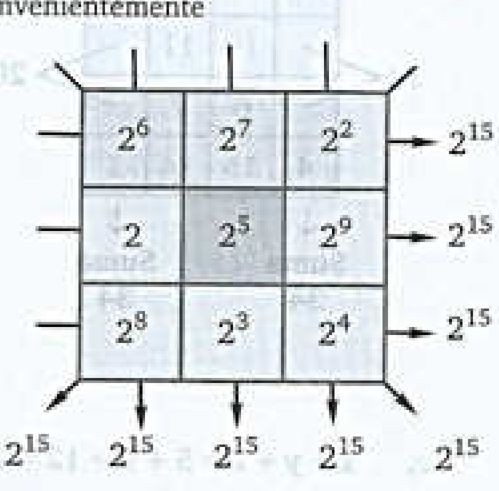
PROBLEMA 5 Con los números 2; 4; 8; 16; ......; 512 complete el siguiente tablero de modo que se genere un cuadrado mágico multiplicativo de orden 3. Halle la suma del término ubicado en el casillero sombreado y la constante mágica



Resolución: Completando convenientemente

NOTA "S"

Observa que los exponentes forman un cuadrado mágico aditivo.

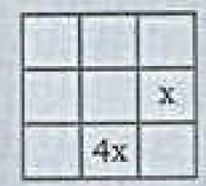


Constante mágica: 2^{15}

Término central: 2^5

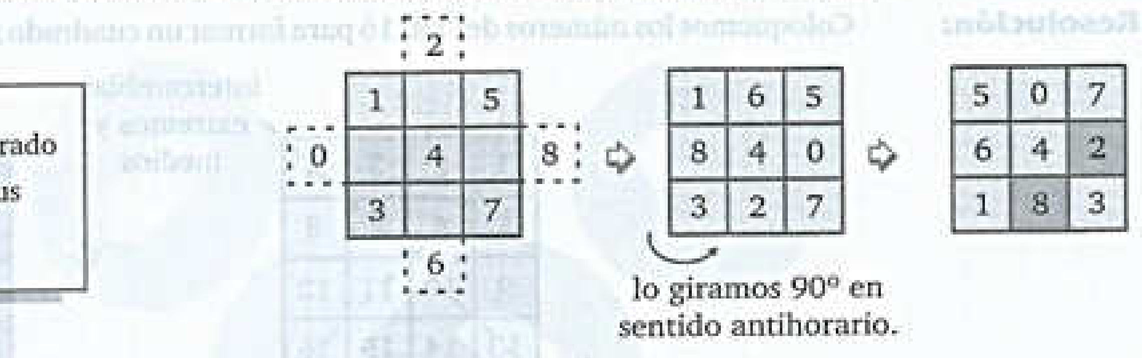
Piden: $2^{15}+2^5$

PROBLEMA 6 Distribuya los números del 0 al 8 de manera que se forme un cuadrado mágico. Halle el valor de x



Resolución: Coloquemos las cifras del 0 al 8 para formar un cuadrado mágico.

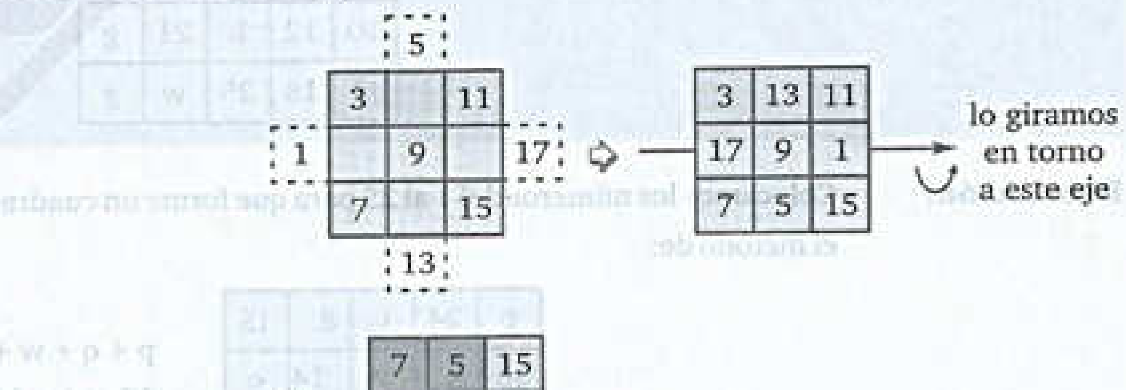
NOTA "S"
Si giramos un cuadrado mágico mantiene sus características.



∴ x = 2

PROBLEMA 7 Distribuya los 9 primeros números impares positivos para que la figura sea un cuadrado mágico. Halle el valor de x.

Resolución: Coloquemos los 9 primeros números impares positivos (1; 3; 5; 7; ....; 17) para que se forme un cuadrado mágico.

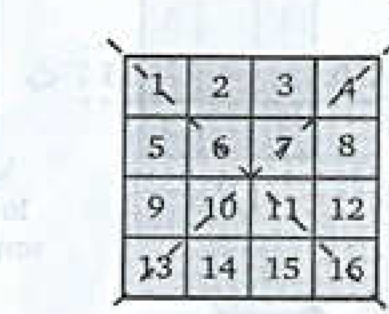


∴ x = 5

PROBLEMA 8 Con los números del 1 al 16 se forma el siguiente cuadrado mágico, determine el valor de $(a+k+j)-(h+g+f+e-m)$

a	2	c	13
m	11	10	e
k	7	6	f
j	14	h	g

Resolución: Coloquemos los números del 1 al 16 para formar un cuadrado mágico.



16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Nos piden:

$$\therefore \quad (16+9+4)-(15+1+12+8-5)=-2$$

PROBLEMA 9 Con los numerales del 1 al 25 se forma el siguiente cuadrado mágico. Determinar el valor de $(p+q+w+m)-(h+g+f+e)$

p	24	c	8	15
m	5	7	14	e
k	6	13	20	f
10	12	h	21	g
11	18	25	w	g

Resolución: Colocamos los números del 1 al 25 para que forme un cuadrado perfecto utilizando el método de:

p	24	c	8	15
m	5	7	14	e
k	6	13	20	f
10	12	h	21	g
11	18	25	w	g

$p+q+w+m$

$17+4+11+23=55$

$h+g+f+e$

$19+3+22+16=60$

$55-60=-5$

PROBLEMA 10 En la siguiente figura, los dos cuadrados de 3×3 son cuadrados mágicos. Determine el valor de $A + B + C$

		2		
3	5		A	4
		6	9	
		B	C	

Resolución: Analicemos por separado:

x		2
3	5	
y		6

Al ser un cuadrado mágico:

$$x + 3 + y = y + 5 + 2 \rightarrow x = 4$$

Con lo cual la constante mágica sería:

$$4 + 5 + 6 = 15$$

Completemos este cuadrado:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

En el otro cuadrado mágico:

7	A	4
6	9	a
B	C	b

Al ser un cuadrado mágico:

$$7 + 9 + b = 4 + a + b \rightarrow a = 12$$

Con lo cual la constante mágica sería:

$$6 + 9 + 12 = 27$$

Completando este cuadrado:

7	16	4
6	9	12
14	2	11

$$\therefore \quad A + B + C = 16 + 14 + 2 = 32$$

PROBLEMA 11 En la siguiente figura se muestra un cuadrado mágico en el cual deben colocarse los números del 5 al 20. Calcule: (A + B) – (C + D)

A	6	7	B
C			D
	11	10	

Resolución: Ubiquemos los números del 5 al 20 en le cuadrado mágico utilizando el método.

5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

⇨

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

intercambiemos estas filas (filas 1 y 2)
intercambiemos estas filas (filas 3 y 4)

Al hacer esos intercambios la constante mágica no se altera.

9	15	14	12
20	6	7	17
8	18	19	5
13	11	10	16

$A + B = 20 + 19 = 37$
$C + D = 8 + 5 = 13$ –
24

PROBLEMA 12 Usando tres pesas una de 1 Kg, una de 3 Kg y una de 9 Kg. ¿Cuántos objetos de pesos diferentes se pueden pesar como máximo, utilizando una balanza de dos platillos, si los objetos y las pesas se pueden colocar en cualquier platillo?

Resolución:

Los objetos se pueden pesar utilizando las pesas de forma individual o de manera conjunta aplicando suma o diferencia, veamos:

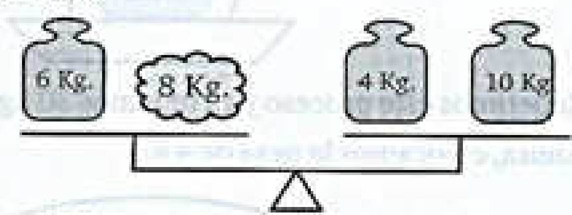
Pesas	Objetos	Pesas	Objetos	Pesas	Objetos
1 =	①	9–3 =	⑥	9+3–1 =	⑪
3–1 =	②	9+1–3 =	⑦	9 + 3 =	⑫
3 =	③	9–1 =	⑧	9+3+1 =	⑬
1+3 =	④	9 =	⑨		
9–(1+3) =	⑤	9 + 1 =	⑩		

∴ Se pueden pesar 13 objetos

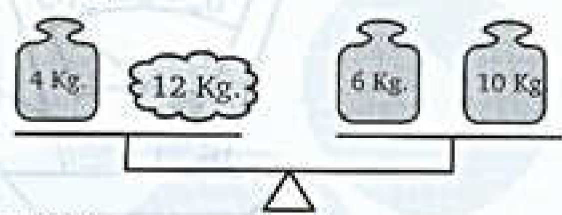
PROBLEMA 13 Se tiene una balanza de dos platillos y tres pesas; una de 4 Kg, otra de 6 Kg y otra de 10 Kg, ¿cuál de los pesos; 8 Kg, 12 Kg, 18 Kg, 20 Kg, 2 Kg no se puede obtener utilizando las pesas en una sola pesada?

Resolución:

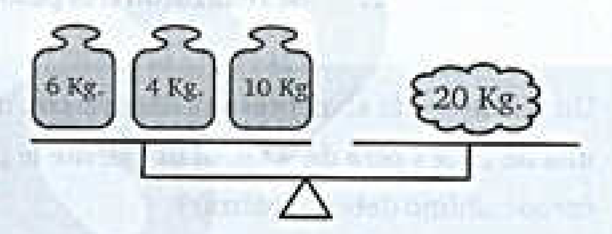
* Se puede obtener 8 Kg.



* Se puede obtener 12 Kg.



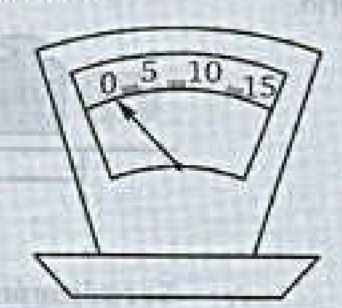
* Se puede obtener 20 Kg.



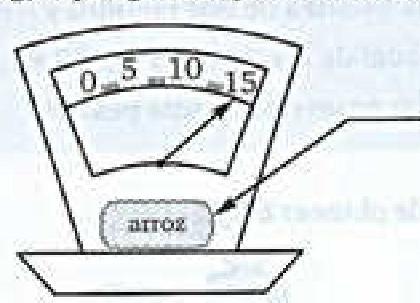
* Se puede obtener 8 Kg.

$\therefore$ No es posible obtener un peso de 18 Kg.

PROBLEMA 14 Se tiene una pesa de 4 Kg y una balanza de un platillo (como se muestra en la figura) que solo indica 5 Kg, 10 Kg, y 15 Kg. Si se quiere pesar 36 Kg, ¿cuántas pesadas como mínimo se necesitan?

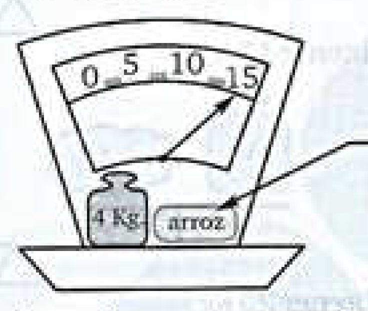


Resolución: Nos piden pesar 36 Kg, supongamos que sean de arroz.



Si la aguja marca 15 Kg significa que ya tenemos 15 Kg de arroz

Repetimos este proceso y ya tenemos 30 Kg de arroz.
Ahora, colocamos la pesa de 4 Kg.

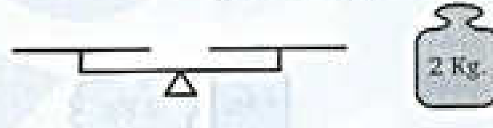


Si la aguja marca 10 Kg significa que tenemos 6 Kg de arroz, con lo cual ya tenemos 36 Kg de arroz.

∴ Se realizaron tres pesadas.

PROBLEMA 15 Un vendedor de abarrotes solo cuenta con una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 2 Kg y otra de 9 Kg. Si un cliente le pide 21 Kg de azúcar, ¿cuántas pesadas como mínimo deberá realizar?

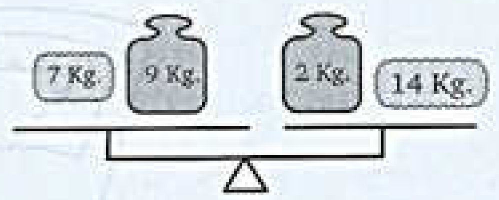
Resolución:



Colocamos una pesa en cada platillo, luego echamos azúcar en el platillo que tiene a la pesa de 2 Kg, hasta lograr el equilibrio (pesos iguales).

Si la balanza está en equilibrio ya tenemos 7 Kg de azúcar.

Ahora colocamos los 7 Kg de azúcar que ya hemos pesado junto a la pesa de 9 Kg en un platillo y la pesa de 2 Kg en el otro platillo y en este echamos azúcar hasta lograr el equilibrio.



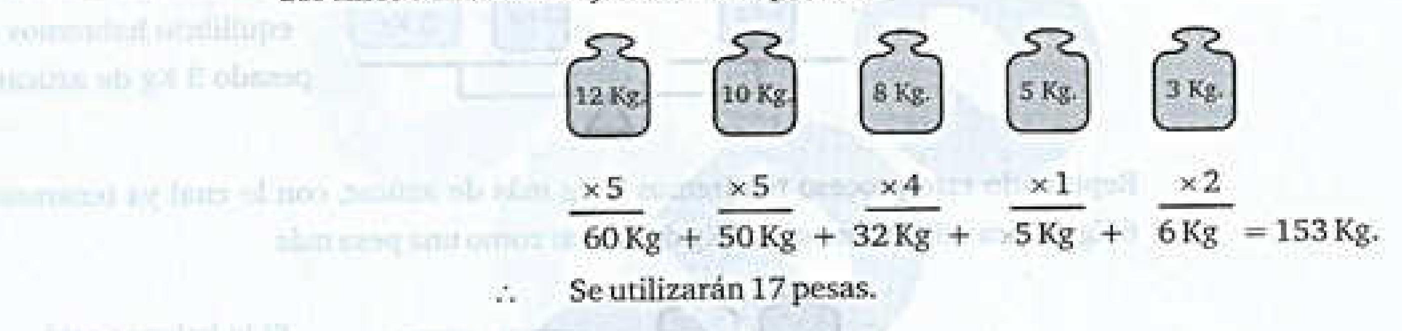
Si la balanza está en equilibrio habremos pesado 14 Kg de azúcar, con lo cual ya tenemos:
$7 + 14 = 21$ Kg.

∴ Se realizarán 2 pesadas.

PROBLEMA 16 Se tiene 5 pesas de cada uno de los siguientes tipos: 12; 10; 8; 5 y 3 Kg. Hallar el menor número de pesas que se deben emplear para obtener 153 Kg utilizando por lo menos una pesa de cada tipo

Resolución:

Solo hay 5 pesas de cada tipo y debemos obtener 153 Kg.
Si queremos utilizar el menor número de pesas, de aquella que tiene el mayor peso debemos utilizar la mayor cantidad posible:



$$\underset{60\text{ Kg}}{\underline{\times 5}} + \underset{50\text{ Kg}}{\underline{\times 5}} + \underset{32\text{ Kg}}{\underline{\times 4}} + \underset{5\text{ Kg}}{\underline{\times 1}} + \underset{6\text{ Kg}}{\underline{\times 2}} = 153\text{ Kg.}$$

$\therefore$ Se utilizarán 17 pesas.

PROBLEMA 17 Se disponen de varias pesas de cinco tipos, cuyos pesos en kilogramos son 2; 5; 7; 11 y 13. ¿Cuál es el menor número de pesas que se necesitan para obtener 215 Kg, si siempre se usa los cinco tipos de pesas?

Resolución: Las pesas son:

Hay varias de cada tipo y debemos obtener 215 Kg.
Si queremos utilizar el menor número de pesas, de aquella que tiene el mayor peso debemos utilizar la mayor cantidad posible:

13 Kg. 11 Kg. 7 Kg. 5 Kg. 2 Kg.

$$\underset{156\text{ Kg}}{\underline{\times 12}} + \underset{33\text{ Kg}}{\underline{\times 3}} + \underset{14\text{ Kg}}{\underline{\times 2}} + \underset{10\text{ Kg}}{\underline{\times 2}} + \underset{2\text{ Kg}}{\underline{\times 1}} = 215\text{ Kg.}$$

$\therefore$ Se utilizarán 20 pesas.

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

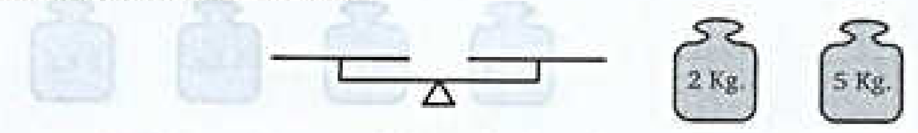
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

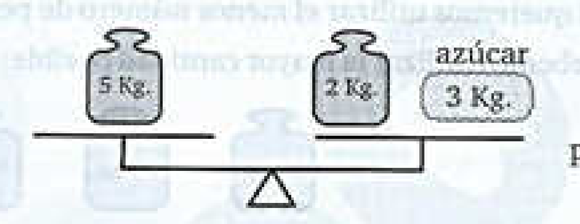
03 de setiembre del 2020

PROBLEMA 18 Un comerciante quiere vender un kilo de azúcar, pero solo cuenta con una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 2 Kg y otra de 5 Kg. ¿Cuántas pesadas como mínimo deberá realizar, si siempre utiliza las dos pesas en cada pesada?

Resolución: El comerciante dispone de:

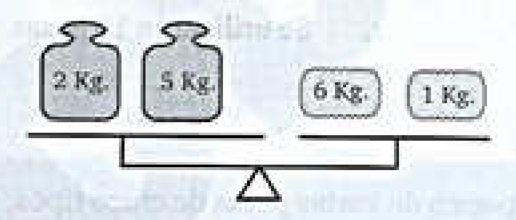


Debemos pesar 1 Kg de azúcar, utilizando las dos pesas en cada pesada



Si la balanza está en equilibrio habremos pesado 3 Kg de azúcar.

Repitiendo este proceso tendremos 3 Kg más de azúcar, con lo cual ya tenemos 6 Kg. Ahora utilizaremos los 6 Kg de azúcar como una pesa más

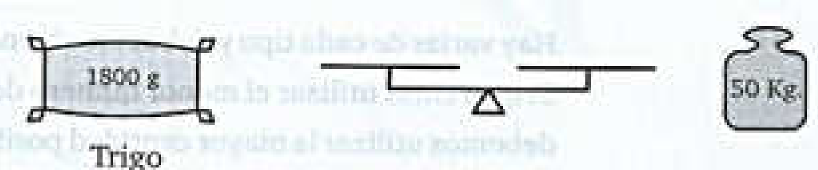


Si la balanza está en equilibrio habremos pesado 1 Kg de azúcar.

∴ Se necesitan 3 pesadas.

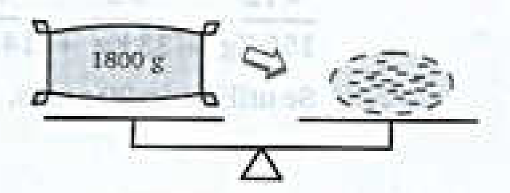
PROBLEMA 19 Un comerciante tiene un saco de trigo que pesa 1800 g. Un cliente le pide 400 g. Si el comerciante cuenta con una balanza de dos platillos y una sola pesa de 50 g, ¿cuántas pesadas como mínimo deberá realizar para cumplir con el pedido?

Resolución: El comerciante dispone de:



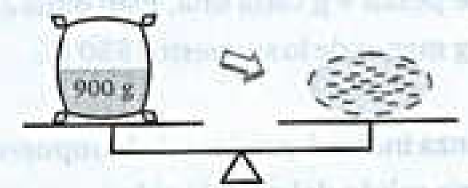
y debe obtener 400 g de trigo.

Coloquemos todo el saco de trigo en uno de los platillos y pasamos trigo hacia el otro platillo hasta lograr el equilibrio



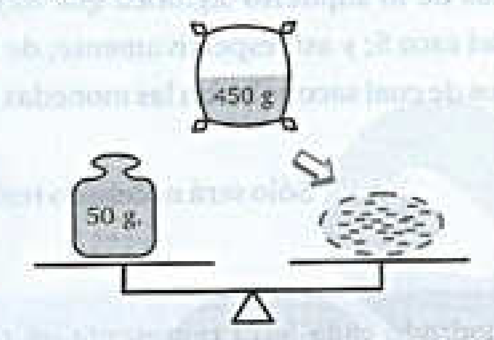
Si la balanza está en equilibrio tenemos 900 g en cada platillo

Ahora en el saco hay 900 g y repetimos el proceso anterior, es decir, colocamos el saco en un platillo y pasamos trigo hacia el otro platillo hasta lograr el equilibrio:



Si la balanza está en equilibrio tenemos 450 g en cada platillo

Ahora en el saco hay 450 g, a continuación colocamos la pesa de 50 g en un platillo y del saco echamos trigo en el otro platillo hasta lograr el equilibrio.



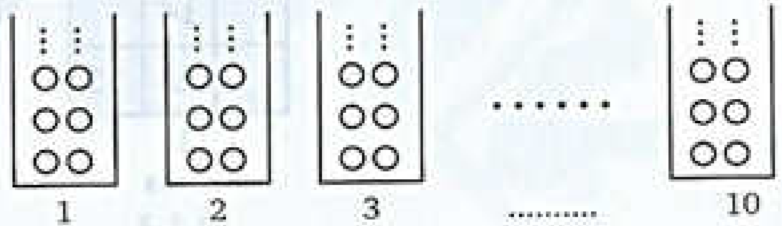
Si la balanza está en equilibrio tendremos 50 g en cada platillo de la derecha.

Ahora en el saco quedan 400 g, que es el pedido del cliente.

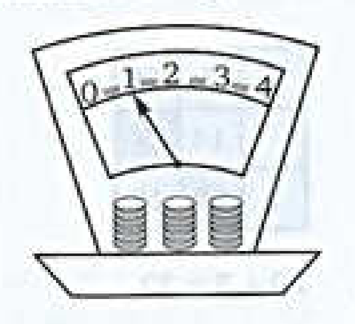
$\therefore$ Se realizan 3 pesadas

PROBLEMA 20 Diez sacos tienen 10 monedas de un sol cada uno. Uno de los sacos contiene monedas falsas que se reconocen porque en lugar de 10 gramos, sólo pesan 9 gramos. ¿Cuántas pesadas como mínimo se debe hacer para saber cuál de los diez sacos tiene monedas falsas, utilizando una balanza de un platillo?

Resolución: Coloquemos los diez sacos en fila y los numeramos del 1 al 10:



A continuación del saco 1 sacamos 1 moneda, del saco 2 sacamos 2 monedas, del saco 3, 3 monedas y así sucesivamente hasta el saco 10 del que sacamos 10 monedas. Con lo cual hemos sacado en total: $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$ monedas. Las colocamos todas en la balanza y observamos el peso que indica la balanza



Para saber cual es el saco que contiene las monedas falsas, partiremos de un supuesto. Si todas las monedas pesarán 10 g, la balanza indicaría $55 \times 10\ g = 550\ g$

Pero como sabemos algunas son falsas, puede haber desde una hasta 10 monedas falsas que pesan 9 g cada una. Esto quiere decir que la balanza indicará desde 1 g hasta 10 g menos de lo supuesto (550 g).

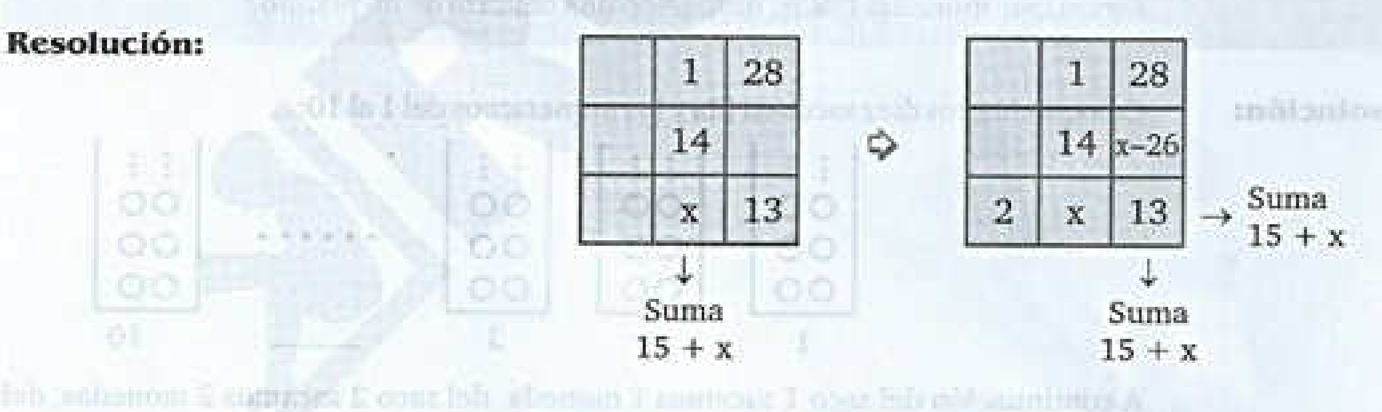
Si la balanza indica 1 g menos de lo supuesto significa que hay una moneda falsa, la cual habría salido del saco 1; si balanza indica 2 g menos de lo supuesto significa que hay 2 monedas falsas, las cuales habrían salido del saco 2; si la balanza indica 5g menos de lo supuesto significa que hay 5 monedas falsas, las cuales habrían salido del saco 5; y así respectivamente; de acuerdo al peso que indique la balanza sabremos de cual saco salieron las monedas falsas.

∴ Sólo será necesario realizar una pesada.

PROBLEMA 21 En el cuadrado cada letra representa un número, la suma de los números que aparecen en cada fila, columna y diagonal es constante. Hallar x + y.

a	1	28
b	14	y
c	x	13

Resolución:



En la diagonal que está completa:

$$2 + 14 + 28 = 15 + x$$

$$x = 29$$

	1	28
	14	3
2	29	13

∴ 29 + 3 = 32

PROBLEMA 22 Se tiene una balanza de dos platillos y pesas de 1gr, 3gr, 3^2gr, 3^3gr, 3^4gr, 3^5gr, 3^6gr y 3^7gr, una de cada tipo. ¿Cuántas de ellas se deben usar como mínimo para pesar un objeto de 1511 gr, pudiendo colocar las pesas en ambos platillos de la balanza?

Resolución:

$$\underbrace{1511 \quad \underset{729}{3^6} \quad \underset{27}{3^3} \quad 1}_{\text{Total} = 2268} = \underbrace{\underset{2187}{3^7} \quad \underset{81}{3^4}}_{\text{Total} = 2268}$$

∴ Se deben usar 5 pesas.

PROBLEMA 23 Para pesar 100 Kg de azúcar se utilizaron pesas de 4 Kg, Kg y 6 Kg. ¿Cuál fue el máximo número de pesas que se usaron, si se utilizan los tres tipos de pesas?

Resolución: Si queremos utilizar el máximo número de pesas, de la que pesa 4 Kg (la que pesa menos) debemos usar la mayor cantidad posible.

$$21\,(4\,\text{Kg}) + 2\,(5\,\text{Kg}) + 1\,(6\,\text{Kg}) = 100\,\text{Kg}.$$

∴ Se utilizan: $21 + 2 + 1 = 24$ pesas.

PROBLEMA 24 Si se tiene una balanza de dos platillos y tres pesas, una de 2 Kg, otra de 3 Kg y otra de 8 Kg, ¿cuál de las siguientes masas no se pueden medir de una sola pesada?

I. 9 Kg. II. 4 Kg. III. 1 Kg. IV. 6 Kg V. 7 Kg.

Resolución: Indicaremos las que si se puede medir

$$3\,\text{Kg} + 8\,\text{Kg} = 2\,\text{Kg} + \boxed{9\,\text{Kg}}$$

$$3\,\text{Kg} = 2\,\text{Kg} + \boxed{1\,\text{Kg}}$$

$$8\,\text{Kg} = 2\,\text{Kg} + \boxed{6\,\text{Kg}}$$

$$8\,\text{Kg} + 2\,\text{Kg} = 3\,\text{Kg} + \boxed{7\,\text{Kg}}$$

La que no se puede medir es la de 4 Kg.

∴ Sólo II.

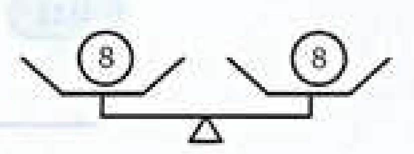
PROBLEMA 25 Tenemos 24 monedas aparentemente iguales, pero sólo una de ellas es ligeramente más liviana que las otras 23 restantes. Si se tiene una balanza de dos platillos. ¿Cuántas veces se tendrá que utilizar la balanza, como mínimo, para saber con seguridad cual es la moneda más liviana?

Resolución:

NOTA "S"

* Recuerda formar grupos homogéneos
* Recuerda buscar la estrategia para obtener el menor número de pesadas.

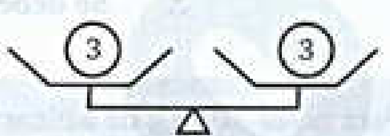
Primera Pesada



8

* La más liviana estará en un grupo de 8.

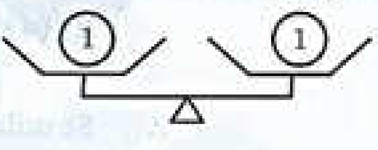
Segunda Pesada



2

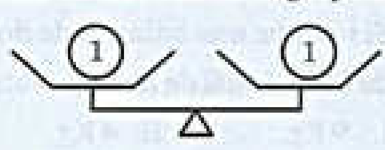
(No conviene formar grupos de 4 ya que obtendríamos en total 4 pesadas).

* Si la más liviana está en un grupo de 3



Tercera Pesada

* Si la más liviana está en el grupo de 2.



Sea cualquiera el caso, la moneda más liviana será identificada.

$\therefore$ Número de pesadas mínima $= 3$

MÉTODO "S"

Utilicemos : $x \leq 3^{ⓝ}$

$24 \leq 3^{③}$

n: Mínimo número de pesadas.

x: total de objetos

$\therefore$ Mínimo número de pesadas es 3.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura escriba un número en cada casilla en blanco, de tal modo que se obtenga un cuadrado mágico multiplicativo, es decir, el producto de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal sea el mismo. ¿Qué número irá en la casilla sombreada?

		4
16		8

A) 8
B) 16
C) 64
D) 128
E) 256

2. Un cuadrado mágico multiplicativo es aquel en el cual el producto de los números en cada fila, columna y diagonal es el mismo. Complete el siguiente cuadrado para que sea un cuadrado mágico multiplicativo y dé como respuesta el valor de x.

5		x
4		
	1	

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

3. Ubique los números pares del 12 al 88 en un cuadrado de 6×6 casillas, de manera que se obtenga un cuadrado mágico. Calcule el valor de la constante mágica.

A) 240 B) 252 C) 282
D) 294 E) 280

4. Coloque los números del 1 al 9 en los casilleros del siguiente cuadrado, para que se obtenga un cuadrado mágico. Dé como respuesta el mayor valor de: x + y + z

	y	
x		z

A) 11
B) 13
C) 17
D) 19
E) 20

5. Coloque los números del 1 al 16 en el siguiente cuadrado para que se obtenga un cuadrado mágico. Calcule el valor de:
A + B + C + D

A			B
D			C

A) 30
B) 32
C) 34
D) 36
E) 38

6. Ubique los números 1, 2, 3, ..., 9 en los casilleros de la figura, de modo que el 9 ocupe el centro, los números de la primera fila sean todos impares y la suma de los números de cada fila y de cada columna sea la misma. Dé como respuesta la suma de los números que irán a los vértices.

A) 20
B) 22
C) 24
D) 26
E) 28

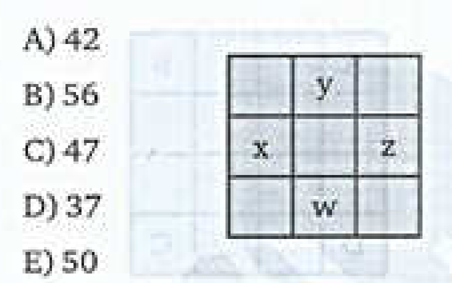
7. En el siguiente gráfico se muestran fichas numeradas del 1 al 9. ¿Cuántas fichas como mínimo se deben cambiar de lugar, para que la suma de los números en cada fila, columna y diagonal sea la misma?

6	8	1
7	3	5
2	4	9

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

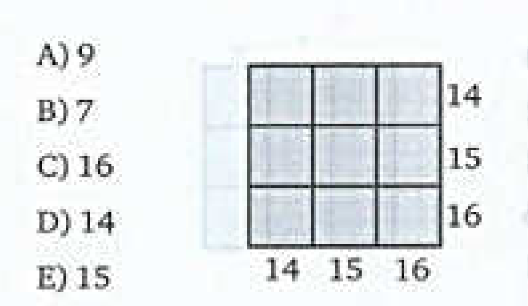
8. Los números: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 se distribuyen en el siguiente cuadrado, de tal modo que se obtenga un cuadrado mágico.
Halle: $x + y + z + w$

A) 42
B) 56
C) 47
D) 37
E) 50



9. Distribuir en los casilleros del cuadrado los números del 1 al 9, de tal manera que la suma de los números en cada fila y en cada diagonal sea el valor que aparece al costado o debajo de cada fila o columna respectivamente. Dar como respuesta: $a + b + c$

A) 9
B) 7
C) 16
D) 14
E) 15



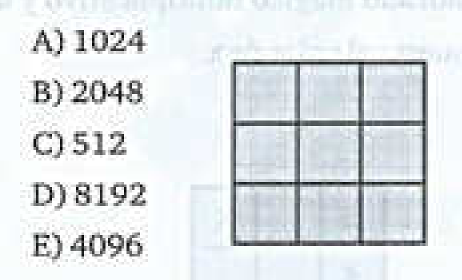
10. En el tablero de la figura quedan casillas vacías. Escriba en cada una un número distinto de cero, de modo que, una vez completo el tablero sea un cuadrado mágico multiplicativo, es decir, al multiplicar los 3 números de cada línea (horizontal, vertical o diagonal) se obtiene el mismo valor. Dar como respuesta el número que irá en la casilla sombreada.

A) 9
B) 35
C) 60
D) 70
E) 75

(sombreada)	9	5
1		

11. En el siguiente gráfico distribuir los números 1, 2, 4, 8, 16, ..., 256, tal que el producto de los números ubicado en cada fila, columna y diagonal sea el mismo.
Hallar el valor de dicho producto.

A) 1024
B) 2048
C) 512
D) 8192
E) 4096



12. En el siguiente gráfico distribuya los números 1, 2, 3, ..., 8, 9, de tal forma que se obtenga un cuadrado mágico. Dar como respuesta el mayor valor de "y".

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 4

	2x	
	x	y

13. En el siguiente cuadrado, ubique los 9 primeros múltiplos positivos de 3, de tal manera que sea un cuadrado mágico.

Calcule el valor de w + x + y + z

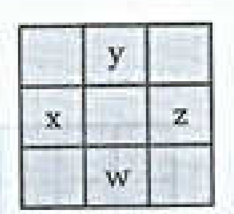
A) 30

B) 45

C) 60

D) 48

E) 54



14. En el siguiente cuadrado, es un cuadrado mágico en el que se ha colocado números consecutivos. Calcule la suma de los números que irán en los casilleros marcados.

A) 58

B) 56

C) 54

D) 60

E) 50

		2x−1
	x+3	
		x

15. Si el siguiente cuadrado mágico se ha construido con números consecutivos y la constante mágica es 85, calcule el valor de: a + b + c + d.

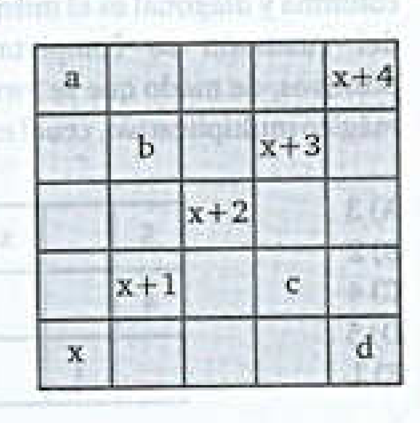
A) 60

B) 66

C) 70

D) 65

E) 68



16. La siguiente figura es un cuadrado mágico donde se han colocado los números del 1 al 16. Calcule X + Y.

A) 15

B) 16

C) 27

D) 23

E) 24

13	X		1
		6	Y
	5	9	4

17. Del conjunto: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} tome 9 números y colóquelos en la cuadricula de abajo, de modo que:

* La suma de los números de la segunda y tercera fila sean, respectivamente, el doble y el triple de la suma de los números de la primera fila.
* Las sumas de los números de la segunda y tercera columna sean, respectivamente el doble y el triple de la suma de los números de la primera columna.

¿Cuál es la suma de los números que irán en los vértices? Dar como respuesta la mayor suma posible.

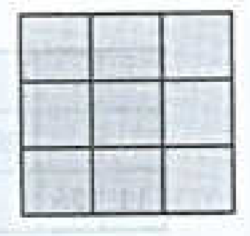
A) 13

B) 15

C) 16

D) 18

E) 20



18. Con los números 80, 60, 60, 50, 70, 100, 100, 110 y 90 rellenar los nueve cuadrados vacíos de forma que la horizontal central, la vertical central y las dos diagonales principales sumen 400. ¿Qué número debe ir en el casillero central?

A) 50
B) 60
C) 80
D) 90
E) 100

90	50	130	30	100
0				100
110				50
140				80
60	80	30	160	70

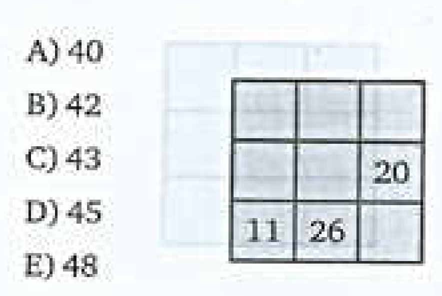
19. En cada casilla del siguiente tablero se debe colocar uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, de modo que en cada fila, columna y diagonal figuren los cinco números.

Calcule la suma de los números que irán en las casillas sombreadas. Dar como respuesta el mayor valor de dicha suma.

A) 20
B) 17
C) 19
D) 16
E) 15

20. Complete el siguiente cuadrado mágico y dé como respuesta el valor de la constante mágica.

A) 40
B) 42
C) 43
D) 45
E) 48



		20
11	26	

21. En las casillas del siguiente cuadrado coloque números enteros positivos y diferentes; de tal modo que resulte un cuadrado mágico multiplicativo, es decir, el producto en cada fila, columna y diagonal sea el mismo. Dar como respuesta el menor valor de dicho producto.

A) 36
B) 72
C) 108
D) 144
E) 216

22. Coloque los números del 1 al 7 en las casillas vacías, de modo que cada dígito aparezca exactamente una vez en cada fila, columna, región delimitada y conjunto de casillas sombreadas. Dé como respuesta la suma de los valores correspondientes a x, y, z.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

			4			5
	2					
				7	3	
		1	y		5	
1			3	4		
	x	5			2	
					1	z

23. Un cuadrado mágico multiplicativo es tal que el producto de los números de cada fila, columna y diagonal es el mismo. Si las casillas del cuadrado se completan con enteros positivos, de modo que se forma un cuadrado mágico multiplicativo, ¿cuál es el valor de x?

A) 3
B) 2
C) 4
D) 5
E) 1

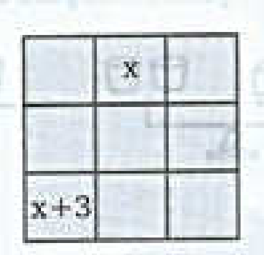
5		x
4		
	1	

24. Complete el recuadro con números enteros, tal que la suma en cualquier fila, columna y diagonal sea la misma. Dé como respuesta el producto de los valores de a y b

19		3
a	13	
		b

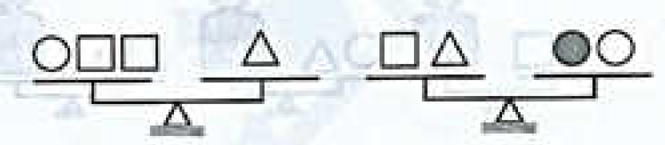
A) 21 B) – 21 C) 24
D) – 28 E) – 14

25. En las casillas ubique los números 3, 6, 9, 18, 21, 24, 33, 36, 39, de tal modo que sea un cuadrado mágico. Indique el valor de "x".

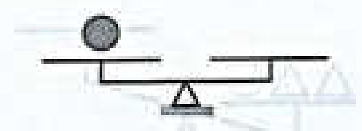


A) 3
B) 6
C) 21
D) 33
E) 24

26. Si las balanzas mostradas están en equilibrio y los objetos diferentes tienen pesas diferentes.



La siguiente balanza:



Se equilibra con:

A) □ □ B) △ □ ○ C) △ △ △
D) ○ □ E) □ □ □

27. Un comerciante dispone de una balanza de un solo platillo, que solo puede pesar 3, 6, 9 ó 12 Kg exactamente. Si además tiene una pesa de 2 Kg, ¿cuántas veces como mínimo tendrá que utilizar la balanza para pesar exactamente 44 Kg de azúcar?

A) 3 B) 5 C) 6
D) 4 E) 7

28. ¿Cuántas fichas debes cambiar de lugar como mínimo para lograr que los números de las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales presenten la misma suma? Dato: las fichas 2; 6 y 14 no pueden cambiar de lugar

14	12	4
10	2	18
6	16	8

A) 6
B) 3
C) 2
D) 4
E) 1

29. Se dispone de varias pesas de 5 tipos, cuyos pesos en gramos son: 30, 50, 70, 110 y 130. ¿Cuál es el menor número de pesas que se necesitan para obtener 1450 g, si siempre usa los 5 tipos de pesas?

A) 15 B) 14 C) 13
D) 16 E) 17

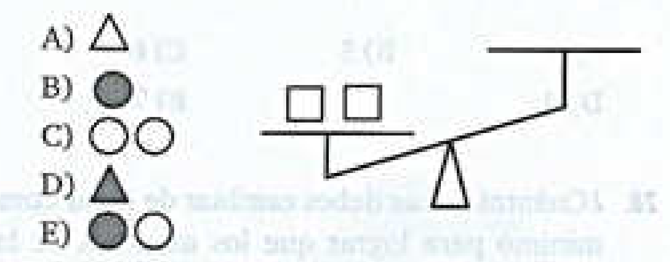
30. En la balanza mostrada, el peso de dos canicas negras es igual al peso de tres canicas blancas. Para equilibrar la balanza, ¿cuántas canicas negras deben trasladarse del platillo N al platillo M?

M N

A) 4
B) 3
C) 2
D) 5
E) 6

31. Si las balanzas mostradas están en equilibrio

y los objetos diferentes tienen pesos diferentes, entonces, con que se equilibra la siguiente balanza.



32. De un saco de arroz que pesa 96 Kg se quiere separar exactamente 28,5 Kg de arroz. Si sólo se cuenta con una balanza de dos platillos, ¿cuántas pesadas como mínimo se deben realizar para lograr el objetivo?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

33. Un comerciante de tubérculos dispone de una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 4 Kg y otra de 9 Kg. Si un cliente le pide 1 Kg de papa, ¿cuántas pesadas como mínimo deberá realizar?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

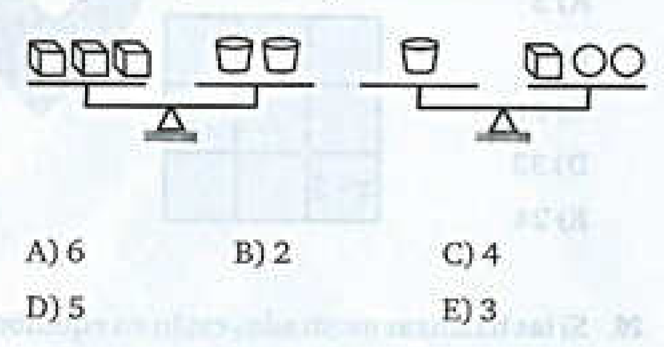
34. Un comerciante de abarrotes dispone de una balanza de dos platillos y dos pesas, una de 1 Kg, y otra de 5 Kg. Si un cliente le pide 2 Kg de arroz, ¿cuántas pesadas como mínimo debe realizar, utilizando siempre las dos pesas en cada pesada?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

35. Un comerciante dispone de una balanza de dos platillos y tres pesas, una de 1 Kg, otra de 3 Kg y otra de 7 Kg. Si quiere vender 1 Kg de arroz, ¿cuántas pesadas como mínimo deberá realizar, si debe utilizar las tres pesas en cada pesada?

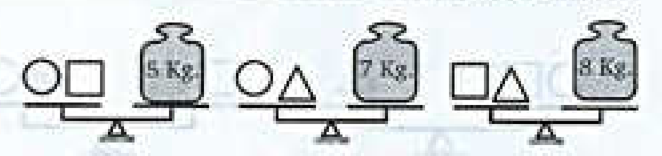
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

36. En las balanzas mostradas, tres dados pesan lo mismo que dos vasos, mientras que el peso de un vaso es igual al de un dado y dos canicas juntas. ¿Cuántas canicas se necesitan para equilibrar el peso de un dado?

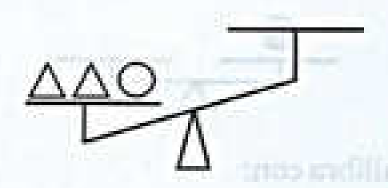


A) 6 B) 2 C) 4
D) 5 E) 3

37. Si las balanzas mostradas están en equilibrio



La siguiente balanza:



se equilibra con una pesa de:

A) 11 Kg B) 10 Kg C) 9 Kg
D) 12 Kg E) 13 Kg

A todo el público en general:

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

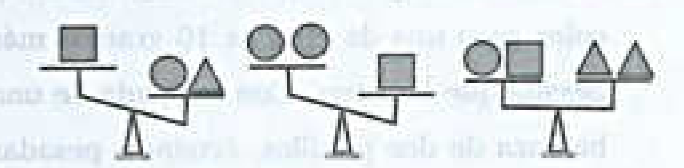
Este libro no debe ser prostituito monetariamente, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el GRUPO CALAPENSHKO

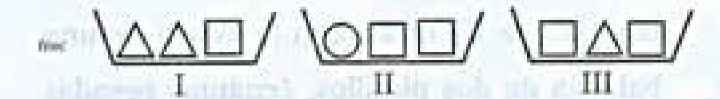
03 de setiembre del 2020

38. De los gráficos se deduce que:



A) ▲ pesa menos que ●
B) ■ pesa más que ▲
C) ● pesa más que ■
D) ▲ pesa más que ■
E) ■ pesa menos que ● ●

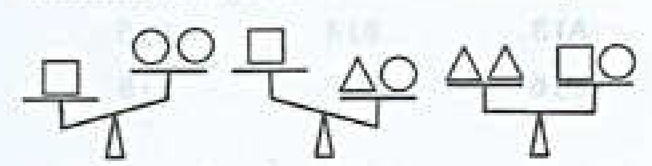
39. Se ordena de manera creciente, según su peso, las tres cestas I, II y III.



y se tiene la cesta IV \△○□/ ; para mantener el orden creciente, la cesta IV deberá ubicarse:

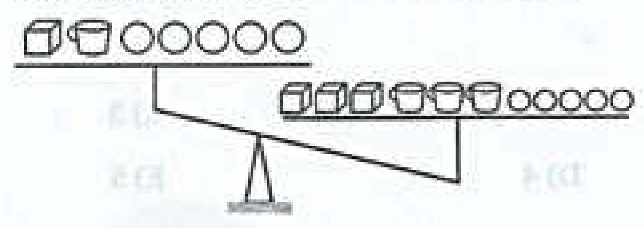
A) Entre I y II
B) Entre II y III
C) III, IV tienen el mismo peso.
D) Antes de I
E) Después de III

40. En las balanzas mostradas, las figuras geométricas iguales tienen igual peso y las figuras geométricas diferentes tienen pesos diferentes, entonces es válido afirmar que:



A) □ pesa más que △
B) □ pesa menos que ○
C) △ pesa menos que ○
D) △ pesa más que ○ ○
E) △ pesa más que □

41. En la balanza mostrada, hay dados, tazas y bolitas. El peso de dos dados es igual al peso de 3 bolitas y el peso de 3 tazas es igual al peso de 5 bolitas. Para equilibrar la balanza, ¿cuántas bolitas deben trasladarse del platillo M al platillo N?

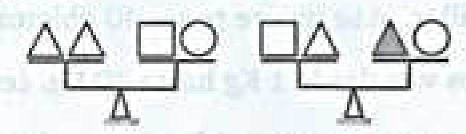


A) 3   B) 2   C) 4
D) 5   E) 1

42. Se dispone de balanza de dos brazos, una pesa de 50 g y 1 Kg de azúcar. ¿En cuántas pesadas como mínimo se logrará obtener 300 g de azúcar?

A) 7   B) 6   C) 5
D) 4   E) 3

43. Las figuras muestran dos balanzas con objetos que están en equilibrio.



Entonces el peso de □□□ equivale al peso de:

A) ▲▲△   B) ▲▲○   C) ▲▲▲
D) ▲○○   E) △△○

44. Para pesar 92 Kg de arroz se utilizaron pesas de 4 Kg, 5 Kg y 6 Kg, ¿cuál fue el máximo número de pesas que se usaron si se utilizaron los tres tipos de pesas?

A) 24   B) 20   C) 23
D) 19   E) 22

45. Un comerciante quiere pesar 21 Kg de azúcar pero solo cuenta con una balanza de dos platillos y 3 pesas, una de 1 Kg, otra de 3 Kg y otra de 7 Kg. ¿Cuántas pesadas como mínimo realizará?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

46. Un comerciante quiere pesar 1 Kg de papa pero solo cuenta con una balanza de dos platillos y 3 pesas, una de 2 Kg, otra de 3 Kg y otra de 9 Kg. ¿Cuántas pesadas como mínimo realizará?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

47. Un comerciante tiene una balanza de dos platillos, si se quiere pesar 40 objetos cuyos pesos van desde 1 Kg hasta 40 Kg. ¿cuántas pesas, cuyos pesos están expresados en Kg, se necesitarán como mínimo?

A) 3 B) 4 C) 6
D) 9 E) 10

48. Se tiene 9 bolas de billar de igual tamaño y color pero una de ellas es 10 gramos más pesada que las otras. Con la ayuda de una balanza de dos platillos, ¿cuántas pesadas como mínimo serán necesarias para determinar cuál es la bola más pesada?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

49. Se tienen 36 bolas de billar idénticas en color y tamaño pero una de ellas es más pesada que las otras, con la ayuda de una balanza de dos platillos, ¿cuántas pesadas como mínimo se deberán realizar para encontrar a la bola más pesada?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

50. Se tienen 243 bolas de billar de igual color y tamaño pero una de ellas es más pesada que el resto. Con la ayuda de una balanza de dos platillos, ¿cuántas pesadas como mínimo serán necesarias para identificar a la bola más pesada?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

team CALAPENSHKO

BIBLIOGRAFÍA

- ÁLGEBRA UNIVERSITARIA – Swo Kowski
- AL MARGEN DE LA CLASE – Rodriguez Annoni
- ÁLGEBRA PREUNIVERSITARIA – Eduardo Espinoza Ramos
- ARITMÉTICA – Editorial Lumbreras
- CURIOSIDADES MATEMÁTICAS – Bernabé Flores
- COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS – G. Polya
- CURSO DE CÁLCULO RÁPIDO – D. Kleppner y Norman Ramsey
- CIEN PREGUNTAS BÁSICAS SOBRE LA CIENCIA – Isaac Asimov
- EL ESCARABAJO SAGRADO – Martín Gardner
- GEOMETRÍA Y EXPERIENCIAS – García
- INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA – Helmut Jeiffert
- INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO – Charles D. Miller y Vern Heren
- INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA – Irving Copi
- INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA Y AL RAZONAMIENTO LÓGICO – Carlos Lázaro Arroyo
- INTRODUCCIÓN Y MÉTODOS DE PROBABILIDAD – Alberto Ruiz Moncayo
- JUEGOS PARA DEVANARSE LOS SESOS – Eric Emmet
- JUEGOS DE INGENIO – Michael Holt
- JUEGOS LÓGICOS VERBALES – CEPREPUC
- MATEMÁTICAS (BACHILLERATO ESPAÑOL) – Juan Vilar Vilar
- MANUAL DE LÓGICA PARA ESTUDIANTES DE LÓGICA – Gonzalo Zubieta Russi
- MATEMÁTICA DISCRETA Y COMBINATORIA – Grimaldi
- OLIMPIADAS MATEMÁTICAS SIGMA – Colección Algoritmo
- TEORÍA DE LOS NÚMEROS – Antony – Pettofrezzo
- TEORÍA Y APLICACIONES DE LOS GRAFOS – Oystein Ore
- TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES – G. Dorofeiev y N. Rozov
- LA HEURÍSTICA, CIENCIA DEL PENSAMIENTO CREADOR – V. N. Pushkin
- EL JUEGO DE LA LÓGICA Y OTROS ESCRITOS – Lewis Carroll
- DICCIONARIO DE MATEMÁTICAS – Grupo Editorial Norma

team CALAPENSHKO

CLAVES

twitter.com/calapenshko

CAPITULO 1

1	A	26	D
2	B	27	E
3	C	28	A
4	C	29	D
5	B	30	E
6	A	31	D
7	C	32	D
8	B	33	C
9	E	34	D
10	E	35	B
11	C	36	A
12	B	37	A
13	A	38	A
14	A	39	C
15	C	40	B
16	D	41	B
17	D	42	C
18	C	43	A
19	E	44	D
20	C	45	C
21	D	46	B
22	C	47	B
23	B	48	C
24	B	49	D
25	B	50	C

CAPITULO 2

1	B	26	C
2	A	27	B
3	A	28	C
4	B	29	D
5	A	30	A
6	D	31	C
7	A	32	D
8	A	33	E
9	E	34	B
10	B	35	E
11	E	36	D
12	A	37	D
13	C	38	A
14	D	39	E
15	D	40	C
16	A	41	B
17	A	42	A
18	C	43	D
19	D	44	C
20	A	45	C
21	D	46	D
22	D	47	E
23	A	48	B
24	B	49	D
25	D	50	A

CAPITULO 3

1	D	26	B
2	E	27	A
3	D	28	C
4	C	29	D
5	C	30	A
6	E	31	A
7	D	32	A
8	C	33	B
9	B	34	C
10	E	35	B
11	D	36	B
12	E	37	D
13	E	38	C
14	C	39	E
15	D	40	D
16	C	41	C
17	B	42	C
18	B	43	C
19	C	44	C
20	C	45	C
21	D	46	B
22	C	47	D
23	B	48	B
24	C	49	B
25	A	50	B

CAPITULO 4

1	E	26	B
2	B	27	E
3	B	28	D
4	C	29	C
5	D	30	A
6	D	31	B
7	B	32	C
8	A	33	D
9	D	34	E
10	E	35	B
11	C	36	A
12	B	37	B
13	A	38	D
14	A	39	B
15	C	40	B
16	D	41	A
17	A	42	A
18	B	43	A
19	D	44	D
20	B	45	A
21	E	46	C
22	C	47	A
23	D	48	A
24	E	49	A
25	C	50	D

CAPITULO 5

1	E	26	D
2	B	27	B
3	D	28	D
4	A	29	D
5	E	30	B
6	C	31	C
7	C	32	B
8	E	33	C
9	A	34	D
10	E	35	E
11	D	36	C
12	C	37	A
13	E	38	B
14	C	39	E
15	C	40	D
16	A	41	A
17	B	42	B
18	C	43	B
19	C	44	B
20	B	45	C
21	A	46	C
22	D	47	E
23	D	48	E
24	D	49	A
25	E	50	A

CAPITULO 6

1	B	26	C
2	A	27	B
3	C	28	D
4	D	29	B
5	D	30	A
6	A	31	A
7	D	32	E
8	E	33	A
9	D	34	D
10	C	35	B
11	D	36	A
12	B	37	B
13	C	38	E
14	D	39	C
15	D	40	C
16	B	41	B
17	A	42	C
18	D	43	B
19	E	44	E
20	C	45	D
21	C	46	B
22	E	47	A
23	B	48	E
24	D	49	B
25	B	50	A

CAPITULO 7

1	A	26	D
2	D	27	A
3	C	28	B
4	B	29	C
5	B	30	C
6	B	31	A
7	B	32	E
8	B	33	D
9	E	34	A
10	B	35	D
11	C	36	A
12	E	37	E
13	A	38	C
14	C	39	D
15	B	40	A
16	A	41	A
17	B	42	B
18	C	43	A
19	C	44	B
20	A	45	A
21	A	46	A
22	C	47	B
23	A	48	A
24	C	49	D
25	D	50	C

CAPITULO 8

1	E	26	D
2	C	27	B
3	C	28	C
4	B	29	B
5	A	30	E
6	A	31	B
7	D	32	D
8	D	33	D
9	C	34	B
10	A	35	D
11	C	36	B
12	B	37	D
13	A	38	A
14	B	39	A
15	B	40	A
16	B	41	D
17	B	42	C
18	C	43	C
19	E	44	D
20	A	45	D
21	D	46	E
22	B	47	E
23	A	48	C
24	D	49	A
25	C	50	E

CAPITULO 9

1	A	26	A
2	A	27	C
3	B	28	E
4	A	29	C
5	B	30	D
6	B	31	B
7	B	32	A
8	C	33	C
9	A	34	C
10	C	35	D
11	C	36	C
12	C	37	C
13	A	38	C
14	D	39	B
15	B	40	D
16	A	41	D
17	E	42	C
18	C	43	B
19	C	44	C
20	C	45	D
21	C	46	C
22	D	47	E
23	B	48	C
24	A	49	A
25	D	50	B

CAPITULO 10

1	E	26	E
2	E	27	D
3	B	28	D
4	B	29	C
5	A	30	D
6	E	31	C
7	A	32	A
8	A	33	E
9	D	34	B
10	E	35	C
11	E	36	C
12	E	37	D
13	E	38	C
14	E	39	A
15	E	40	C
16	E	41	C
17	E	42	C
18	A	43	D
19	A	44	D
20	C	45	C
21	D	46	A
22	A	47	B
23	A	48	D
24	D	49	A
25	E	50	B

team CALAPENSHKO

twitter.com/calapenshko

CAPITULO 11

1	D	26	A
2	D	27	B
3	D	28	B
4	D	29	B
5	B	30	B
6	B	31	D
7	E	32	C
8	C	33	E
9	E	34	E
10	B	35	C
11	C	36	E
12	A	37	C
13	B	38	A
14	C	39	B
15	A	40	E
16	E	41	C
17	C	42	A
18	A	43	D
19	D	44	C
20	D	45	B
21	A	46	C
22	C	47	A
23	A	48	C
24	B	49	A
25	C	50	A

CAPITULO 12

1	B	26	B
2	E	27	A
3	A	28	A
4	B	29	A
5	E	30	D
6	A	31	A
7	B	32	D
8	C	33	C
9	B	34	E
10	D	35	E
11	C	36	C
12	C	37	A
13	A	38	D
14	C	39	C
15	C	40	D
16	E	41	A
17	A	42	A
18	C	43	E
19	A	44	C
20	C	45	A
21	A	46	C
22	A	47	D
23	B	48	A
24	B	49	D
25	B	50	A

CAPITULO 13

1	C	26	B
2	A	27	C
3	E	28	C
4	D	29	B
5	E	30	D
6	B	31	D
7	E	32	D
8	B	33	B
9	A	34	D
10	B	35	D
11	C	36	A
12	B	37	A
13	C	38	C
14	C	39	A
15	B	40	C
16	B	41	A
17	E	42	E
18	E	43	E
19	C	44	A
20	D	45	E
21	E	46	B
22	A	47	B
23	E	48	D
24	A	49	D
25	A	50	A

CAPITULO 14

1	E	26	C
2	E	27	C
3	B	28	D
4	D	29	B
5	A	30	A
6	B	31	D
7	A	32	B
8	C	33	A
9	D	34	B
10	B	35	D
11	B	36	E
12	D	37	E
13	B	38	A
14	D	39	E
15	D	40	C
16	C	41	B
17	B	42	A
18	E	43	B
19	A	44	A
20	E	45	B
21	E	46	D
22	A	47	B
23	C	48	D
24	A	49	C
25	B	50	A

CAPITULO 15

1	C	26	C
2	B	27	B
3	A	28	C
4	A	29	C
5	C	30	B
6	D	31	C
7	A	32	A
8	A	33	B
9	A	34	A
10	A	35	C
11	A	36	E
12	B	37	B
13	D	38	E
14	B	39	E
15	E	40	B
16	E	41	B
17	E	42	B
18	C	43	D
19	A	44	C
20	D	45	B
21	D	46	C
22	C	47	B
23	B	48	B
24	C	49	C
25	D	50	B

CAPITULO 16

1	A	26	A
2	C	27	D
3	B	28	C
4	C	29	D
5	D	30	A
6	D	31	A
7	A		
8	E		
9	A		
10	C		
11	B		
12	C		
13	A		
14	D		
15	C		
16	C		
17	B		
18	D		
19	E		
20	B		
21	A		
22	B		
23			
24	B		
25	D		

CAPITULO 17

1	A	26	A
2	D	27	C
3	D	28	C
4	B	29	E
5	D	30	C
6	E	31	E
7	B	32	B
8	C	33	D
9	E	34	A
10	B	35	B
11	C	36	B
12	C	37	B
13	C	38	D
14	A	39	E
15	D	40	B
16	C	41	B
17	B	42	E
18	D	43	C
19	E	44	C
20	C	45	B
21	E	46	C
22	E	47	A
23	B	48	D
24	D	49	E
25	B	50	A

CAPITULO 18

1	C	26	C
2	A	27	D
3	D	28	E
4	C	29	D
5	A	30	E
6	E	31	A
7	C	32	A
8	B	33	D
9	D	34	D
10	B	35	A
11	D	36	C
12	D	37	B
13	C	38	A
14	D	39	A
15	E	40	B
16	B	41	B
17	A	42	E
18	C	43	A
19	B	44	D
20	E	45	B
21	E	46	D
22	A	47	B
23	A	48	B
24	A	49	D
25	B	50	A

CAPITULO 19

1	D	26	C
2	E	27	B
3	D	28	B
4	C	29	A
5	E	30	E
6	C	31	B
7	B	32	D
8	A	33	C
9	A	34	C
10	E	35	C
11	A	36	B
12	C	37	A
13	E	38	A
14	C	39	D
15	B	40	C
16	A	41	C
17	D	42	D
18	D	43	B
19	D	44	B
20	B	45	B
21	B	46	E
22	B	47	D
23	C	48	B
24	C	49	D
25	A	50	B

CAPITULO 20

1	E	26	B
2	A	27	B
3	C	28	E
4	D	29	D
5	B	30	A
6	D	31	E
7	D	32	A
8	E	33	A
9	C	34	D
10	B	35	B
11	E	36	E
12	A	37	D
13	C	38	C
14	A	39	A
15	C	40	D
16	E	41	D
17	D	42	B
18	C	43	B
19	D	44	C
20	D	45	A
21	B	46	B
22	B	47	B
23	D	48	B
24	C	49	C
25	A	50	E

CAPITULO 21

1	E	26	C
2	A	27	C
3	D	28	E
4	D	29	C
5	C	30	C
6	D	31	C
7	C	32	A
8	B	33	D
9	A	34	B
10	B	35	C
11	C	36	C
12	C	37	C
13	C	38	E
14	D	39	E
15	A	40	D
16	D	41	A
17	A	42	C
18	C	43	B
19	D	44	A
20	A	45	C
21	C	46	E
22	C	47	B
23	E	48	A
24	D	49	D
25	D	50	D

CAPITULO 22

1	D	26	C
2	A	27	E
3	C	28	B
4	B	29	A
5	C	30	B
6	A	31	E
7	D	32	B
8	A	33	A
9	D	34	B
10	C	35	B
11	D	36	C
12	B	37	C
13	C	38	D
14	A	39	B
15	D	40	C
16	C	41	B
17	B	42	A
18	D	43	D
19	C	44	A
20	C	45	A
21	C	46	D
22	C	47	C
23	A	48	E
24	D	49	D
25	D	50	D

CAPITULO 23

1	E	26	D
2	C	27	E
3	B	28	E
4	B	29	B
5	E	30	A
6	E	31	B
7	B	32	D
8	E	33	E
9	C	34	B
10	A	35	A
11	C	36	B
12	C	37	B
13	A	38	B
14	A	39	B
15	C	40	C
16	E	41	E
17	B	42	C
18	E	43	D
19	B	44	D
20	C	45	E
21	C	46	B
22	B	47	E
23	E	48	D
24	B	49	C
25	D	50	B

CAPITULO 24

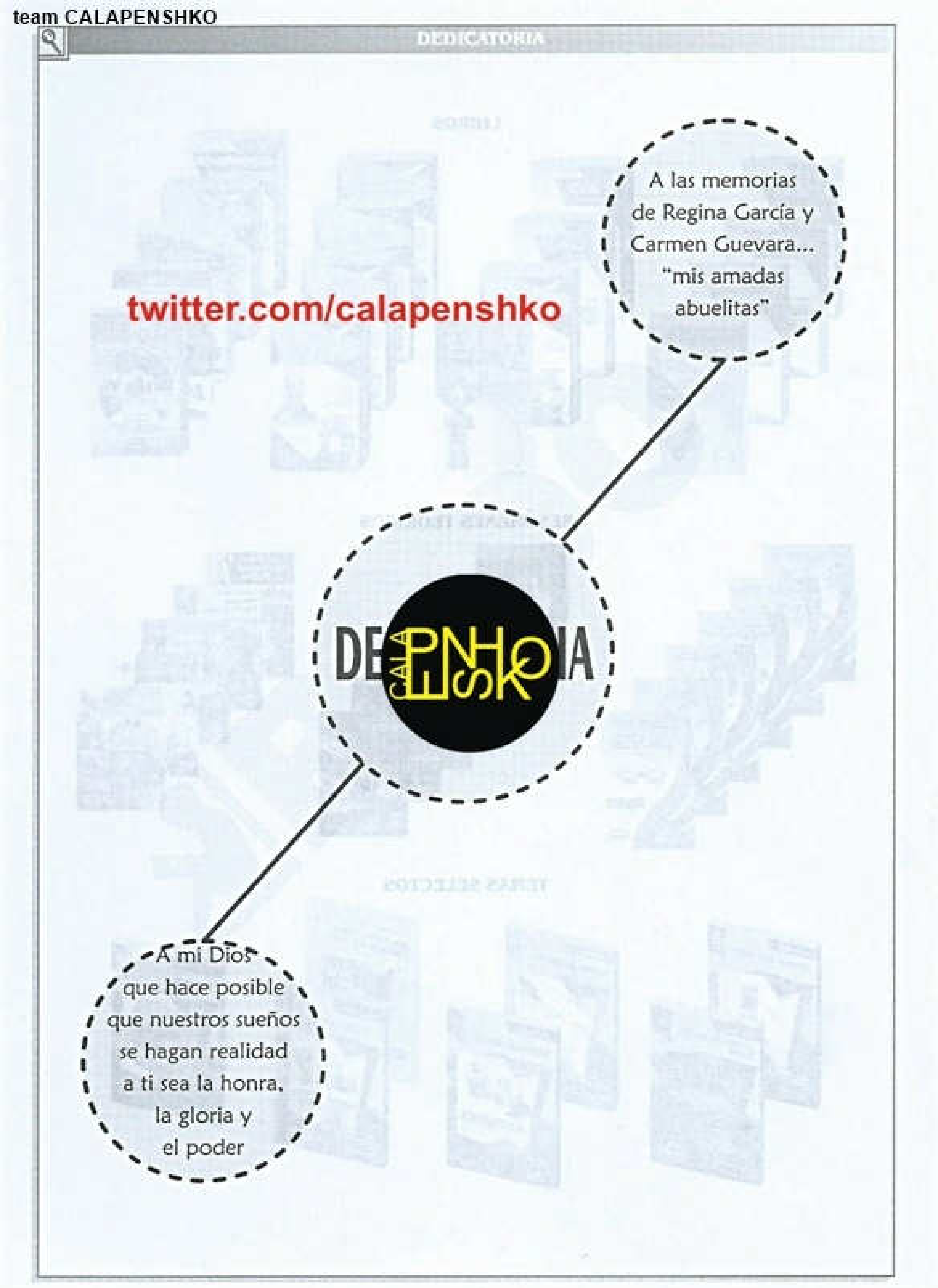
1	C	26	B
2	A	27	A
3	C	28	E
4	B	29	C
5	A	30	B
6	C	31	C
7	E	32	C
8	B	33	E
9	A	34	D
10	A	35	D
11	A	36	B
12	C	37	C
13	B	38	D
14	C	39	A
15	D	40	A
16	A	41	A
17	A	42	D
18	A	43	D
19	E	44	E
20	C	45	A
21	A	46	E
22	B	47	D
23	C	48	C
24	B	49	A
25	C	50	B

CAPITULO 25

1	C	26	B
2	E	27	C
3	D	28	A
4	C	29	E
5	C	30	C
6	D	31	D
7	D	32	A
8	D	33	A
9	B	34	B
10	E	35	B
11	C	36	A
12	E	37	B
13	E	38	C
14	A	39	E
15	B	40	E
16	E	41	D
17	B	42	B
18	A	43	E
19	C	44	E
20	C	45	A
21	C	46	B
22	B	47	B
23	D	48	D
24	C	49	C
25	D	50	C

CAPITULO 26

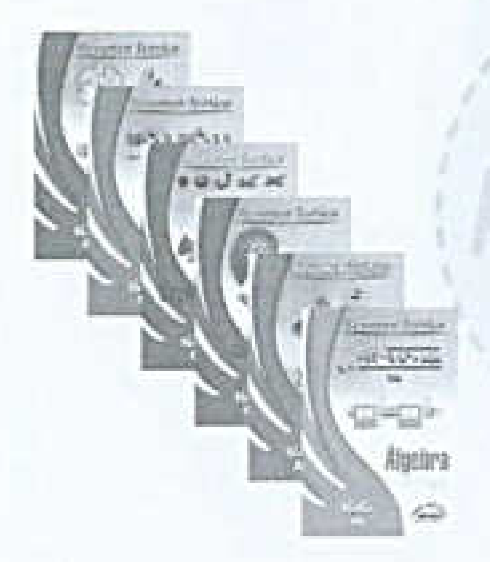
1	D	26	C
2	B	27	A
3	C	28	B
4	D	29	A
5	C	30	A
6	D	31	E
7	B	32	B
8	B	33	B
9	A	34	B
10	E	35	C
11	E	36	C
12	C	37	D
13	C	38	B
14	B	39	A
15	A	40	E
16	D	41	C
17	E	42	E
18	C	43	B
19	B	44	E
20	B	45	B
21	E	46	C
22	A	47	A
23	E	48	B
24	B	49	D
25	D	50	C


A las memorias
de Regina García y
Carmen Guevara...
"mis amadas
abuelitas"
twitter.com/calapenshko
DE CALA PNHO ESKO IA
A mi Dios
que hace posible
que nuestros sueños
se hagan realidad
a ti sea la honra,
la gloria y
el poder

team CALAPENSHKO

LIBROS

RESÚMENES TEÓRICOS



TEMAS SELECTOS

NUESTRAS PUBLICACIONES

LIBROS

- ARITMÉTICA
- ÁLGEBRA
- GEOMETRÍA
- TRIGONOMETRÍA
- RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
- FÍSICA
- QUÍMICA
- BIOLOGÍA Y ANATOMÍA
- GEOGRAFÍA
- LENGUAJE
- LITERATURA
- HISTORIA DEL PERÚ
- HISTORIA UNIVERSAL
- PSIC. FIL. Y LOG.
- RAZONAMIENTO VERBAL

- Formato: 16 x 21.5 cm
- 800 Páginas
- 26 Capítulos
- 650 Problemas Resueltos
- 1300 Problemas Propuestos

twitter.com/calapenshko

Biblias

424-6350
992-796104

editorialrodo@gmail.com / Editorial RODO - Oficial